ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.24

Р. Э. ДАЯН

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ИНТЕНСИВНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПРОЦЕССА ПУАССОНА В ПОЧТИ ГЛАДКОМ СЛУЧАЕ

Пусть $X(t): t \geq 0$ — неоднородный процесс Пуассона] интенсивности $S(t+\theta)$, $t \geq 0$, где $S(t)$ — положительная периодическая функция с периодом τ и $\theta \in (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta < \tau$. Нас будет интерессвать задача оценивания параметра t по наблюдениям $X_T = \{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ при $T \to \infty$. Свойства оценок очевидно определяются гладкостью функции $S(t)$, $t \geq 0$. В случае, когда существует информационное количество

$$I = \int_0^T S'(t)^2 S(t)^{-1}\, dt = \frac{T}{\tau} \int_0^\tau S'(t)^2 S(t)^{-1}\, dt\,(1 + o(1)) =$$

$$= \frac{T}{\tau} I_f (1 + o(1)).$$

В [1] доказана состоятельность и асимптотическая нормальность оценки максимального правдоподобия

$$L\{(\hat{\theta}_T - \theta)\sqrt{T}\} \Rightarrow N(0, \tau I_f).$$

Эта же оценка, но в случае, когда $S(t)$ имеет разрывы первого рода при $T \to \infty$ в пределе имеет негауссовское распределение и с другой нормировкой [2]

$$L\{(\hat{\theta}_T - \theta)\, T\} \Rightarrow L\{\xi\}.$$

Вопрос о свойствах оценок в случае, когда $S(t)$ — непрерывная функция, но $I = \infty$ оставался открытым, поэтому в этой работе свойства оценки максимального правдоподобия изучаются для $S(t)$, допускающих представление

$$S(t) = A\,|t - \tau_0|^\alpha + r(t - \tau_0),$$

$$|r(t+h) - r(t)| \leq k_1 h,$$

где $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ $A,\ k_1 > 0$.

Показано, что ОМП при $T \to \infty$ имеет невырожденное распределение со следующей нормировкой:

$$L\{(\hat{\theta}_T-\theta)\,T^{\frac{1}{1+2\alpha}}\}\Rightarrow L\{\xi_1\},$$

где ξ_1 определено ниже.

Считаем, что функция $S(\cdot)$ непрерывна, положительна, периодическая с периодом τ, дифференцируема всюду за исключением точек $\tau_0+k\tau$, где $\tau_0\in(0,\tau)$, $k=0, 1, 2,\cdots$. Предполагаем, что существует некоторая окрестность U точки τ_0, где функция $S(t)$ представлена в виде

$$S(t)=A\,|t-\tau_0|^{\alpha}+r(t-\tau_0),\ |r(t+h)-r(t)|\leqslant k_1\,h$$

$$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\ A,\ k_1>0.$$

Введем обозначения: $\xi(u)$ — гауссовский процесс с $E\xi(u)=0$ и корреляционной функцией

$$R(u_1,u_2)=\frac{1}{2}\{|u_1|^{\gamma}+|u_2|^{\gamma}-|u_2-u_1|^{\gamma}\},$$

случайный процесс

$$Z_1(u)=\exp\left\{\xi(u)-\frac{1}{2}|u|^{\gamma}\right\},$$

случайную величину ξ_1 по формуле

$$Z_1(\xi_1)=\max_u Z_1(u),$$

$$\varphi_T=\left(\frac{\tau}{A^2L_1T}\right)^{1/\gamma}\quad \gamma=1+2\alpha,$$

где

$$L_1=r(0)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha})^2\,dy.$$

Интеграл L_1 может быть представлен в виде комбинации специальных функций (см. [3], с. 408—409). Ввиду громоздкости выражения оно здесь не приводится.

Теорема. *Для оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T$ равномерно по $\theta\in K$ выполнены соотношения*

$$P_\theta\lim\hat{\theta}_T=\theta,\quad L_\theta\{(\hat{\theta}_T-\theta)\,\varphi_T(\theta)^{-1}\}\Rightarrow L\{\xi_1\},$$

$$\lim_{T\to\infty}E_\theta\,|(\hat{\theta}_T-\theta)\,\varphi_T^{-1}|^p=E\,|\xi_1|^p,$$

где p—произвольное положительное число, K—компакт, $K\in(\alpha,\beta)$.

Доказательство теоремы опирается на некоторые свойства функции $S(t)$, которые будут установлены в леммах 1, 2. Затем в леммах 3—5 будут установлены некоторые свойства отношения правдоподобия и, наконец, будет использована теорема 10.1 из [3].

Прежде всего заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $K_2(\varepsilon)$ такое, что $|S'(t)| < K_2(\varepsilon)$, если $t \in [\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon]$. Кроме того, существуют $M > 0$ и $g > 0$ такие, что $g < S(t) < M$.

Лемма 1. *Для любого h, $|h| < \tau_1$, $\tau_1 < \tau$ существуют $C_1 > 0$ и и $C_2 > 0$ такие, что*

$$C_2 |h|^\gamma \leqslant \int_0^\tau [\sqrt{S(t+h)} - \sqrt{S(t)}]^2 \, dt \leqslant C_1 |h|^\gamma.$$

Доказательство.

$$\int_0^\tau [\sqrt{S(t+h)} - \sqrt{S(t)}]^2 \, dt \leqslant \int_0^\tau \frac{[S(t+h) - S(t)]^2}{4g} \, dt$$

и правое неравенство леммы следует из [4], лемма 1.

С другой стороны

$$\int_0^\tau [\sqrt{S(t+h)} - \sqrt{S(t)}]^2 \, dt > \int_0^\tau \frac{[S(t+h) - S(t)]^2}{4M}$$

и левое неравенство следует из [4], лемма 2.

Лемма 2. *В сделанных предположениях*

$$\lim_{h \to 0} |h|^{-\gamma} \int_0^\tau \left[S(t+h) - S(t) - S(t) \ln \frac{S(t+h)}{S(t)} \right] dt = \frac{1}{2} A^2 L_1.$$

Доказательство. Для определенности считаем $A = 1$, $h > 0$. Имеем

$$\lim_{h \to 0} \int_0^\tau \left[S(t+h) - S(t) - S(t) \ln \frac{S(t+h)}{S(t)} \right] dt =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} h^{-\gamma} \int_0^\tau \left[\frac{[S(t+h) - S(t)]^2}{S(t)} + R_n \right] dt,$$

где

$$|R_n| \leqslant \frac{|S(t+h) - S(t)|^3}{S(t)^2}.$$

Согласно лемме 1 из [4] и факта, что $S(t) > g$, имеем

$$\lim_{h \to 0} h^{-\gamma} \left| \int_0^\tau R_n \, dt \right| = 0.$$

Далее пусть $0 < \delta < 1$ такое, что $[\tau_0 - 2\delta, r_0 + 2\delta] \subset U$. Тогда при $h < \delta/2$

$$\lim_{h \to 0} \int_{\tau_0 - \rho}^{\tau_0 + \rho} \frac{|S(t+h) - S(t)|^2}{S(t)} \, dt = \lim_{h \to 0} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{[|t+h|^\alpha - |t|^\alpha]^2}{|t|^\alpha + r(t)} \, dt.$$

Имеем

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{[|t+h|^{\alpha}-|t|^{\alpha}]^{2}}{|t|^{\alpha}+r(t)}\,dt=h^{\gamma}\int\limits_{-\delta/h}^{\delta/h}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{|yh|+r|yh|}\,dy.$$

Покажем, что

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{-\delta/h}^{\delta/h}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{|yh|^{\alpha}+r(yh)}\,dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{r(0)}\,dy.$$

Пусть имеем $\varepsilon_1>0$ такое, что $g-\varepsilon_1>g_1>0$. Тогда существует A такое, что при $A_1>A_0$

$$\left|\int\limits_{-A_1}^{A_1}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{r(0)}\,dy-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{r(0)}\,dy\right|<\frac{\varepsilon_1}{3}. \qquad (1)$$

Далее существует $A_2\geqslant A_1$ такое, что при $h<\delta/A_2$ имеем

$$\left|\int\limits_{-\delta/h}^{\delta/h}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{|yh|^{\alpha}+r(yh)}\,dy-\int\limits_{-A_2}^{A_2}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{|yh|^{\alpha}+r(yh)}\,dy\right|<\frac{\varepsilon_1}{3}.$$

Ясно, что при этом значении A_2 неравенство (1) также будет выполняться.

И, наконец, поскольку $|r(0)-r(yh)|\leqslant k_1|yh|\leqslant k_1A_2h$ при $|y|<A_2$, то

$$\left|\int\limits_{-A_2}^{A_2}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{|yh|^{\alpha}+r(yh)}\,dy-\int\limits_{-A_2}^{A_2}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{r(0)}\,dy\right|\leqslant\frac{\varepsilon_1}{3}$$

при $h<\dfrac{\varepsilon_1}{G\,k_1A_2L_2}$, где $L_2=\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{g_1^{2}}\,dy.$

Таким образом, для любого $\varepsilon_1<|g-g_1|$ существует δ_1 такое, что при $h<\delta_1$

$$\left|\int\limits_{-\delta/h}^{\delta/h}\frac{[|t+h|^{\alpha}-|t|^{\alpha}]^{2}}{|t|^{\alpha}+r(t)}\,dt-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{r(0)}\,dy\right|<\varepsilon_1.$$

Следовательно

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{-\delta/h}^{\delta/h}\frac{[|t+h|^{\alpha}-|t|^{\alpha}]^{2}}{|t|^{\alpha}+r(t)}\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[|y+1|^{\alpha}-|y|^{\alpha}]^{2}}{r(0)}\,dy.$$

И, наконец,

$$\lim_{h\to 0}h^{-\gamma}\int\limits_{0}^{\tau}\frac{[S(t+h)-S(t)]^{2}}{S(t)}\,dt=\lim_{h\to 0}h^{-\gamma}\int\limits_{0}^{\tau_0-\rho}\frac{[S(t+h)-S(t)]^{2}}{S(t)}\,dt+$$

$$+\lim_{h\to 0}h^{-\gamma}\int\limits_{\tau_0-\rho}^{\tau_0+\rho}\frac{[S(t+h)-S(t)]^{2}}{S(t)}\,dt+\lim_{h\to 0}h^{-\gamma}\int\limits_{\tau_0+\rho}^{\tau}\frac{[S(t+h)-S(t)]^{2}}{S(t)}\,dt=L_1.$$

Случай $h < 0$ $A \neq 1$ аналогичен.

Рассмотрим отношение правдоподобия [2]

$$Z_T(u) = \frac{dP^T_{\theta+\varphi_T u}}{dP^T_\theta}(X_T) = \exp\left\{ \int_0^T \ln \frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\, dM(t) - \right.$$

$$\left. - \int_0^T \left[S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) - S(t+\theta) \ln \frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)} \right] dt \right\},$$

где

$$M(t) = X(t) - \int_0^t S(y+\theta)\, dy.$$

Лемма 3. *Конечномерные распределения процесса $Z_T(u)$ при $T \to \infty$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $Z_1(u)$ и сходимость эта равномерна по $\theta \in K$, K—компакт.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) - S(t+\theta) \ln \frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)} \right] dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{T}{\tau} \int_0^\tau \left[S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) - S(t+\theta) \ln \frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)} \right] dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} |u|^\gamma \frac{T\varphi_T^\gamma}{\tau(|u|\varphi_T)^\gamma} \int_0^\tau S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) + S(t+\theta) \times$$

$$\times \ln \frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\, dt = \frac{1}{2}|u|^\gamma.$$

Аналогично вычислениям, проведенным в лемме 3, получаем

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\ln \frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)} \right]^2 S(t+\theta)\, dt = |u|^\gamma,$$

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\ln \frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T)}{S(t+\theta)} \right] \left[\ln \frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}{S(t+\theta)} \right] S(t+\theta)\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T) - S(t+\theta)}{S(t+\theta)} \right] \left[\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T) - S(t+\theta)}{S(t+\theta)} \right] \times$$

$$\times S(t+\theta)\, dt.$$

Далее

$$\lim_{T\to\infty} 2 \int_0^T \left[\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T) - S(t+\theta)}{S(t+\theta)} \right] \left[\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T) - S(t+\theta)}{S(t+\theta)} \right] \times$$

$$\times S(t+\theta)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\left[\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T)-S(t+\theta)}{S(t+\theta)}\right]^2\times$$

$$\times S(t+\theta)\,dt+\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\left[\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)-S(t+\theta)}{S(t+\theta)}\right]^2 S(t+\theta)\,dt-$$

$$-\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\left|\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)-S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right|^2 S(t+\theta)\,dt=$$

$$=|u_1|^\gamma+|u_2|^\gamma-|u_2-u_1|^\gamma.$$

Причем, ввиду периодичности функции $S(t)$, эта сходимость равномерна по θ.

Далее пусть

$$Y_T(u)=\int\limits_0^T\ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\,dM(t).$$

Положим $\Phi_T(\lambda_1,\lambda_2)=E_\theta\exp\{i\lambda_1 Y_T(u_1)+i\lambda_2 Y_T(u_2)\}$.

Из доказательства леммы 4.2.1 из [2] имеем

$$\left|l_n\Phi_T(\lambda_1,\lambda_2)+\frac{1}{2}\Delta_T^2\right|=\left|\int\limits_0^T[\exp\{iR(t,\lambda_1,\lambda_2)\}-1-iR(t,\lambda_1,\lambda_2)]S(t+\theta)\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_0^T[R(t,\lambda_1,\lambda_2)]^2 S(t+\theta)\,dt\right|\leqslant\int\limits_0^T|R(t,\lambda_1,\lambda_2)|^3 S(t+\theta)\,dt,$$

где

$$\Delta_T^2=\int\limits_0^T[R(t,\lambda,\lambda_2)]^2 S(t+\theta)\,dt,$$

$$R(t,\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1\ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}+\lambda_2\ln\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}{S(t+\theta)}.$$

Производя вычисления, аналогичные проведенным в лемме 3, получаем

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T|R(t,\lambda_1,\lambda_2)|^3 S(t+\theta)\,dt=0.$$

Далее

$$\lim_{T\to\infty}\Delta_T^2=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T[R(t,\lambda_1,\lambda_2)]^2 S(t+\theta)\,dt=$$

$$=\lambda_1^2\int\limits_0^T\left[\ln\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]^2 S(t+\theta)dt+\lambda_2^2\int\limits_0^T\left[\ln\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]^2 S(t+\theta)\,dt+$$

$$+2\lambda_1\lambda_2\int_0^T\left[\ln\frac{S(t+\theta+u_1\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]\left[\ln\frac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]S(t+\theta)\,dt=$$

$$=\lambda_1|u_1|^\gamma+\lambda_2|u_2|^\gamma+\lambda_1\lambda_2(|u_1|^\gamma+|u_2|^\gamma-|u_2-u_1|^\gamma).$$

Следовательно, двумерные распределения случайного процесса $Y_T(u)$ сходятся к двумерным распределениям процесса $\xi(u)$.

Отсюда получаем сходимость двумерных распределений $Z_T(u)$ к двумерным распределениям $Z_1(u)$.

Аналогично устанавливается сходимость любых конечномерных распределений.

Лемма 4. *В сделанных предположениях*

$$E_\theta|Z_T^{1/2}(u_2)-Z_T^{1/2}(u_1)|^2\leqslant C_3|u_2-u_1|^\gamma.$$

Доказательство. Из [2] (с. 61 и с. 185, формула (2.13)) получаем

$$E_\theta\ |Z_T^{1/2}(u_2)-Z_T^{1/2}(u_1)|^2\leqslant\int_0^T(\sqrt{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}-\sqrt{S(t+\theta+u_1\varphi_T)})^2\,dt$$

и по лемме 1, ввиду периодичности $S(t)$, имеем

$$\int_0^T[\sqrt{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}-\sqrt{S(t+\theta+u_1\varphi_T)}]^2\,dt<C_3|u_2-u_1|^\gamma.$$

Лемма 5. *В сделанных предположениях*

$$P_\theta\{Z_T(u)>e^{-c_4|u|^\gamma}\}\leqslant e^{-c_4|u|^\gamma}.$$

Доказательство. По неравенству Чебышева

$$P_\theta\{Z_T(u)>e^{-c|u|^\gamma}\}\leqslant e^{\frac{c|u|^\gamma}{2}}\ E_\theta\ Z_T^{1/2}(u).$$

Из [2], с. 185 имеем

$$e^{\frac{c|u|^\gamma}{2}}\ E_\theta\ Z_T^{1/2}(u)=e^{\frac{c}{2}|u|^\gamma-\frac{1}{2}\int_0^T[\sqrt{S(t+\theta+u\varphi_T)}-\sqrt{S(t+\theta)}]^2\,dt}.$$

Согласно лемме 1

$$\int_0^T[\sqrt{S(t+\theta+u\varphi_T)}-\sqrt{S(t+\theta)}]^2\,dt\geqslant C_5|u|^\gamma.$$

Поэтому

$$P_\theta\{Z_T(u)>e^{-c|u|^\gamma}\}\leqslant e^{\frac{c|u|^\gamma}{2}-\frac{c_5}{2}|u|^\gamma},$$

положим $c=c_4=\dfrac{c_5}{3}$.

Свойства отношения правдоподобия, установленные в леммах 3—5 позволяют воспользоваться теоремой 10.1 [3], чем завершается доказательство теоремы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 10. X. 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. А. Кутоянц.* Оценка параметра интенсивности неоднородного процесса Пуассона. Problems of Control and Information Theory, 8, 2. 1979, 137—149.
2. *Ю. А. Кутоянц.* Оценивание параметров случайных процессов, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980.
3. *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский.* Асимптотическая теория оценивания, М., «Наука», 1979.
4. *Р. Э. Даян.* Об одной задаче оценки параметра сигнала на фоне белого шума, Уч. записки ЕГУ, 162, № 2, 1986, 13—21.