УДК 517. 53/57

Г. М. АЙРАПЕТЯН

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ СО СМЕЩЕНИЕМ
 В КЛАССЕ L^1

1°. Пусть G^+ — некоторая область на комплексной плоскости, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова Γ , а G^- — дополнение множества $G^+ \cup \Gamma$.

Обозначим через $H(\Omega)$ класс функций, определенных на множестве Ω и удовлетворяющих условию Гельдера.

Пусть, далее, $\alpha(t)$ — заданная на Γ непрерывная функция, которая удовлетворяет следующим условиям.

а) $\alpha(t)$ — взаимнооднозначно отображает Γ на себя, сохраняя ориентацию;

б) производная $\alpha'(t) = d\alpha(t)/dt$ отлична от нуля для всех $t \in \Gamma$ и принадлежит классу $H(\Gamma)$.

Как известно (см. монографию Н. И. Muskhelishvili [1]), граничной задачей сопряжения со смещением называется следующая задача.

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с линией скачков Γ , имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(\alpha(t)) - D(t)\Phi^-(t) = f(t) \quad \text{на } \Gamma, \quad (1)$$

где $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — сужения функции $\Phi(z)$, соответственно, на G^+ и G^- , $D(t)$ и $f(t)$ — некоторые функции, заданные на Γ , а $\alpha(t)$ удовлетворяет вышеуказанным условиям а) и б).

В случае, когда $f(t)$ и $D(t)$ из класса $H(\Gamma)$ и $D(t) \neq 0$, эта задача полностью исследована в работе Д. А. Кваселава [2] (см. также [1]). Там же установлено, что эта задача разрешима в классе функций $\Phi(z)$ таких, что $\Phi^+(z) \in H(G^+ \cup \Gamma)$ и $\Phi^-(z)$ есть сумма функций, одна из которых принадлежит классу $H(G^- \cup \Gamma)$, а другая — некоторый полином.

В случае, когда $f(t) \in L^p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$), задача рассмотрена в работе И. Б. Симоненко [3]. Им установлено, что решение этой задачи можно представить в виде интеграла типа Коши от функций из класса $L^p(\Gamma)$.

Краевые задачи со сдвигом Карлемана в классах $H(\Gamma)$ исследованы в работе Д. А. Кваселава [4].

Более общие краевые задачи в классах L^p ($1 < p < \infty$) и $H(\Gamma)$ со сдвигом Карлемана исследованы Г. С. Литвинчуком и его учениками. Подробные результаты в этом направлении изложены в монографии [5].

2° В настоящей работе рассматривается задача (1) в том случае, когда $f(t) \in L^p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$). Для формулировки задачи введем некоторые обозначения. Пусть D^+ — единичный круг на комплексной плоскости, T — единичная окружность, а D^- — область $|z| > 1$. Обозначим через $\zeta = \omega(z)$ и $\zeta = \mu(z)$ ($\mu(\infty) = \infty$) функции, конформно отображающие области D^+ и D^- , соответственно, на G^+ и G^- . Для любого r ($0 < r < 1$) положим

$$\lambda_r(z) = \omega(r\omega^{-1}(z)), \quad \text{при } z \in G^+,$$

$$\lambda_{r^{-1}}(z) = \mu(r^{-1}\mu^{-1}(z)), \quad \text{при } z \in G^-.$$

Через $K^p(\Gamma)$ обозначим класс функций, голоморфных в $G^+ \cap G^-$ и представимых в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(t)}{t-z} dt, \quad \text{при } z \in G^+,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_2(t)}{t-z} dt + P(z), \quad \text{при } z \in G^-,$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ принадлежат классу $L^p(\Gamma)$, а $P(z)$ — произвольный полином.

Теперь под задачей сопряжения со смещением в $L^p(\Gamma)$ ($1 \leq p < \infty$) будем понимать следующую задачу.

Задача А. Найти голоморфную в $G^+ \cup G^-$ функцию $\Phi(z)$, обращаемую в нуль на бесконечности по граничному условию

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - D(t)\Phi^-(\lambda_{r^{-1}}(t)) - f(t)\|_p = 0, \quad (2)$$

где $f(t) \in L^p(\Gamma)$, а $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L^p(\Gamma)$.

При решении задачи сопряжения в классах $L^p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$) важную роль играет тот факт, что интеграл типа Коши порождает ограниченный оператор в $L^p(\Gamma)$. Аналогичное утверждение верно и для пространств $H^p(\Gamma)$ при $\mu \in (0, 1]$.

В случае $p=1$ это утверждение неверно. При $f \in L^1(\Gamma)$ решение граничной задачи сопряжения также записывается в виде интеграла типа Коши, однако его граничные значения не всегда принадлежат классу $L^1(\Gamma)$. Поэтому в этом случае меняется и постановка задачи и метод исследования. При помощи интеграла типа Коши строятся другие интегральные операторы, которые уже являются ограниченными в $L^1(\Gamma)$.

В настоящей работе описываются все решения задачи А, когда функции $\alpha'(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$ и $\mu'(\zeta)$ удовлетворяют условию Липшица, а функция $D(t)$ принадлежит классу $H(\Gamma)$ и $D(t) \neq 0$. Доказывается также, что все решения этой задачи принадлежат классу $K^p(\Gamma)$. В случае $f(t) \in L^p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$) или $f(t) \in H(\Gamma)$, полученные результаты сов-

падают с известными результатами, несмотря на то, что постановка (2) является более общей.

§ 1. Предварительные сведения и леммы

1.1. Рассмотрим в классе $L^p(\Gamma)$ ($1 \leq p < \infty$) уравнение Фредгольма типа

$$K\varphi \equiv \varphi(\tau) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} k(\tau, t) \varphi(t) dt = g(\tau), \quad (4)$$

где $g(\tau) \in L^p(\Gamma)$ и ядро $k(\tau, t)$ имеет вид

$$k(\tau, t) = \frac{1}{\tau - t} \frac{a'(\tau)}{a(\tau) - a(t)}. \quad (5)$$

Лемма 1. Уравнение (4) однозначно разрешимо в классе $L^p(\Gamma)$ ($1 \leq p < \infty$) и имеет место оценка

$$\|\varphi\|_p \leq C_p \|g\|_p, \quad (6)$$

где C_p — постоянная, не зависящая от $g(t)$.

Доказательство. Так как $a(t)$ удовлетворяет условиям а) и б), то легко проверить, что ядро $k(\tau, t)$ можно представить в виде

$$k(\tau, t) = \frac{k_0(\tau, t)}{|\tau - t|^\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

где $k_0(\tau, t) \in H(\Gamma)$. Известно, что при $g \in H(\Gamma)$ уравнение (4) однозначно разрешимо в классе $H(\Gamma)$. Ясно, что при $g(t) \equiv 0$ любое решение задачи (4) принадлежит классу $H(\Gamma)$. Из однозначной разрешимости этого уравнения в $H(\Gamma)$ следует, что в этом случае $\varphi(t) \equiv 0$. Поэтому уравнение (4) однозначно разрешимо в $L^p(\Gamma)$.

Из теории уравнений Фредгольма известно, что решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi(\tau) = g(\tau) + \int_{\Gamma} \gamma(\tau, t) g(t) dt, \quad (7)$$

где ядро $\gamma(\tau, t)$ имеет представление вида

$$\gamma(\tau, t) = \frac{\gamma_0(\tau, t)}{|\tau - t|^\lambda} \quad (0 < \lambda < 1), \quad \gamma_0(\tau, t) \in H(\Gamma).$$

Теперь из формулы (7) непосредственно следует оценка (6).

Лемма 2. Пусть $\Phi(z) \in K^p(\Gamma)$, а $\psi(z)$ — некоторая голоморфная функция на G^+ , принадлежащая классу $H(G^+ \cup \Gamma)$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\Gamma} |\Phi^+(\lambda_r(t)) \psi(\lambda_r(t)) - \Phi^+(\lambda_r(t)) \psi(t)|^p |dt| = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\Gamma} |\Phi^+(\lambda_r(a(t)) \psi(\lambda_r(a(t))) - \Phi^+(\lambda_r(a(t)) \psi(a(t)))|^p |dt| = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Так как $\Phi(z) \in K^p(\Gamma)$, то существует $f_1(t) \in L^p(\Gamma)$ такая, что

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(t)}{t-z} dt.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |\Phi^+(\lambda_r(\tau))|^p |d\tau| &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \int_{\Gamma} \frac{f_1(t)}{t-\lambda_r(\tau)} dt \right|^p |d\tau| \leq \\ &\leq C_1 \int_{\Gamma} |f_1(t)|^p \int_{\Gamma} \frac{|d\tau|}{|t-\lambda_r(\tau)|} |dt|. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как якобиан преобразования $\tau = \omega(\zeta)$ отличен от нуля, то

$$|\omega(\zeta) - \omega(r\zeta)| \geq c |\zeta - r\zeta|.$$

Делая замену переменной $\tau = \omega(\zeta)$, получим

$$\int_{\Gamma} \frac{|d\tau|}{|t-\lambda_r(\tau)|} = \int_{\Gamma} \frac{|\omega'(\zeta)| |d\zeta|}{|\omega(\zeta) - \omega(r\zeta)|} \leq C_2 \int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - r\zeta|} = C_2 \ln \frac{1}{1-r}.$$

Следовательно

$$\int_{\Gamma} |\Phi^+(\lambda_r(\tau))|^p |d\tau| \leq A \ln \frac{1}{1-r}.$$

Теперь, так как $\psi(z) \in H(G^+ \cup \Gamma)$, то существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|\psi(\lambda_r(t)) - \psi(t)| < A_1(1-r)^\delta.$$

Сопоставляя эти неравенства, получим

$$\int_{\Gamma} |\Phi^+(\lambda_r(t)) \psi(\lambda_r(t)) - \Phi^+(\lambda_r(t)) \psi(t)|^p |dt| \leq C(1-r)^\delta \ln \frac{1}{1-r}.$$

Тем самым, первое соотношение леммы доказано. Второе соотношение следует из первого, если заменить t на $\alpha(t)$.

1.2. Приведем некоторые сведения из теории классов E^p — Смирнова (см. [6]). Как известно, голоморфная в G^+ функция $F(z)$ принадлежит классу E^p ($0 < p < \infty$) (или $E^p(G^+)$), если

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(\omega(re^{i\theta}))|^p |\omega'(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

Хорошо известно, что функции класса $E^p(G^+)$ при $1 \leq p < \infty$ можно представить в виде интеграла типа Коши от некоторой функции из класса $L^p(\Gamma)$.

Соответственно, будем говорить, что $F_1(z) \in E^p(G^-)$, если $F_1(z)$ аналитична в G^- и

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \int_{-\pi}^{\pi} |F_1(\mu(re^{i\theta}))|^p |\mu'(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

Функции класса $E^p(G^-)$ при $1 < p < \infty$ также можно представить в виде интеграла типа Коши, если $F_1(\infty) = 0$.

Лемма 3. Пусть $Y(z)$ — голоморфная на $G^+ \cup G^-$ функция, удовлетворяющая условиям:

а) $Y(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности.

б) $Y^+(z) \in H(G^+ \cup \Gamma)$, $Y^-(z) = Y_1^-(z) + Q(z)$,

где $Q(z)$ — главная часть функции $Y(z)$ на бесконечности, а $Y_1^-(z) \in H(G^- \cup \Gamma)$.

Тогда для любой функции $\Phi(z) \in K^p(\Gamma)$, $Y(z)\Phi(z) \in K^p(\Gamma)$.

Доказательство. Так как $\Phi(z) \in K^p(\Gamma)$, то

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(t)}{t-z} dt, \quad z \in G^+,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_2(t)}{t-z} dt + P(z), \quad z \in G^-,$$

где $f_1(t), f_2(t) \in L^p(\Gamma)$, а $P(z)$ — главная часть функции $\Phi(z)$ на бесконечности. Положим $F(z) = Y(z)\Phi(z)$, будем иметь $F^+(z) = Y^+(z)\Phi^+(z)$, $F^-(z) = Y^-(z)\Phi^-(z)$. Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \frac{Y^+(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(t)}{t-z} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Y^+(t)f_1(t)}{t-z} dt - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Y^+(t) - Y^+(z)}{t-z} f_1(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как $Y^+(t)f_1(t) \in L^p(\Gamma)$, то нужно доказать, что второе слагаемое в (10) можно представить в виде интеграла типа Коши. Но используя неравенство

$$\left| \frac{Y^+(t) - Y^+(z)}{t-z} \right| \leq \frac{C}{|t-z|^\lambda} \quad (0 < \lambda < 1),$$

легко проверить, что второе слагаемое в (10) принадлежит классу $E^p(G^+)$ и, следовательно, $Y^+(z)\Phi^+(z)$ есть интеграл типа Коши от некоторой функции из класса $L^p(\Gamma)$.

Аналогичное утверждение можно доказать и для функции $F^-(z)$.

§ 2. Некоторые свойства решения задачи А

2.1. Приведем некоторые сведения из теории граничных задач со смешением (см. [1]), когда правая часть принадлежит классу $H(\Gamma)$. Однородная граничная задача тогда принимает следующий вид:

$$\Phi^+(z(t)) - D(t)\Phi^-(t) = 0, \quad t \in \Gamma. \quad (11)$$

Хорошо известно, что при решении граничной задачи (1) важную роль играет каноническое решение соответствующей однородной задачи (11). Оно определяется по формуле

$$X(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\chi(\beta(t))}{t-z} dt \right\}, \quad \text{при } z \in G^+,$$

$$X(z) = z^{-1} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\chi(t)}{t-z} dt \right\}, \quad \text{при } z \in G^-,$$

где χ — индекс функции $D(t)$, $\chi(t)$ — решение уравнения $K\chi = \ln[t^{-1}D(t)]$, а $\beta(t)$ — функция обратная $\alpha(t)$.

Общее решение граничной задачи (1), имеющее конечный порядок на бесконечности, дается формулой

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\beta(t))}{t-z} dt, \quad \text{при } z \in G^+, \\ \Phi(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + X(z)P(z), \quad \text{при } z \in G^-, \end{aligned} \quad (12)$$

где $P(z)$ — произвольный полином, $X(z)$ — каноническое решение, а $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$K\varphi = P(t) + \frac{f(t)}{X^+(\alpha(t))}.$$

2.2. Теорема. 1. Если $\Phi(z)$ — решение задачи A и $f(t) \in L^p(\Gamma)$ ($1 \leq p < \infty$), то $\Phi(z) \in K^p(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть $f_r(t)$ — последовательность функций из $H(\Gamma)$ такая, что $\|f_r(t) - f(t)\|_p \rightarrow 0$, при $r \rightarrow 1 - 0$. Задачу A можно записать в следующем виде:

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\Gamma} |\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - D(t)\Phi^-(\lambda_r^{-1}(t)) - f_r(t)|^p |dt| = 0. \quad (13)$$

Обозначив

$$F_r(t) = \Phi_r^+(\alpha(t)) - D(t)\Phi_r^-(t) - f_r(t),$$

где

$$\Phi_r^+(z) = \Phi^+(\lambda_r(z)), \quad \Phi_r^-(z) = \Phi^-(\lambda_r^{-1}(z)),$$

получим уравнение относительно $\Phi_r^+(z)$ и $\Phi_r^-(z)$:

$$\Phi_r(\alpha(t)) - D(t)\Phi_r^-(t) = F_r(t) - f_r(t). \quad (14)$$

Так как $F_r(t) - f_r(t) \in H$ на Γ , то согласно (12) решение этого уравнения записывается так:

$$\Phi_r^+(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi_r(\beta(t))}{t-z} dt, \quad (15)$$

$$\Phi_r^-(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi_r(t)}{t-z} dt + X(z) P_r(z), \quad (15)$$

где $X(z)$ —каноническое решение задачи (11), $P_r(z)$ —главная часть функции $\Phi_r(z) (X(z))^{-1}$ на бесконечности, а $\psi_r(t)$ —решение уравнения

$$K\psi = P_r(t) - \frac{F_r(t) - f_r(t)}{X^+(z(t))}.$$

Обновив главную часть функции $\Phi(z) (X(z))^{-1}$ на бесконечности через $P(z)$, будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|P_r - P\|_p = 0$$

и, следовательно

$$P_r(t) - \frac{F_r(t) - f_r(t)}{X^+(z(t))} \rightarrow P(t) - \frac{f(t)}{X^+(z(t))}, \text{ при } r \rightarrow 1-0$$

по метрике $L^p(\Gamma)$. Пусть $\psi(t)$ —решение уравнения

$$K\psi = P(t) - \frac{f(t)}{X^+(z(t))}.$$

Из леммы 1 при $r \rightarrow 1-0$ имеем

$$\|\psi_r(t) - \psi(t)\|_p \rightarrow 0.$$

Теперь, устремив r к $1-0$, из (15) получаем

$$\Phi^+(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\beta(t))}{t-z} dt, \quad (16)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(t)}{t-z} dt + X(z) P(z).$$

Применяя лемму 3, завершаем доказательство теоремы.

Из доказательства теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть $f(t) \in H(\Gamma)$. Тогда решение граничной задачи A , имеющее конечный порядок на бесконечности, дается формулой (16), где $\psi(t) \in H(\Gamma)$.

Для случая, когда $D(t) \equiv 1$, справедлива

Теорема 3. Если голоморфная в $G^+ \cup G^-$ и равная нулю на бесконечности функция $\Phi(z)$ удовлетворяет граничному условию

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\Gamma} |\Phi^+(\lambda_r(\sigma(t))) - \Phi^-(\lambda_r^{-1}(t))|^p |dt| = 0,$$

то $\Phi(z) \equiv 0$.

§ 3. Исследование задачи A

3.1. Пусть $t = \lambda(u)$, ($u_0 \leq u \leq u_1$)—параметрическое уравнение границы Γ . В дальнейшем будем предполагать, что функции $\lambda(u)$ и

$z(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по переменной $u \in [u_0, u_1]$. Из этого свойства функции $\lambda(u)$ будет следовать, в частности, что функции $\omega(\zeta)$ и $\mu(\zeta)$ удовлетворяют условиям

$$|\omega(\zeta_1) - \omega(\zeta_2)| < A |\zeta_1 - \zeta_2|, \quad |\mu(\zeta_1) - \mu(\zeta_2)| < A |\zeta_1 - \zeta_2|,$$

где $\zeta_1, \zeta_2 \in T$ — произвольные точки, а A — некоторая постоянная.

Для любого $\zeta \in T$ положим $\bar{z}(\zeta) = \omega^{-1}(z(\omega(\zeta)))$ и $\bar{\mu}(\zeta) = \mu^{-1}(\omega(\zeta))$. Учитывая свойства функций $z(t)$, $\omega(\zeta)$ и $\mu(\zeta)$, легко проверить, что $\bar{z}(\zeta)$ удовлетворяет условиям:

а) $\bar{z}(\zeta)$ взаимнооднозначно отображает T на себя, сохраняя ориентацию;

б) производная $\bar{z}'(\zeta) = d\bar{z}(\zeta)/d\zeta$ отлична от нуля и

$$|\bar{z}'(\zeta_1) - \bar{z}'(\zeta_2)| < C |\zeta_1 - \zeta_2|,$$

где C — некоторая постоянная. Аналогичные условия справедливы для $\bar{\beta}(\zeta)$.

Лемма 4. Для произвольных точек $\zeta, \xi \in T$ справедливы неравенства

$$|\bar{z}(\zeta) - r\bar{z}(\xi)| > c |\zeta - r\xi|,$$

$$|\bar{\beta}(\zeta) - r\bar{\beta}(\xi)| > c |\zeta - r\xi|,$$

где c не зависит от r .

Доказательство. Пусть r и θ — полярные координаты точки z .

Рассмотрим отображение $\zeta = r\lambda(\theta)$, где $\lambda(\theta) = \bar{z}(e^{i\theta})$. Обозначив через $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda_2(\theta)$ действительные и мнимые части функции $\lambda(\theta)$, для якобиана отображения $\zeta = r\lambda(\theta) = r\lambda_1(\theta) + ir\lambda_2(\theta)$ получим выражение

$$J(r, \theta) = r(\lambda_1(\theta)\lambda_2'(\theta) - \lambda_1'(\theta)\lambda_2(\theta)). \quad (17)$$

Так как $\lambda_1^2(\theta) + \lambda_2^2(\theta) = 1$, то

$$\lambda_1(\theta)\lambda_1'(\theta) + \lambda_2(\theta)\lambda_2'(\theta) = 0. \quad (18)$$

Учитывая теперь, что $\lambda'(\theta) = \lambda_1'(\theta) + i\lambda_2'(\theta) \neq 0$, из (18) будем иметь, что якобиан $J(r, \theta)$ нашего отображения отличен от нуля. Следовательно, первое неравенство леммы доказано. Второе неравенство доказывается аналогично.

Теперь для любых $\zeta, \xi \in T$ обозначим

$$H_r(\zeta; \xi) = \frac{\omega'(\bar{z}(\zeta))\bar{z}'(\zeta)}{\omega(\bar{z}(\zeta)) - \omega(r\bar{z}(\xi))} - \frac{\mu'(\bar{\beta}(\zeta))\bar{\beta}'(\zeta)}{\mu(\bar{\beta}(\zeta)) - \mu(r^{-1}\bar{\beta}(\xi))}.$$

Лемма 5. Для любого ζ и $\xi \in T$ справедлива оценка

$$|H_r(\zeta; \xi)| \leq C \left(\frac{1-r^2}{|\zeta - r\xi|^2} + 1 \right), \quad (19)$$

где C не зависит от r .

Доказательство. Для любого r ($0 < r < 1$) положим

$$S_r(\zeta; \xi) = \frac{\omega'(\tilde{\alpha}(\zeta)) \bar{\alpha}'(\zeta)}{\omega(\tilde{\alpha}(\zeta)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))} - \frac{1}{\zeta - r\xi},$$

$$\bar{S}_r(\zeta; \xi) = \frac{\mu'(\tilde{\beta}(\zeta)) \bar{\beta}'(\zeta)}{\mu(\tilde{\beta}(\zeta)) - \mu(r^{-1}\tilde{\beta}(\xi))} - \frac{1}{\zeta - r^{-1}\xi}.$$

Преобразуя функцию $S_r(\zeta; \xi)$, будем иметь

$$S_r(\zeta; \xi) = \frac{(\zeta - \xi) [\omega(\tilde{\alpha}(\zeta))]' - \xi(1-r) [\omega(\tilde{\alpha}(\zeta))]' - [\omega(\tilde{\alpha}(\zeta)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))]}{[\omega(\tilde{\alpha}(\zeta)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))](\zeta - r\xi)}.$$

Числитель этого выражения запишем в следующем виде:

$$J_r(\zeta; \xi) = \int_{\xi}^{\zeta} \{ [\omega(\tilde{\alpha}(\lambda))]' - [\omega(\tilde{\alpha}(\lambda))]' \} d\lambda - \\ - \xi(1-r) [\omega(\tilde{\alpha}(\zeta))]' + [\omega(\tilde{\alpha}(\xi)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))].$$

Ясно, что

$$\left| \int_{\xi}^{\zeta} | [\omega(\tilde{\alpha}(\lambda))]' - [\omega(\tilde{\alpha}(\lambda))]' | d\lambda \right| \leq C_1 |\zeta - \xi|^2$$

и

$$|\omega(\tilde{\alpha}(\xi)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))| \leq C_2 (1 - r^2),$$

где C_1 и C_2 — постоянные, не зависящие от r . Следовательно

$$|J_r(\zeta; \xi)| \leq A(|\zeta - \xi|^2 + (1 - r^2)) \leq B(|\zeta - r\xi|^2 + (1 - r^2)). \quad (20)$$

Теперь, так как якобиан отображения $\omega(z)$ отличен от нуля, то из леммы 4 будем иметь

$$|\omega(\tilde{\alpha}(\zeta)) - \omega(r\tilde{\alpha}(\xi))| \geq c_3 |\tilde{\alpha}(\zeta) - r\tilde{\alpha}(\xi)| > c_4 |\zeta - r\xi|,$$

так что

$$|S_r(\zeta; \xi)| < C \left(\frac{1 - r^2}{|\zeta - r\xi|^2} + 1 \right). \quad (21)$$

Аналогичным образом можно доказать, что оценка (21) верна и для функции $\bar{S}_r(\zeta; \xi)$.

Теперь доказательство леммы следует из равенств

$$H_r(\zeta; \xi) = S_r(\zeta; \xi) + \bar{S}_r(\zeta; \xi) + \frac{1}{\zeta - r\xi} - \frac{1}{\zeta - r^{-1}\xi},$$

$$\left| \frac{1}{\zeta - r\xi} - \frac{1}{\zeta - r^{-1}\xi} \right| = \frac{1 - r^2}{|\zeta - r\xi|^2}.$$

Лемма 6. Для любой функции $f(\zeta) \in L^p(\Gamma)$ ($1 \leq p < \infty$) имеет место неравенство

$$\int_{\Gamma} \left| \int_{\Gamma} H_r(\zeta; \xi) f(\zeta) d\zeta \right|^p |d\xi| \leq A \|f\|_p^p,$$

где A не зависит от r .

Доказательство. Согласно оценке (19) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left| \int_{\Gamma} H_r(\zeta; \xi) f(\zeta) d\zeta \right|^p |d\xi| &\leq C \|f\|_p^p + \\ &+ C \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} \frac{1 - r^2}{|\zeta - r\xi|^2} |f(\zeta)| |d\zeta| \right)^p |d\xi|. \end{aligned}$$

Теперь остается учесть (см., напр., [7]), что для любого p ($1 \leq p < \infty$)

$$\int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} \frac{1 - r^2}{|\zeta - r\xi|^2} |f(\zeta)| |d\zeta| \right)^p |d\xi| \leq B \|f\|_p^p,$$

где B — постоянная, не зависящая от r .

3.2. Рассмотрим задачу A , когда $D(t) \equiv 1$:

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - \Phi^-(\lambda_r^{-1}(t)) - f(t)\|^p = 0. \quad (22)$$

Лемма 7. Пусть $f(t) \in L^p(\Gamma)$. Тогда решение граничной задачи (22), равное нулю на бесконечности, имеет вид

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\beta(t))}{t - z} dt, \quad (23)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(t)}{t - z} dt.$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения $K\psi = f(t)$, а $\beta(t)$ — функция, обратная $\alpha(t)$.

Доказательство. Единственность решения задачи (22) следует из теоремы 3. Пусть теперь $f_n(t) \in H(\Gamma)$ и $f_n(t) \rightarrow f(t)$ по метрике $L^p(\Gamma)$. Для каждой функции $f_n(t)$ рассмотрим граничную задачу

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) = f_n(t). \quad (24)$$

Решение этой задачи, согласно (12), имеет вид

$$\Phi_n^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi_n(\beta(t))}{t - z} dt,$$

$$\Phi^{-}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi_n(t)}{t-z} dt,$$

где $\psi_n(t)$ — решение уравнения $K\psi = f_n(t)$.

Из (23) имеем

$$\begin{aligned} \Phi^{+}(\lambda_r(\alpha(t))) - \Phi^{-}(\lambda_{r^{-1}}(t)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\beta(\tau))}{\tau - \lambda_r(\alpha(t))} d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau)}{\tau - \lambda_{r^{-1}}(t)} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \lambda_r(\alpha(t))} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{\tau - \lambda_{r^{-1}}(t)} \right] \psi(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{\omega'(\tilde{\alpha}(\zeta)) \tilde{\alpha}'(\zeta)}{\omega(\tilde{\alpha}(\zeta)) - \lambda_r(\alpha(t))} - \right. \\ &- \left. \frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta) - \lambda_{r^{-1}}(t)} \right] \psi(\omega(\zeta)) d\zeta. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} |\Phi^{+}(\lambda_r(\alpha(t))) - \Phi^{-}(\lambda_{r^{-1}}(t)) - f(t)|^p |dt| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \int_{\gamma} H_r(\zeta; \xi) \psi(\omega(\zeta)) d\zeta - f(\omega(\xi)) \right|^p |\omega'(\xi)| |d\xi| \leq \\ &\leq A \left(\int_{\gamma} \left| \int_{\gamma} H_r(\zeta; \xi) [\psi(\omega(\zeta)) - \psi_n(\omega(\zeta))] d\zeta \right|^p |\omega'(\xi)| |d\xi| + \right. \\ &+ \int_{\gamma} \left| \int_{\gamma} H_r(\zeta; \xi) \psi_n(\omega(\zeta)) d\zeta - f_n(\omega(\xi)) \right|^p |\omega'(\xi)| |d\xi| + \\ &\left. + \int_{\gamma} |f_n(\omega(\xi)) - f(\omega(\xi))|^p |\omega'(\xi)| |d\xi| \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Применяя лемму 6 из (25), получим

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} |\Phi^{+}(\lambda_r(\alpha(t))) - \Phi^{-}(\lambda_{r^{-1}}(t)) - f(t)|^p |dt| \leq \\ &\leq C \left(\|\psi_n - \psi\|_p^p + \|f_n - f\|_p^p + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \int_{\gamma} H_r(\zeta; \xi) \psi_n(\omega(\zeta)) d\zeta - f_n(\omega(\xi)) \right|^p |\omega'(\xi)| |d\xi| \right). \quad (26) \end{aligned}$$

Так как функция $f_n(t)$ из класса Гельдера, то

$$\Phi_n^{+}(\lambda_r(\alpha(t))) - \Phi_n^{-}(\lambda_{r^{-1}}(t)) - f_n(t) \rightarrow 0, \text{ при } r \rightarrow 1 - 0,$$

равномерно на Γ . Следовательно

$$\int_{\Gamma} H_r(\zeta; \xi) \psi_n(\omega(\zeta)) d\zeta - f_n(\omega(\xi)) \rightarrow 0, \text{ при } r \rightarrow 1 - 0$$

равномерно на T . Тем самым последнее слагаемое в (26) стремится к нулю, когда $r \rightarrow 1 - 0$. Учитывая теперь лемму 1, завершаем доказательство леммы.

Из леммы 7 следует

Лемма 8. Для того, чтобы задача (22) имела решение в классе функций, удовлетворяющих условию

$$|\Phi(z)| < \text{const } |z|^{-n}, \quad n > 1, \quad z \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_{\Gamma} \psi(t) t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-2),$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения $K\psi = f(t)$.

3.3. Для каждого целого k обозначим через $\Phi_k(z)$ решение граничной задачи

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - \Phi^-(\lambda_{r-1}(t)) - t^k\|_p = 0,$$

равное нулю на бесконечности. Очевидно, что любая конечная система функций $\Phi_k(z)$ линейно независима.

Из леммы 7 следует также

Лемма 9. Общее решение задачи (22) в классе функций, удовлетворяющих условию

$$|\Phi^-(z)| < \text{const } |z|^n \quad (n \geq -1),$$

при $z \rightarrow \infty$, можно представить в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\beta(t))}{t-z} dt + \sum_{k=0}^n c_k \Phi_k^+(z),$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(t)}{t-z} dt + \sum_{k=0}^n c_k (z^k + \Phi_k^-(z)),$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения $K\psi = f(t)$, а $c_0, c_1, \dots, c_n$ — произвольные комплексные числа.

Доказательство. Представим $\Phi(z)$ в виде $\Phi^-(z) = \Psi^-(z) + P(z)$, где $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, а $\Psi^-(z)$, аналитична в G^- и $\Psi^-(\infty) = 0$. Тогда задачу (22) можно представить в виде

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - \Psi^-(\lambda_{r-1}(t)) - (f(t) + P(t))\|_p = 0.$$

Теперь остается применить лемму 7.

3.4. Пусть теперь

$$x = \frac{1}{2\pi} \left[\text{Arg } D(t) \right]_{\Gamma}$$

есть индекс функции $D(t)$. Положим $D_0(t) = t^{-\alpha} D(t)$. Так как индекс функции $D_0(t)$ равен нулю, то каноническое решение задачи

$$\Phi^+(\alpha(t)) - D_0(t) \Phi^-(t) = 0$$

имеет вид

$$X_0^+(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\chi(\beta(t))}{t-z} dt \right\},$$

$$X_0^-(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\chi(t)}{t-z} dt \right\}.$$
(27)

где $\chi(t)$ — решение уравнения $K\chi = \ln D_0(t)$. Так как

$$D_0(t) = \frac{X_0^+(z(t))}{X_0^-(t)},$$

то задачу A можем представить в виде

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - t^{\alpha} \frac{X_0^+(\alpha(t))}{X_0^-(t)} \Phi^-(\lambda_r^{-1}(t)) - f(t) \right\|_p = 0. \quad (28)$$

Теперь, учитывая теорему 1 и лемму 2, (28) запишем в виде

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \frac{\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t)))}{X_0^+(\lambda_r(\alpha(t)))} - \frac{t^{\alpha} \Phi^-(\lambda_r^{-1}(t))}{X_0^-(\lambda_r^{-1}(t))} - \frac{f(t)}{X_0^+(\alpha(t))} \right\|_p = 0. \quad (29)$$

Положим

$$F^+(z) = \frac{\Phi^+(z)}{X_0^+(z)}, \quad F^-(z) = \frac{z^{\alpha} \Phi^-(z)}{X_0^-(z)}. \quad (30)$$

Будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| F^+(\lambda_r(\alpha(t))) - F^-(\lambda_r^{-1}(t)) - \frac{f(t)}{X_0^+(\alpha(t))} \right\|_p = 0. \quad (31)$$

Пусть теперь $\psi(t)$ — решение уравнения $K\psi = f(t) [X_0(\alpha(t))]^{-1}$.

Имеет место следующая

Теорема 4. *Общее решение задачи A , равное нулю на бесконечности, в зависимости от индекса функции $D(t)$, можно представить в виде*

1) если $\alpha \geq 0$, то

$$\Phi^+(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\beta(t))}{t-z} dt + X_0(z) \sum_{k=0}^{\alpha-1} c_k \Phi_k^+(z),$$
(32)

$$\Phi^-(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(t)}{t-z} dt + X_0(z) \sum_{k=0}^{\alpha-1} c_k (z^k + \Phi_k^-(z)),$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{\alpha-1}$ — произвольные комплексные числа при $\alpha \geq 1$ и $c_0 = c_1 = \dots = c_{\alpha-1} = 0$ при $\alpha = 0$.

2) если $\alpha \leq -1$, то задача имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma} \psi(t) t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, -(x+1),$$

при этом решение определяется по формуле (32), если положить $c_0 = c_1 = \dots = c_{x-1} = 0$.

Доказательство. Пусть $x \geq 0$, тогда

$$|F^-(z)| < \text{const } |z|^{x-1} \quad (z \rightarrow \infty).$$

Применяя лемму 7 из (31) будем иметь

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(t)}{t-z} dt + \sum_{k=0}^{x-1} c_k \Phi_k(z),$$

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(t)}{t-z} dt + \sum_{k=0}^{x-1} c_k (z^k + \Phi_k(z)).$$

Учитывая (30), получим формулу (32).

Второе утверждение теоремы следует из леммы 6.

В заключение отметим, что если в граничном условии (2) сходимость по метрике L^p заменить равномерной сходимостью, то можно доказать, что аналогичные результаты справедливы и в классе $C(\Gamma)$ непрерывных функций.

К данной тематике мое внимание привлек проф. Н. Е. Товмасян. Я выражаю ему свою искреннюю признательность за это, а также за постоянное внимание к работе.

Ереванский политехнический
институт имени К. Маркса

Поступила 26.VI.1985

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Շեղումով համալուծման եզրային խնդիրը L^1 դասում (ամփոփում)

Աշխատանքում, ընդհանրացնելով շեղումով համալուծման խնդիրների եզրային պայմանները, դիտարկվում է այդ խնդիրը այն դեպքում, երբ աջ մասը պատկանում է L^1 դասին: Նկարագրվում է բոլոր լուծումները և ցույց է տրվում, որ նրանք զրկում են L դասի ֆունկցիաներից Կոչու արտի ինտեգրալով:

G. M. AIRAPETIAN. On the boundary problem of the conjugation with shift in the class L^1 (summary)

In the paper the problem of the conjugation with shift is considered in the case, when the right side belongs to the class L^1 .

All solutions are described and it is shown that they can be represented by the integral of Cauchy type from the functions of L^1 class.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мухелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
2. Д. А. Кваселава. Некоторые граничные задачи теории функций, Труды мат. ин-та АН Груз.ССР, 16, 1948, 39—80.

3. И. Б. Симоненко. Краевые задачи Римана и Римана—Газемана с непрерывными коэффициентами, Исследование по совр. пробл. теории функций комплексного переменного, М., Физматгиз, 1961, 380—389.
4. Д. А. Кваседава. Решение одной граничной задачи Т. Карлемана, ДАН СССР, 55, № 8, 1947, 683—686.
5. Г. С. Литвинчук. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., «Наука», 1977.
6. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.
7. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1977.