

УДК 517.9

А. А. ВАГАРШАКЯН

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УСЕЧЕННЫХ
УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА—ХОПФА

Настоящая статья посвящена исследованию интегрального уравнения

$$\int_0^a k(x-t)f(t)dt = g(x), \quad 0 < x < a < \infty. \quad (1)$$

Эти уравнения отличаются от хорошо известных уравнений Винера—Хопфа тем, что верхний предел в интеграле — конечное число. Отмеченное обстоятельство существенно осложняет исследование уравнения (1), так как классический метод факторизации, позволяющий во многих случаях эффективно решить уравнение Винера—Хопфа, в этом случае не проходит.

Рамки настоящей статьи не позволяют остановиться на важном значении этих уравнений для ряда задач физики и техники, а также на существующих методах их решения. Достаточно полный обзор об уравнениях (1) можно найти в работе Л. А. Сахновича [1].

В настоящей статье предлагается новый метод решения уравнения (1). Статья состоит из пяти параграфов. В первом параграфе излагается сущность предложенного метода, который, в общих чертах, основан на возможности представления ядра $k(x)$ в виде ряда

$$k(x) = \sum a_k e^{i\lambda_k x}, \quad -a < x < a, \quad (2)$$

где система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ имеет конечный дефект (см. определение в § 1). Во втором и третьем параграфах исследуется вопрос о конечности дефекта системы $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в интересующих нас пространствах функций. В четвертом параграфе приведены достаточные условия, обеспечивающие представление ядра $k(x)$ в виде ряда (2). В последнем параграфе на конкретном уравнении вида (1) иллюстрируется предложенный метод.

1°. Обозначим через $B_2^\sigma(a, b)$, $0 < \sigma < 1$, пространство Бесова, состоящее из тех функций $f(x)$, $a < x < b$, для которых сходится интеграл

$$\|f\|_{B_2^\sigma}^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx + \int_a^b \int_a^b \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{1+2\sigma}} dx dy < \infty.$$

Определение. Система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ имеет конечный дефект в пространстве $B_2^\sigma(a, b)$, если прибавляя или отнимая из этой системы конечное число функций получаем полную и минимальную систему в

$B_2^+(a, b)$. Дефектом этой системы в $B_2^+(a, b)$ назовем число $n(\sigma)$, равное количеству прибавляемых функций, если придется прибавить, и равное количеству отнимаемых функций с обратным знаком, если придется отнять.

Пусть $k(x)$ допускает представление (2). Рассмотрим уравнение (1) с правой частью $g(x) \in B_2^+(0, a)$ и с искомой функцией $f(x) \in B_2^+(0, a)$. В зависимости от того, какие конечные дефекты имеет система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в пространствах $B_2^+(0, a)$ и $B_2^-(0, a)$, возможны различные утверждения относительно разрешимости уравнения (1). В приведенной ниже теореме рассматривается случай, когда $n(\sigma) = 0$.

Теорема 1. Пусть $k(x)$ допускает представление

$$k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k x}, \quad -a < x < a, \quad a_k \neq 0,$$

где ряд сходится в $L_1(-a, a)$, а система $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет конечный дефект $n(\mu)$ в пространстве $B_2^+(0, a)$ и нулевой дефект в $B_2^-(0, a)$.

Тогда

1. Если $n(\mu) = 0$, то при условии сходимости в $B_2^+(0, a)$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t) g(t) dt \quad (3)$$

для функции $g(x) \in B_2^+(0, a)$, где $\{h_k(x)\}_1^{\infty}$ и $\{h_k^*(x)\}_1^{\infty}$ [системы, биортогональные к $\{e^{i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$ и $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$, уравнение (1) имеет единственное решение $f(x) \in B_2^+(0, a)$, которое представляется в виде ряда (3).

2. Если $n(\mu) < \infty$, то при условии сходимости в $B_2^+(0, a)$ ряда

$$\sum_{k=1-n(\mu)}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t) g(t) dt \quad (4)$$

для $g(x) \in B_2^+(0, a)$, где $\{h_k(x)\}_1^{\infty}$ и $\{h_k^*(x)\}_{1-n(\mu)}^{\infty}$ системы, биортогональные к $\{e^{i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$ и $\{e^{-i\lambda_k x}\}_{1-n(\mu)}^{\infty}$, уравнение (1) имеет единственное решение $f(x) \in B_2^+(0, a)$, если

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-i\lambda_j x} \left(\sum_{k=1-n(\mu)}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t) g(t) dt \right) dx = \\ = \frac{1}{a_j} \int_0^a h_j(x) g(x) dx, \quad j = 1, \dots, -n(\mu). \end{aligned}$$

Это решение представляется в виде ряда (4).

3. Если $n(\mu) > 0$, то при условии сходимости в $B_2^{\mu}(0, a)$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t) g(t) dt$$

для $g(x) \in B_2^{\mu}(0, a)$, где $\{h_k(x)\}_1^{\infty}$ и $\{h_k^*(x)\}_{k=-n(\mu)}^{\infty}$ — системы, биортогональные к $\{e^{i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$ и $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^{\infty} \cup \{e^{-i\lambda_j x}\}_{j=-n(\mu)}^{-1}$ уравнение (1) имеет решение $B_2^{\mu}(0, a)$, которое допускает представление

$$f(x) = \sum_{j=-n(\mu)}^{-1} x_j h_j^*(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t) g(t) dt,$$

где x_k — произвольные числа.

Доказательство. Уравнение (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k x} \int_0^a e^{-i\lambda_k t} f(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\lambda_k x} \int_0^a h_k(t) g(t) dt,$$

где $\{h_k(x)\}_1^{\infty}$ — система, биортогональная к $\{e^{i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$.

Так как $n(\sigma) = 0$, то

$$a_k \int_0^a e^{-i\lambda_k x} f(t) dt = \int_0^a h_k(t) g(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

В случае, когда $n(\mu) = 0$, проблема моментов (5) имеет в $f(t) \in B_2^{\mu}(0, a)$ единственное решение, допускающее представление

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t) g(t) dt,$$

где $\{h_k^*(x)\}_1^{\infty}$ — система, биортогональная к $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$ при условии, что ряд (3) сходится в $B_2^{\mu}(0, a)$.

В случае, когда $n(\mu) < 0$, проблема моментов (5) переопределена. Моментами функции $g(t)$ при $k = 1 - n(\mu), \dots$ мы строим $f(t)$ по формуле

$$f(x) = \sum_{k=1-n(\mu)}^{\infty} \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t) g(t) dt,$$

где $\{h_k^*(x)\}_{1-n(\mu)}^{\infty}$ — система, биортогональная к $\{e^{-i\lambda_k x}\}_{1-n(\mu)}^{\infty}$.

Подставляя выражение для $f(x)$ в (5) при $k = 1, \dots, -n(\mu)$ получаем условия на правую часть.

В случае, когда $n(\mu) > 0$ моменты (5) не достаточны для однозначного определения функции $f(x)$. К системе $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^{\infty}$ мы добавляем $n(\mu)$ функций $\{e^{-i\lambda_j x}\}_{j=-n(\mu)}^{-1}$. Обозначим через $\{h_k^*(x)\}_{-n(\mu)}^{\infty}$ систему, биортогональную к $\{e^{-i\lambda_k x}\}_1^{\infty} \cup \{e^{-i\lambda_j x}\}_{j=-n(\mu)}^{-1}$. Тогда общее решение проблемы моментов (5) допускает представление

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{-1} x_k h_k^*(x) + \sum_{k=1}^n \frac{h_k^*(x)}{a_k} \int_0^a h_k(t) g(t) dt,$$

где x_k — произвольные числа.

Замечание. Нетрудно усмотреть, что изложенный выше метод решения уравнения (1) проходит также и в тех случаях, когда система $\{e^{i\lambda_k x}\}_1^\infty$ имеет произвольные конечные дефекты в пространствах $B_2^+(0, a)$ и $B_2^-(0, a)$.

2°. В настоящем параграфе собраны вспомогательные леммы, необходимые для получения основных результатов третьего параграфа.

Лемма 1. Пусть $\lambda_{-n}, \dots, \lambda_0, \dots, \lambda_n$ — последовательность комплексных чисел. Тогда для любых $c_{-n}, \dots, c_0, \dots, c_n$ имеет место оценка

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\lambda_k x} \right|^2 dx \leq 3 \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \frac{|\lambda_k - k|^2 + 1}{1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|} e^{2|\operatorname{Im} \lambda_k| \pi}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\lambda_k x} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_0^x \sum_{k=-n}^n (\lambda_k - k) c_k e^{i(\lambda_k - k)t + ikx} dt \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_0^x \sum_{k=-n}^n (\lambda_k - k) c_k e^{i(\lambda_k - k)t + ikx} dt \right|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \int_0^x \left| \sum_{k=-n}^n (\lambda_k - k) c_k e^{i(\lambda_k - k)t + ikx} \right|^2 dt dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^n (\lambda_k - k) c_k e^{i(\lambda_k - k)t + ikx} \right|^2 dx dt \leq \\ &\leq \pi \sum_{k=-n}^n |\lambda_k - k|^2 |c_k|^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2|\operatorname{Im} \lambda_k| t} dt \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \frac{|\lambda_k - k|^2 + 1}{1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|} e^{2|\operatorname{Im} \lambda_k| \pi}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

В дальнейшем встречаются такие λ_k , которые являются нулями некоторой целой функции вида

$$L(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} g(t) dt, \quad (6)$$

где $g(t) \in L_1(-\pi, \pi)$. Введем обозначение

$$h_n(x) = -ie^{-i\lambda_n x} \int_{-\pi}^x e^{i\lambda_n t} g(t) dt, \quad -\pi < x < \pi.$$

Легко проверить, что если нули $L(z)$ являются простыми, то

$$\frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda_m x} h_n(x) dx = \delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронеккера. Более подробно о системе функций $h_n(x)$ можно прочесть в книге А. Ф. Леонтьева [2].

Лемма 2. Пусть λ_n — нули целой функции (6), где $g(t) \in L_1(-\pi, \pi)$. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 |L'(\lambda_k)|^2 e^{-4\pi |\operatorname{Im} \lambda_k|} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_k| + 1}{|\lambda_k - k|^2 + 1} \leq M \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\lambda_k x} \right|^2 dx,$$

где M — постоянное число.

Доказательство. Для краткости, положим

$$Q(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\lambda_k x}.$$

Тогда для любых комплексных чисел d_k , — $n \leq k \leq n$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-n}^n c_k d_k \right| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} Q(x) \left(\sum_{k=-n}^n \frac{d_k}{L'(\lambda_k)} h_k(x) \right) dx \right| = \\ &= \left| -i \int_{-\pi}^{\pi} Q(x) \int_{-\pi}^x \left(\sum_{k=-n}^n \frac{d_k}{L'(\lambda_k)} e^{i\lambda_k(t-x)} \right) g(t) dt dx \right| = \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \int_t^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^n \frac{d_k}{L'(\lambda_k)} e^{i\lambda_k(t-x)} \right) Q(x) dx dt \right| \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| \left(\int_t^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^n \frac{d_k}{L'(\lambda_k)} e^{i\lambda_k(t-x)} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \left(\int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| dx \left(\int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-2\pi}^0 \left| \sum_{k=-n}^n \frac{d_k}{L'(\lambda_k)} e^{i\lambda_k y} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| dt \left(\int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^n \frac{d_k e^{-i\lambda_k \pi}}{L'(\lambda_k)} e^{i\lambda_k y} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 1, имеем

$$\left| \sum_{k=-n}^n c_k d_k \right|^2 \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^2 dx \left(\sum_{k=-n}^n |d_k|^2 \left(\frac{(|\lambda_k - k|^2 + 1) e^{4\pi |\operatorname{Im} \lambda_k|}}{(1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|)(L'(\lambda_k))^2} \right) \right).$$

Подставляя

$$d_k = \overline{c_k} |L'(\lambda_k)|^2 e^{-4\pi |\operatorname{Im} \lambda_k|} \frac{1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|}{|\lambda_k - k|^2 + 1},$$

получим

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 |L'(\lambda_k)|^2 e^{-4\pi |\operatorname{Im} \lambda_k|} \frac{1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|}{|\lambda_k - k|^2 + 1} \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |Q(x)|^2 dx.$$

Лемма 3. Пусть $g(x)$, $-a < x < a$, допускает представление

$$g(x) = \frac{A}{(a+x)^\alpha} + \frac{B}{(a-x)^\beta} + g_0(x),$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, A и B — отличные от нуля числа и

$$\int_{-a}^a \left| g_0(x) - \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} g_0(t) dt \right| dx = o(\delta^{1-\min\{\alpha, \beta\}}).$$

Тогда

$$L(z) = \int_{-a}^a e^{izt} g(t) dt$$

является целой функцией экспоненциального типа a . Ее индикаторная диаграмма в направлении оси OY — отрезок длины $2a$. Нули λ_n , $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ функции $L(z)$ для достаточно больших n простые и имеют асимптотику

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a} - \frac{\pi}{2a} \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + i \frac{\beta - \alpha}{2a} \ln \frac{\pi n}{a} + \frac{i}{2a} \ln \frac{B\Gamma(1-\beta)}{A\Gamma(1-\alpha)} + o(1),$$

при $n = 1, 2, \dots$

и

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a} + \frac{\pi}{2a} \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + i \frac{\beta - \alpha}{2a} \ln \frac{\pi |n|}{a} + \frac{i}{2a} \ln \frac{B\Gamma(1-\beta)}{A\Gamma(1-\alpha)} + o(1),$$

при $n = -1, -2, \dots$

Функция $L(z)$ допускает оценки

$$M(1 + |x|)^{\max\{\alpha, \beta\} - 1} > |L(x)| \geq N(1 + |x|)^{\max\{\alpha, \beta\} - 1}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$|L'(\lambda_n)| \geq N |n|^{\frac{\alpha + \beta}{2} - 1}.$$

Отметим, что результаты, аналогичные утверждениям леммы 3, в случае, когда $\alpha = \beta$, содержатся в работе А. М. Седлецкого [2].

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$L_0(z) = \int_{-a}^a e^{ixt} g_0(t) dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |L_0(x+iy)| &= \left| \int_{-a}^a e^{ixt-yt} g_0(t) dt \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-a+2\frac{ka}{n}}^{-a+2\frac{k+1}{n}a} e^{ixt-yt} g_0(t) dt \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} e^{ixt+2i\frac{ka}{n}\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-y\left(t+2\frac{ka}{n}\right)} g_0\left(t+2\frac{ka}{n}\right) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} e^{ixt} \left(e^{4i\frac{ka}{n}\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-y\left(t+4\frac{ka}{n}\right)} g_0\left(t+4\frac{ka}{n}\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{2i\frac{2k+1}{n}a\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-y\left(t+2\frac{a(2k+1)}{n}\right)} g_0\left(t+2\frac{2k+1}{n}a\right) \right) dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} \left| e^{4i\frac{ka}{n}\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-y\left(t+4\frac{ka}{n}\right)} - e^{2i\frac{2k+1}{n}a\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-y\left(t+2\frac{a(2k+1)}{n}\right)} \right| \cdot \\ &\quad \cdot \left| g_0\left(t+4\frac{ka}{n}\right) \right| dt + \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} \left| g_0\left(t+2\frac{2k+1}{n}a\right) - \right. \\ &\quad \left. - g_0\left(t+4\frac{ka}{n}\right) \right| e^{-y\left(t+2\frac{a(2k+1)}{n}\right)} dt \leq \\ &\leq e^{a|y|} \int_{-a}^a |g_0(t)| dt \left| 1 - e^{2i\frac{a}{n}\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)-\frac{ya}{n}} \right| + \\ &+ e^{a|y|} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} \left| g_0\left(t+4\frac{ka}{n}+\frac{2a}{n}\right) - g_0\left(t+4\frac{ka}{n}\right) \right| dt. \end{aligned}$$

Выбирая число $n = \left\lceil \frac{2ax}{\pi} \right\rceil$, при $|y| \leq |x|$ имеем

$$\begin{aligned} |L_0(x+iy)| &\leq A \frac{e^{a|y|}}{n} + e^{a|y|} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} \left| g_0\left(t+4\frac{ka}{n}+\frac{2a}{n}\right) - \right. \\ &\quad \left. - g_0\left(t+4\frac{ka}{n}\right) \right| dt. \end{aligned}$$

Следовательно

$$|L_0(x + iy)| \leq A \frac{e^{a|y|}}{|x|} + B \frac{e^{a|y|}}{|x|^{1-\min\{\alpha, \beta\}}}$$

в области $\left\{ z; |\operatorname{Im} z| < \frac{|x - \beta|}{2a} \ln |\operatorname{Re} z| + c \right\}$

имеет место оценка

$$|L_0(x + iy)| \leq M |x|^{\min\{\alpha, \beta\} + \frac{|x - \beta|}{2} - 1},$$

а на действительной оси имеем

$$|L_0(x)| \leq M |x|^{\min\{\alpha, \beta\} - 1}.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{e^{-lzt}}{t^\beta} dt &= \int_0^a \frac{e^{-lxt+yt}}{t^\beta} dt = \int_0^a \frac{e^{-lxt}}{t^\beta} dt + \int_0^a \frac{e^{yt} - 1}{t^\beta} e^{-lxt} dt = \\ &= x^{\beta-1} \int_0^\infty \frac{e^{-lt}}{t^\beta} dt + \int_0^a \frac{e^{yt} - 1}{t^\beta} e^{-lxt} dt - \int_a^\infty \frac{e^{-lxt}}{t^\beta} dt, \end{aligned}$$

где $z = x + iy$, $x > 0$. Имеет место оценка

$$\int_0^\infty \frac{e^{-lxt}}{t^\beta} dt = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Далее, при $|y| < \frac{|\beta - \alpha|}{2a} \ln |x| + c$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \int_{-a}^{-a+2\frac{a}{n}} \left| \frac{e^{y\left(t+4\frac{ka}{n}+\frac{2a}{n}\right)} - 1}{\left(t+4\frac{ka}{n}+\frac{2a}{n}\right)^\beta} - \frac{e^{y\left(t+4\frac{ka}{n}\right)} - 1}{\left(t+4\frac{ka}{n}\right)^\beta} \right| dt \leq \frac{M}{|x|^{\frac{1-|\alpha-\beta|}{2}}},$$

где $n = \left\lfloor \frac{2ax}{\pi} \right\rfloor$. Следовательно, для функции $L(z)$ в области $x > 0$

и $|y| < \frac{|\beta - \alpha|}{2a} \ln x + c$ получаем асимптотику

$$\begin{aligned} L(x + iy) &= A i x^{\alpha-1} e^{-iza + \frac{\pi}{2}(1-\alpha)i} \Gamma(1-\alpha) - \\ &- B i x^{\beta-1} e^{iza + \frac{\pi}{2}(1-\beta)i} \Gamma(1-\beta) + o\left(x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}\right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом в области $x < 0$ и $|y| < \frac{|x - \beta|}{2a} \ln |x| + c$ можно получить оценку

$$L(x + iy) = -A i (-x)^{\alpha-1} e^{-iza + \frac{\pi}{2}(1-\alpha)i} \Gamma(1-\alpha) +$$

$$+ B i (-x)^{\beta-1} e^{i z a - \frac{\pi}{2}(1-\beta) i} \Gamma(1-\beta) + o(|x|^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}).$$

Из этих оценок следует, что на действительной оси имеет место неравенство

$$A |x|^{\max\{\alpha, \beta\}-1} \geq |L(x)| \geq B |x|^{\max\{\alpha, \beta\}-1}, \quad |x| > 1.$$

Далее, при $|y| < \frac{|\alpha-\beta|}{2a} \ln |x| + c$ и $x > 0$ имеем

$$L(x+iy) = \frac{2 e^{\frac{\pi i (\alpha-\beta)}{4}}}{x^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}} (A \Gamma(1-\alpha) B \Gamma(1-\beta))^{\frac{1}{2}}} \sin\left(za + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) - i \frac{\beta-\alpha}{2} \ln x - \frac{i}{2} \ln \frac{B \Gamma(1-\beta)}{A \Gamma(1-\alpha)}\right) + o\left(x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}\right), \quad (7)$$

а при $x < 0$ имеем

$$L(x+iy) = \frac{2 e^{-\frac{\pi i (\alpha-\beta)}{4}}}{(-x)^{1-\frac{\alpha+\beta}{2}} (A \Gamma(1-\alpha) B \Gamma(1-\beta))^{\frac{1}{2}}} \sin\left(za - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) - i \frac{\beta-\alpha}{2} \ln(-x) - \frac{i}{2} \ln \frac{B \Gamma(1-\beta)}{A \Gamma(1-\alpha)}\right) + o\left(x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}\right).$$

Из этих оценок следует, что нули целой функции $L(z)$, лежащие в области $|y| < \frac{|\alpha-\beta|}{2a} \ln |x| + c$ имеют требуемую асимптотику,

Теперь докажем, что $L(z)$ не имеет других нулей. С этой целью рассмотрим функцию

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \left(1 - \frac{z}{\lambda_{-n}}\right).$$

Это — целая функция экспоненциального типа a . Индикаторная диаграмма по мнимой оси имеет длину $2a$. Оценим эту функцию снизу на действительной оси. Введем функцию

$$F_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \left(1 - \frac{z}{a_{-n}}\right),$$

где $a_n = \operatorname{Re} \lambda_n$. Предположим, что $x > 1$ и $|a_n| > x$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{x}{\lambda_n}\right|^2 &= \left|1 - \frac{x}{a_n + i b_n}\right|^2 = \frac{(a_n - x)^2 + b_n^2}{a_n^2 + b_n^2} > \\ &\geq \frac{(a_n - x)^2 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2a}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi |a_n|}{a}}{a_n^2 + b_n^2} \geq \frac{a_n^2}{a_n^2 + b_n^2} \frac{(a_n - x)^2 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2a}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi |a_n|}{a}}{a_n^2} = \end{aligned}$$

$$= \left(1 + \frac{b_n^2}{a_n^2}\right)^{-1} \left| 1 - \frac{x + i \frac{\beta - \alpha}{2a} \ln \frac{\pi x}{a}}{a_n} \right|^2.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$|\operatorname{Im} \lambda_n| = |b_n| \geq \frac{|\beta - \alpha|}{2a} \ln \frac{\pi |a_n|}{a}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $x > 1$, $|a_n| < x$. Заметим, что имеет место неравенство

$$\frac{(a_n - x)^2 + b_n^2}{(a_n - x)^2 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2a}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi x}{a}} \geq \frac{x^2 + b_n^2}{x^2 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2ax}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi x}{a}}, \quad |a_n| < x.$$

Так как $x^{-2} \ln^2 \frac{\pi x}{a} > |a_n|^2 \ln^2 \frac{\pi |a_n|}{a}$, то

$$\frac{1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2ax}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi |a_n|}{a}}{1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2ax}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi x}{a}} > \frac{1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2ax}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi |a_n|}{a}}{1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2a a_n}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi |a_n|}{a}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + b_n^2}{x^2 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2a}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi x}{a}} &\geq \frac{1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2ax}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi |a_n|}{a}}{1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2ax}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi x}{a}} > \\ &\geq \left(1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2a a_n}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi |a_n|}{a}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Окончательно приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{x}{a_n + i b_n} \right|^2 &= \frac{(a_n - x)^2 + b_n^2}{a_n^2 + b_n^2} \geq \frac{(a_n - x)^2 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2a}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi x}{a}}{(a_n^2 + b_n^2) \left(1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2a a_n}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi |a_n|}{a}\right)} \geq \\ &\geq \frac{(a_n - x)^2 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2a}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi x}{a}}{a_n^2} \left(1 + \left(\frac{\beta - \alpha}{2a a_n}\right)^2 \ln^2 \frac{\pi |a_n|}{a}\right)^{-1} \left(1 + \frac{b_n^2}{a_n^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует неравенство

$$|F(x)| \geq M \left| F_0 \left(x + i \frac{\beta - \alpha}{2a} \ln \frac{\pi x}{a} \right) \right|, \quad x > 1,$$

где M — некоторое число. Известно, см. [3], что имеет место оценка

$$|F_0(z)| \geq \frac{A}{(1 + |z|)^{\frac{\pi}{a}(2 - \alpha - \beta) + 5}}$$

при $|\operatorname{Im} z| > 1$. Следовательно

$$|F(x)| > \frac{B}{\frac{x}{a}(2-a-\beta)+6}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$(1 + |x|)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{L(z)}{F(z)}.$$

Заметим, что $\Phi(z)$ — целая функция нулевой степени и на вещественной оси допускает оценку

$$|\Phi(x)| \leq M(1 + |x|)^m, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Следовательно, $\Phi(z)$ может иметь только конечное число нулей.

Из оценок (7) следует последнее утверждение леммы.

3°. Здесь мы рассматриваем вопросы полноты и минимальности системы $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в пространстве Бесова $B_2^s(-\pi, \pi)$. Отметим, что аналогичные результаты в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ хорошо известны (см. Б. Я. Левин [4]).

Приведенный ниже результат является обобщением теоремы Н. Винера, Р. Пэли [3].

Теорема 2. Класс целых функций, удовлетворяющих условиям:

$$1. |F(z)| \leq M e^{\pi|z|};$$

$$2. \text{ при } 0 < \sigma < \frac{1}{2} \text{ сходится интеграл}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 (1 + x^2)^{\sigma} dx < \infty,$$

$$\text{а при } \frac{1}{2} < \sigma < 1 \text{ сходится интеграл}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| F(x) - \alpha \frac{\sin \pi x}{x} - \beta \frac{\pi x \cos \pi x - \sin \pi x}{x^2} \right|^2 (1 + x^2)^{\sigma} dx < \infty,$$

где α и β — некоторые числа, совпадает с классом функций, допускающих представление

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} f(t) dt, \quad (8)$$

где $f(t) \in B_2^s(-\pi, \pi)$,

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $0 < \sigma < \frac{1}{2}$.

В силу теоремы Н. Винера и Р. Пэли, целая функция $F(z)$, удовлетворяющая условиям 1 и 2, допускает представление (8), где $f(t) \in L_2(-\pi, \pi)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_2^\sigma}^2 &= \int_0^1 |e^{i\pi x} f(x)|_{B_2^\sigma}^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |F(n+x)|^2 dx (1+n^2)^\sigma = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 (1+x^2)^\sigma dx. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. В этом случае $f(t)$ — непрерывная функция. Введем новую функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) - \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2} - \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2} \frac{t}{\pi}, & -\pi < t < \pi \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$$

Для этой функции имеем

$$\|f_0\|_{B_2^\sigma}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F_0(x)|^2 (1+x^2)^\sigma dx, \quad (9)$$

где

$$F_0(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} f_0(t) dt.$$

Конечность интеграла (9) равносильна условию (2).

Теорема 3. Для того, чтобы система $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ была минимальной в пространстве $B_2^\sigma(-\pi, \pi)$, $0 < \sigma < 1$, необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция $\varphi(z)$ конечной степени не больше π , обращающаяся в нуль во всех точках λ_k и такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 (1+x^2)^{-1-\sigma} dx < \infty.$$

Доказательство. Минимальность $\{e^{i\lambda_k x}\}$ равносильна существованию биортогональной к ней системы функций. Пусть существует биортогональная система $\{h_n(x)\} \subset (B_2^\sigma)^*$. Тогда функция

$$\varphi(z) = (z - \lambda_0) \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} h_0(t) dt$$

удовлетворяет условиям леммы.

Теперь предположим, что существует функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы. Обозначим через $\tilde{h}_n(x)$ обобщенную функцию, преобразование Фурье которой совпадает с функцией $\frac{\varphi(z)}{z - \lambda_n}$.

Заметим, что $\text{supp } h_k \subseteq [-\pi, \pi]$ и $h_k(x) \in (B_2^*)$. Следовательно, $\{h_k(x)\}$ является биортогональной к $\{e^{i\lambda_k x}\}$ системой.

Теорема 4. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — множество корней целой функции $\varphi(\lambda)$ конечной степени с индикаторной диаграммой, ширина которой не меньше 2π в направлении оси OY и

$$|\varphi(x)| \geq \frac{A}{(1+|x|)^\gamma}, \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\gamma < \frac{1}{2} - \sigma$, $0 < \sigma < 1$. Тогда система $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ полна в $B_2^*(-\pi, \pi)$.

Доказательство. Пусть система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ не полна в $B_2^*(-\pi, \pi)$. Тогда существует нетривиальная целая функция $f(\lambda)$, обращающаяся в нуль в точках λ_k и допускающая представление

$$f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \psi(t) dt,$$

где $\psi(t) \in (B_2^*)$. Из этого представления следует оценка

$$|f(\lambda)| \leq \|e^{i\lambda x}\|_{B_2^*} \|\psi\|_{(B_2^*)} \leq M e^{\pi |\text{Im} \lambda|} (1 + |\text{Re} \lambda|)^\sigma.$$

Следовательно

$$F(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$$

является целой функцией нулевой степени и на действительной оси имеем

$$|F(x)| \leq M(1 + |x|)^{\sigma+\gamma},$$

Заметим, что $F(\lambda)$ не может быть постоянной функцией. Действительно, тогда $\varphi(x) = cf(x)$ и мы приходим к противоречию с условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 (1+x^2)^{-\sigma} dx < \infty.$$

Если $F(z)$ имеет хотя бы один нуль z_0 , то $\frac{F(z)}{z-z_0}$ является целой функцией нулевой степени и по действительной оси стремится к нулю. Следовательно, $F(z) \equiv 0$. Поэтому $\psi(t) \equiv 0$.

4°. В настоящем параграфе исследуется вопрос о возможности представления ядра $k(x)$ в виде ряда (2).

Лемма 4. Пусть $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3 и $f(x) \in B_2^*(-\pi, \pi)$, где $0 < \sigma < 1$, и

$$-\frac{1}{2} + \max\{\alpha, \beta\} < \sigma \leq \frac{1}{2} + \max\{\alpha, \beta\}.$$

Если

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx = 0,$$

то $f(x)$ принадлежит замыканию линейной оболочки системы $\{e^{i\lambda_k x}\}$ по норме пространства $B_2^{\sigma}(-\pi, \pi)$, где λ_k — нули функции $L(z)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что коразмерность замыкания линейной оболочки системы $\{e^{i\lambda_k x}\}$ равна единице.

Из леммы 3 следует, что сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L(x)|^2 (1+x^2)^{-\sigma} dx < \infty$$

и расходится

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L(x)|^2 (1+x^2)^{1-\sigma} dx = \infty.$$

Следовательно, в силу теорем 3 и 4 система $\{e^{i\lambda_k x}\}$ не полна в $B_2^{\sigma}(-\pi, \pi)$ и становится полной при добавлении одной функции вида $e^{i\lambda x}$.

Лемма 5. Пусть $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3, а $k(x) \in L_2(-2\pi, 2\pi)$ и $k(x) \in B_2^{\sigma}(-\pi, \pi)$, где

$$\max \left\{ -\frac{1}{2} + \alpha; -\frac{1}{2} + \beta; 1 + 2|\alpha - \beta| - \frac{\alpha + \beta}{2} \right\} < \sigma < \frac{1}{2} + \max\{\alpha, \beta\}.$$

Если

$$\int_{-\pi}^{\pi} k(x-t) g(t) dt = 0, \quad -\pi < x < \pi,$$

то $k(x)$ принадлежит замыканию линейной оболочки системы $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в пространстве $L_2(-2\pi, 2\pi)$, где λ_k — нули $L(z)$.

Доказательство. Из равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} k(-t) g(t) dt = 0$$

и в силу леммы 4, существует последовательность квазиполиномов $Q_n(x)$ по системе $\{e^{i\lambda_k x}\}$, которая в $B_2^{\sigma}(-\pi, \pi)$ стремится к $k(-x)$. Докажем, что $Q_n(x)$ фундаментальна в пространстве $L_2(-2\pi, 2\pi)$. Действительно, пусть

$$Q(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{i\lambda_k x}$$

— некоторый квазиполином. В силу леммы 2 имеем

$$\begin{aligned}
 & M \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|Q(x) - Q(y)|^2}{|x - y|^{1+2\sigma}} dx dy \geq \\
 & \geq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-m}^m |c_k|^2 \frac{|k|^{a+\beta-2|a-\beta|-2}}{\ln|k|} \frac{|1 - e^{i\lambda_k t}|^2}{|t|^{1+2\sigma}} dt \right) \\
 & > \sum_{k=-m}^m |c_k|^2 |k|^{2a+\alpha+\beta-2|a-\beta|-2} \ln^{-2-2\sigma}|k|..
 \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу леммы 1, имеем

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} |Q(x)|^2 dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} |Q(2x)|^2 dx \leq M \sum_{k=-m}^m |c_k|^2 |k|^{2|\beta-a|} \ln|k|..$$

Так как $1 + 2|a - \beta| - \frac{a + \beta}{2} < \sigma$, то

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} |Q(x)|^2 dx \leq M \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|Q(x) - Q(y)|^2}{|x - y|^{1+2\sigma}} dx dy..$$

Таким образом, $Q_n(x)$ фундаментальна в $L_2(-2\pi, 2\pi)$. Её предел обозначим через $R(x)$, $-2\pi < x < 2\pi$. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} (k(x-t) - R(x-t)) g(t) dt = 0, \quad -\pi < x < \pi.. \quad (10)$$

Заметим, что для любого фиксированного x , $-\pi < x < \pi$, функция $k(x-t) - R(x-t)$, $-\pi < t < \pi$ ортогональна всем функциям системы $\{e^{i\lambda_k t}\}$ и имеет место (10). Следовательно, в силу леммы 4, $k(x-t) - R(x-t) \equiv 0$.

Теорема 5. Пусть $k(x) \in L_2(-2\pi, 2\pi)$, $k(x) \in B_2^2(-\pi, \pi)$, $0 < \sigma < 1$ и для некоторых $\mu_1, \dots, \mu_m$ и $a_1, \dots, a_m$ уравнение

$$\int_{-\pi}^{\pi} k(x-t) g(t) dt = a_1 e^{-i\mu_1 x} + \dots + a_m e^{i\mu_m x}, \quad -\pi < x < \pi,$$

имеет решение, допускающее представление

$$g(x) = \frac{A}{(\pi+x)^a} + \frac{B}{(\pi-x)^b} + g_0(x), \quad -\pi < x < \pi,$$

где $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, A и B — отличные от нуля числа и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| g_0(x) - \frac{1}{2b} \int_{x-b}^{x+b} g_0(t) dt \right| dx = o(\delta^{1-\min\{a, b\}}).$$

Предположим, что имеют место неравенства

$$\max \left\{ -\frac{1}{2} + \alpha; -\frac{1}{2} + \beta; 1 + 2|\alpha - \beta| - \frac{\alpha + \beta}{2} \right\} < \sigma < \frac{1}{2} + \max \{ \alpha, \beta \}.$$

Тогда $k(x)$ допускает представление

$$k(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x},$$

где ряд сходится в смысле $L_2(-2\pi, 2\pi)$, а λ_n — нули мероморфной функции

$$\frac{\prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{z}{\mu_j} \right) \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} g(t) dt}{i \int_{-\pi}^{\pi} k(x) e^{-ixz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} g(t) dt dx + \sum_{j=1}^m \frac{a_j L(-\mu_j)}{(\mu_j + z) L(\mu_j)}},$$

причем дефект системы $\{e^{i\lambda_k x}\}$ в пространстве $B_2(-\pi, \pi)$ больше $-\infty$.

Доказательство. Заметим, что все нули функции $L(z)$, кроме конечного числа, простые. Если $L(z)$ не обращается в нуль в точках $\mu_1, \dots, \mu_m$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(k(x-t) - \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{L(\mu_j)} e^{-i\mu_j(x-t)} \right) g(t) dt = 0, \quad -\pi < x < \pi.$$

В случае, когда $L(\mu_j) = 0$, $L'(\mu_j) = 0, \dots$, $L^{(k)}(\mu_j) = 0$, $L^{(k+1)}(\mu_j) \neq 0$, можно написать

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(k(x-t) - \frac{a_j (-i)^{k+1}}{L^{(k+1)}(\mu_j)} (x-t)^{k+1} e^{-i\mu_j(x-t)} \right) g(t) dt = \sum_{n \neq j} a_n e^{-i\mu_n x}.$$

Для простоты изложения предположим, что $L(\mu_j) \neq 0$. В силу леммы 5 имеем

$$k(x) - \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{L(\mu_j)} e^{-i\mu_j x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x}, \quad -2\pi < x < 2\pi,$$

где ряд в правой части сходится в $L_2(-2\pi, 2\pi)$, а коэффициенты c_k определяются формулой

$$c_k = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(k(x) - \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{L(\mu_j)} e^{-i\mu_j x} \right) h_k(x) dx.$$

Здесь $\{h_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — система, биортогональная к $\{e^{i\lambda_k x}\}$ и, как хорошо известно, см. [2], допускает представление:

$$h_k(x) = -ie^{-i\lambda_k x} \int_{-\pi}^x e^{i\lambda_k t} g(t) dt.$$

Следовательно, для коэффициентов c_k имеем

$$c_k = -\frac{i}{L'(\lambda_k)} \left(\int_{-\pi}^{\pi} k(x) e^{-i\lambda_k x} \int_{-\pi}^x e^{i\lambda_k t} g(t) dt + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j L(-\mu_j)}{iL(\mu_j)(\mu_j + \lambda_k)} \right).$$

Теорема доказана.

5°. В настоящем параграфе рассматривается следующее уравнение:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \frac{\sigma}{2} (\pi - |x - t|)}{\sin^{\sigma} |x - t|} \operatorname{sign}(x - t) f(t) dt = g(x), \quad 0 \leq x < \pi, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Его ядро

$$k(x) = \frac{\sin \frac{\sigma}{2} (\pi - |x|)}{\sin^{\sigma} |x|} \operatorname{sign} x, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

в случае, когда $0 < \sigma \leq \pi$, допускает представление

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{\sin \frac{\sigma}{2} (\pi - x)}{\sin^{\sigma} x} = (2i)^{\sigma-1} \frac{e^{i\frac{\sigma}{2}(\pi-x)} - e^{-i\frac{\sigma}{2}(\pi-x)}}{(e^{ix} - e^{-ix})^{\sigma}} = \\ &= (2i)^{\sigma-1} \left(\frac{e^{i\frac{\sigma}{2}(\pi-x) + i\sigma x}}{(e^{2ix} - 1)^{\sigma}} - \frac{e^{-i\frac{\sigma}{2}(\pi-x) - i\sigma x}}{(1 - e^{-2ix})^{\sigma}} \right) = \\ &= -i2^{\sigma-1} \left(\frac{e^{i\frac{\sigma}{2}x}}{(1 - e^{2ix})^{\sigma}} - \frac{e^{-i\frac{\sigma}{2}x}}{(1 - e^{-2ix})^{\sigma}} \right). \end{aligned}$$

При отрицательных значениях аргумента, $-\pi \leq x < 0$, имеем

$$\begin{aligned} k(x) &= -\frac{\sin \frac{\sigma}{2} (\pi + x)}{\sin^{\sigma} (-x)} = -(2i)^{\sigma-1} \frac{e^{i\frac{\sigma}{2}(\pi+x)} - e^{-i\frac{\sigma}{2}(\pi+x)}}{(e^{-ix} - e^{ix})^{\sigma}} = \\ &= (2i)^{\sigma-1} \left(\frac{e^{-i\frac{\sigma}{2}(\pi+x) + i\sigma x}}{(1 - e^{2ix})^{\sigma}} - \frac{e^{i\frac{\sigma}{2}(\pi+x) - i\sigma x}}{(e^{-2ix} - 1)^{\sigma}} \right) = \\ &= -i2^{\sigma-1} \left(\frac{e^{i\frac{\sigma}{2}x}}{(1 - e^{2ix})^{\sigma}} - \frac{e^{-i\frac{\sigma}{2}x}}{(1 - e^{-2ix})^{\sigma}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, на всем интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ ядро $k(x)$ допускает представление:



$$k(x) = i2^{\sigma-1} \sum_{n=-\infty}^0 \frac{\Gamma(\sigma-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(\sigma)} e^{2inx - i\frac{\sigma}{2}x} - \\ - i2^{\sigma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\sigma)} e^{2inx + i\frac{\sigma}{2}x}.$$

Пусть $f(t) \in L_2(0, \pi)$. Тогда

$$\int_0^{\pi} k(x-t) f(t) dt = i2^{\sigma-1} e^{-i\frac{\sigma}{2}x} \sum_{n=-\infty}^0 \frac{\Gamma(\sigma-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(\sigma)} e^{2inx} \cdot \\ \cdot \int_0^{\pi} e^{-2int + i\frac{\sigma}{2}t} f(t) dt - i2^{\sigma-1} e^{i\frac{\sigma}{2}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\sigma)} e^{2inx} \cdot \\ \cdot \int_0^{\pi} e^{-2in-t - i\frac{\sigma}{2}t} f(t) dt.$$

Учитывая асимптотику $\frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)} \sim n^{\sigma-1}$, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \left| \int_0^{\pi} e^{-2int + i\frac{\sigma}{2}t} f(t) dt \right|^2 \left(\frac{\Gamma(\sigma-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(\sigma)} \right)^2 |n|^{2(1-\sigma)} < \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} e^{-2in-t - i\frac{\sigma}{2}t} f(t) dt \right|^2 \left(\frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\sigma)} \right)^2 n^{2(1-\sigma)} < \infty.$$

Следовательно

$$g(x) = \int_0^{\pi} k(x-t) f(t) dt \in B_2^{1-\sigma}(0, \pi).$$

Заметим, что

$$\left| \left(2n - \frac{\sigma}{2} \right) - 2n \right| \leq \frac{\sigma}{2} < \frac{1}{2}, \quad n = -1, -2, \dots$$

и

$$\left| \left(2n + \frac{\sigma}{2} \right) - 2n \right| \leq \frac{\sigma}{2} < \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, система (в силу теоремы Левинсона)

$$\left\{ e^{2inx - i\frac{\sigma}{2}x} \right\}_{n=-\infty}^{-1} \cup \left\{ e^{2inx + i\frac{\sigma}{2}x} \right\}_{n=0}^{\infty} \quad (11)$$

полна и минимальна в $L_2(0, \pi)$. Из соотношения

$$\left| \frac{1 - \left(\frac{2x}{\sigma}\right)^2}{\Gamma\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{\sigma}{4}\right) \Gamma\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{\sigma}{4}\right)} \right| \sim |x|^{-1-\frac{\sigma}{2}}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

в силу теорем 3 и 4, следует, что система

$$\{e^{2inx - i\frac{\sigma}{2}x}\}_{n=-\infty}^0 \cup \{e^{2inx + i\frac{\sigma}{2}x}\}_{n=0}^{\infty} \quad (12)$$

полна и минимальна в $B_2^{1-\sigma}(0, \pi)$. Следовательно, $g(x) \in B_2^{1-\sigma}(0, \pi)$ можно разложить в ряд

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^0 a_n e^{2inx - i\frac{\sigma}{2}x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2inx + i\frac{\sigma}{2}x}.$$

Тогда наше уравнение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} i2^{\sigma-1} \sum_{n=-\infty}^0 \frac{\Gamma(\sigma-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(\sigma)} e^{2inx - i\frac{\sigma}{2}x} \int_0^{\pi} e^{-2int + i\frac{\sigma}{2}t} f(t) dt - \\ - i2^{\sigma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\sigma)} e^{2inx + i\frac{\sigma}{2}x} \int_0^{\pi} e^{-2int - i\frac{\sigma}{2}t} f(t) dt = \\ = \sum_{n=-\infty}^0 a_n e^{2inx - i\frac{\sigma}{2}x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2inx + i\frac{\sigma}{2}x}. \end{aligned}$$

В силу минимальности системы (12) в $B_2^{1-\sigma}(0, \pi)$ имеем

$$\begin{aligned} a_n &= i2^{\sigma-1} \frac{\Gamma(\sigma-n)}{\Gamma(1-n)\Gamma(\sigma)} \int_0^{\pi} e^{-2int + i\frac{\sigma}{2}t} f(t) dt, \quad n=0, -1, \dots, \\ b_n &= -i2^{\sigma-1} \frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\sigma)} \int_0^{\pi} e^{-2int - i\frac{\sigma}{2}t} f(t) dt, \quad n=0, 1, \dots. \end{aligned}$$

Из этих соотношений и в силу полноты системы (11) в $L_2(0, \pi)$ следует, что наше уравнение имеет единственное решение в $L_2(0, \pi)$.

Воспользовавшись формулой Рамануджана [6], стр. 245

$$\int_0^{\pi} e^{izt} \sin^{\alpha} t dt = \frac{\pi \Gamma(1+\alpha) e^{i\frac{\pi z}{2}}}{2^{\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \alpha > -1.$$

можно построить системы, биортогональные к системам (11) и (12). Сначала рассмотрим систему (11). Заметим, что функции

$$h_n(x) = -\left(\frac{d}{dx} + i\frac{\sigma}{2}\right) \int_0^x e^{-i\left(2n + \frac{\sigma}{2}\right)(x-t)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} t dt, \quad n \geq 0$$

ортогональна всем функциям системы (11), кроме $e^{i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)x}$, причем

$$\int_0^{\pi} e^{i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)x} h_n(x) dx = \frac{\pi \Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right) n!}{2^{\sigma/2} \Gamma\left(1+n+\frac{\sigma}{2}\right)} e^{i\frac{\pi\sigma}{4}}, n \geq 0.$$

Функция

$$h_n(x) = -\left(\frac{d}{dx} + i\frac{\sigma}{2}\right) \int_0^x e^{-i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)(x-t)} \sin \frac{\sigma}{2} t dt, n \leq 0$$

ортогональна всем функциям системы (11), кроме $e^{i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)x}$, причем

$$\int_0^{\pi} e^{i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)x} h_n(x) dx = \frac{\pi \Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right) (n-1)!}{2^{\sigma/2} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}-n\right)} e^{-i\frac{\pi\sigma}{4}}, n \leq 0.$$

Теперь рассмотрим систему (12). Заметим, что при $n \geq 0$ функция

$$h_n^+(x) = -i\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\sigma^2}{4}\right) \int_0^x e^{-i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)(x-t)} \sin \frac{\sigma}{2} t dt, n \geq 0$$

ортогональна всем функциям системы (12), кроме $e^{i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)x}$, причем

$$\int_0^{\pi} e^{i\left(2n+\frac{\sigma}{2}\right)x} h_n^+(x) dx = \frac{2\pi \Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right) n!}{2^{\sigma/2} \Gamma\left(n+\frac{\sigma}{2}\right)} e^{i\frac{\pi\sigma}{4}}, n \geq 0.$$

Аналогично, при $n \geq 0$ имеем

$$h_n^-(x) = -i\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\sigma^2}{4}\right) \int_0^x e^{-i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)(x-t)} \sin \frac{\sigma}{2} t dt, n \leq 0.$$

и

$$\int_0^{\pi} e^{i\left(2n-\frac{\sigma}{2}\right)x} h_n^-(x) dx = -\frac{2\pi \Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right) (-n)!}{2^{\sigma/2} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}-n\right)} e^{-i\frac{\pi\sigma}{4}}, n \leq 0.$$

Далее, имеем

$$b_n = \frac{2^{\sigma/2} \Gamma\left(n+\frac{\sigma}{2}\right)}{2\pi \Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right) n!} e^{-i\frac{\pi\sigma}{4}} \int_0^{\pi} h_n^+(x) g(x) dx, n \geq 0,$$

$$a_n = - \frac{2^{\sigma/2} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2} - n\right)}{2\pi \Gamma\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) (-n)!} e^{i\frac{\pi\sigma}{4}} \int_0^\pi h_n^-(x) g(x) dx, \quad n \leq 0.$$

Следовательно, при $n \leq 0$ имеем

$$\int_0^\pi e^{-i\left(2n - \frac{\sigma}{2}\right)t} f(t) dt = - \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma\left(\frac{\sigma}{2} - n\right)}{2^{\sigma/2} \pi i \Gamma\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \Gamma(\sigma - n)} e^{i\frac{\pi\sigma}{4}} \int_0^\pi h_n^-(x) g(x) dx.$$

Аналогично, при $n \geq 0$

$$\int_0^\pi e^{-i\left(2n + \frac{\sigma}{2}\right)t} f(t) dt = - \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma\left(\frac{\sigma}{2} + n\right)}{2^{\sigma/2} \pi i \Gamma\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \Gamma(\sigma + n)} e^{-i\frac{\pi\sigma}{4}} \int_0^\pi h_n^+(x) g(x) dx$$

Окончательно для $\bar{f}(t)$ мы получаем формулу:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2^{\sigma/2} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2} - n\right)}{\pi \Gamma\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) (-n-1)!} e^{i\frac{\pi\sigma}{4}} h_n(x) \int_0^\pi e^{i\left(2n - \frac{\sigma}{2}\right)t} \bar{f}(t) dt + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\sigma/2} \Gamma\left(1 + n + \frac{\sigma}{2}\right)}{\pi \Gamma\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) n!} e^{-i\frac{\pi\sigma}{4}} h_n(x) \int_0^\pi e^{i\left(2n + \frac{\sigma}{2}\right)t} \bar{f}(t) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma^2\left(\frac{\sigma}{2} - n\right)}{\pi^2 i \Gamma^2\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \Gamma(\sigma - n) (-n-1)!} h_n(x) \int_0^\pi h_n^-(t) g(t) dt + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 + n + \frac{\sigma}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{\sigma}{2}\right) \Gamma(\sigma)}{\pi^2 i \Gamma^2\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \Gamma(\sigma + n) n!} h_n(x) \int_0^\pi h_n^+(t) g(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} f(x) &= - \frac{\Gamma(\sigma)}{\pi^2 i \Gamma^2\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\sigma}{2} - n\right)}{\Gamma(\sigma - n) (-n-1)!} \left(i \frac{\sigma}{2} - \frac{d}{dx} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^x e^{i\left(2n - \frac{\sigma}{2}\right)(x-t)} \sin \frac{\sigma}{2} t dt. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int_0^{\pi} \left[\left(-i \frac{d^2}{dy^2} - i \frac{\sigma^2}{4} \right) \int_0^y e^{-l \left(2n - \frac{\sigma}{2} \right) (y-s)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} s \, ds \right] g(y) \, dy + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma \left(1 + n + \frac{\sigma}{2} \right) \Gamma \left(n + \frac{\sigma}{2} \right)}{\Gamma(\sigma + n) n!} \left(i \frac{\sigma}{2} - \frac{d}{dx} \right) \int_0^{\pi} e^{l \left(2n + \frac{\sigma}{2} \right) (x-t)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} t \, dt \cdot \\
& \cdot \int_0^{\pi} g(y) \left(-i \frac{d^2}{dy^2} - i \frac{\sigma^2}{4} \right) \int_0^y e^{-l \left(2n + \frac{\sigma}{2} \right) (y-s)} \sin^{\frac{\sigma}{2}} s \, dy \, ds = \\
& = \frac{\Gamma(\sigma)}{\pi^2 \Gamma^2 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right)} \left(i \frac{\sigma}{2} - \frac{d}{dx} \right) \int_0^{\pi} \sin^{\frac{\sigma}{2}} t \cdot \int_0^{\pi} g(y) \left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\sigma^2}{4} \right) \int_0^y \sin^{\frac{\sigma}{2}} s \cdot \\
& \cdot \left(e^{-l \frac{\sigma}{2} (x+s-y-t)} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\Gamma^2 \left(\frac{\sigma}{2} - n \right)}{\Gamma(\sigma - n) (-n-1)!} e^{2ln(x+s-y-t)} + \right. \\
& \left. + e^{l \frac{\sigma}{2} (x+s-y-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma \left(1 + n + \frac{\sigma}{2} \right) \Gamma \left(n + \frac{\sigma}{2} \right)}{\Gamma(\sigma + n) n!} e^{2ln(x+s-y-t)} \right) ds \, dy \, dt.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись интегральным представлением для гипергеометрической функции, получим

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\Gamma(\sigma)}{\pi^2 \Gamma \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) \Gamma \left(\frac{\sigma}{2} \right)} \left(i \frac{\sigma}{2} - \frac{d}{dx} \right) \int_0^{\pi} g(y) \left(\frac{\sigma^2}{4} - \frac{d^2}{dy^2} \right) \cdot \\
& \cdot \left(\int_0^x \int_0^y \int_0^1 \frac{\sin^{\frac{\sigma}{2}} t \sin^{\frac{\sigma}{2}} s}{(u-u^2)^{1-\frac{\sigma}{2}}} \left(\frac{u e^{-l \left(2 + \frac{\sigma}{2} \right) (x+s-y-t)}}{(1-u e^{-2l(x+s-y-t)})^{1+\frac{\sigma}{2}}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{e^{l \frac{\sigma}{2} (x+s-y-t)}}{(1-u e^{2l(x+s-y-t)})^{1+\frac{\sigma}{2}}} \right) ds \, dt \, du.
\end{aligned}$$

На правую часть следует наложить ограничение

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\sigma) 2^{\frac{\sigma}{2}} i}{\pi \Gamma^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right)} \int_0^{\pi} e^{l \frac{\sigma}{2} x} \left(\frac{d}{dx} - i \frac{\sigma}{2} \right) \int_0^{\pi} g(y) \left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\sigma^2}{4} \right) \left(\int_0^x \int_0^y \int_0^1 \frac{\sin^{\frac{\sigma}{2}} t \sin^{\frac{\sigma}{2}} s}{(u-u^2)^{1-\frac{\sigma}{2}}} \cdot \right. \\
& \cdot \left(\frac{u e^{-l \left(2 + \frac{\sigma}{2} \right) (x+s-y-t)}}{(1-u e^{-2l(x+s-y-t)})^{1+\frac{\sigma}{2}}} + \frac{e^{l \frac{\sigma}{2} (x+s-y-t)}}{(1-u e^{2l(x+s-y-t)})^{1+\frac{\sigma}{2}}} \right) ds \, dt \, du \, dy =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\sigma}{2} y - i \frac{\cos y}{\sin \frac{\sigma}{2} y} \right) g(y) dy.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19. XI. 1985

Ա. Ա. ՎԱԳԱՐՇԱԿՅԱՆ. Վիներ-Հոփի խնդրած հավասարումների լուծման մի նոր մեթոդի (ամփոփում)

Հաղվածում առաջարկվում է Վիներ-Հոփի խնդրած հավասարումների լուծման մի նոր մեթոդ: Քննարկվում է այդ մեթոդը կիրառելու հնարավորության հարցը: Վերջին պարագրաֆում, կոնկրետ օրինակի վրա, ցույց է տրվում, թե ինչպես այդ մեթոդի օգնությամբ կարելի է բերել լուծումը ներկայացնող կոնկրետ բանաձևեր:

A. A. VAGHARSHAKIAN. On a new method of solving the truncated Wiener—Hopf equations (summary)

A method for solving the truncated Wiener—Hopf equations is proposed and discussed. The last section contains an example where the method yields explicit formulae for the solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Сахнович. Уравнения с разностным ядром на конечном стрелке, УМН, 35, вып. 4 (214), 1980, 69—129.
2. А. М. Седлецкий. Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси, УМН, 37, вып. 5 (227), 1982, 51—95.
3. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области, Изд-во «Наука», М., 1964.
4. Б. Я. Левин. Распределение жорней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
5. А. Ф. Леонтьев. Ряды экспонент, Изд-во «Наука», М., 1976.
6. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948.