

УДК 517.53

А. Г. БАЛАКЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ ТИПА I

1°. Граничные вопросы единственности аналитических функций хорошо изучены для случая односвязных областей (теоремы Ф. и М. Риссов, Лузина-Привалова и др.). Основные результаты сохраняются и для случая конечносвязных областей, однако в бесконечносвязных областях соответствующие вопросы сравнительно мало исследованы. Это обусловлено причинами как технического, так и принципиального характера. В самом деле, если для конечносвязных областей свойство единственности так или иначе обеспечивается за счет положительности гармонической меры граничного множества, на котором аналитическая функция исчезает, то при переходе к областям бесконечной связности возможно принципиально новое явление: свойство единственности может совмещаться с тем, что соответствующее граничное множество имеет нулевую гармоническую меру.

Пример такой области впервые был построен А. А. Гончаром (см. [1], стр. 425).

Далее, этот эффект бесконечносвязных областей более подробно был изучен в работе автора [2], где был приведен метрический критерий единственности (теорема 2, 1 [2]) для бесконечносвязных областей типа I, для которых граничное подмножество — единичная окружность является гармоническим нуль-множеством.

Настоящая работа также посвящена этой цели. Ниже устанавливаются другие, нежели в работе [2], достаточные условия единственности, также охватывающие случаи, когда соответствующее граничное подмножество может иметь нулевую гармоническую меру. Метод доказательства этой теоремы, как и примера А. А. Гончара [1], основан на использовании известных условий квазианалитичности Данжуа-Карлемана.

2°. Обозначения и определения. Пусть

$$K(a, r) = \{z; |z - a| < r\},$$

$$\Delta_\alpha^\theta = \{z; |\arg z - \theta| < \alpha, |z| < 1\}, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

$H(D)$ — класс голоморфных в области D функций, $H_B(D)$ — класс голоморфных и ограниченных в D функций.

Определение 1 [3]. Пусть $\{K_j\}_1^\infty$ — система кругов $K_j = K(z_j, r_j)$ такая, что $K_j \subset K(0, 1)$, $\bar{K}_j \cap \bar{K}_i = \emptyset$ при $i \neq j$, $\{z_j\}' = \partial K(0, 1)$. Тогда бесконечносвязную область

$$D = D(\{z_j, r_j\}_1^\infty) = K(0, 1) \setminus \bigcup_{j=1}^\infty \bar{K}_j$$

назовем областью типа L .

Кружки K_j называются исключительными кругами области D .

Определение 2. Пусть D —область типа L . Скажем, что D обладает свойством единственности (соответственно, B -единственности) если из условий: $f \in H(D)$ (соответственно, $f \in H_B(D)$) и

$$f(z) \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow 1, z \in D \quad (1)$$

следует, что $f \equiv 0$.

Замечание. Свойством единственности и B -единственности область D обладает (не обладает) одновременно (см. [2], в доказательстве теоремы 1.1).

Определение 3. Точку $e^{i\theta} \in \partial K(0, 1)$ назовем радиально достижимой из области $D \subset K(0, 1)$, если D содержит некоторый полуинтервал $[r_0 e^{i\theta}, e^{i\theta})$, $r_0 \in [0, 1)$.

Отметим, что если область $D = D(|z_j|, r_{j+1}^{-1})$ типа L такая, что $\sum_{j=1}^{\infty} r_j < \infty$, то тогда почти все точки $e^{i\theta} \in \partial K(0, 1)$ радиально достижимы из D .

3°. При помощи известных условий квазианалитичности бесконечно дифференцируемых функций устанавливается следующий признак единственности для областей типа L .

Теорема. Пусть D —область типа L и точка $e^{i\theta}$ радиально достижима из D . Пусть последовательность $\{a_n\}_0^\infty$ такова, что $a_0 = \pi$, $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(a_n^{-1}) < +\infty. \quad (2)$$

Если

$$\sup_{n \geq 1} a_n^{-2 \exp a_n^{-1}} \text{ дл. } \partial D \cap (\Delta_{a_{n-1}}^\theta \setminus \Delta_{a_n}^\theta) < +\infty, \quad (3)$$

то область D обладает свойством единственности.

Доказательство. Без ущерба общности можно положить $\theta = 0$ и с учетом леммы 1 работы [2], считать, что $[0, 1) \subset D$.

Пусть функция $f \in H(D)$ удовлетворяет условию (1), т. е. исчезает на $\partial K(0, 1)$. Ввиду замечания к определению 2, не ограничивая общности можно считать, что $f \in H_B(D)$, т. е. положить $|f(z)| \leq 1$, $z \in D$. Надо доказать, что $f \equiv 0$. С этой целью воспользуемся теоремой Данжуа—Карлемана о квазианалитичности [4], [5].

Рассмотрим класс $C_{\{m_p\}}$ бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, для каждой из которых существует постоянная $K = K_f$ такая, что

$$|f^{(p)}(x)| \leq K^p m_p, \quad x \in [a, b], \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Говорят, что класс $C_{\{m_p\}}$ является квазианалитическим, если для каждой функции $f \in C_{\{m_p\}}$ из условий $f^{(p)}(x_0) = 0$, $x_0 \in [a, b]$, $p = 0, 1, 2, \dots$ следует, что $f(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$.

Теорема Данжуа-Карлемана утверждает, что условие

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{m_p}} = +\infty$$

достаточно для квазианалитичности класса $C_{\{m_p\}}$.

Заметим, что теорема, в частности, справедлива в случае последовательности

$$m_p = c^{p+1} p! (\log(p+1))^{p+1}, \quad p=1, 2, \dots, \quad c = \text{const},$$

и именно этот случай мы хотим применить к функции f на отрезке $[0, 2]$, считая $f(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus K(0, 1)$.

Условие (3) означает, что

$$\text{дл. } \partial D \cap (\Delta_{\sigma_{n-1}} \setminus \Delta_{\sigma_n}) < c_1 \alpha_n^{2 \exp(\frac{1}{\alpha_n})}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $c_1 > 0$ — некоторая константа, $\Delta_\sigma = \Delta_\sigma^0$.

Полагая

$$\gamma_n = \partial D \cap (\Delta_{\sigma_{n-1}} \setminus \Delta_{\sigma_n}), \quad n \geq 1$$

заметим сначала, что согласно (4) и (2)

$$\text{дл. } \partial D \cap K(0, 1) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{дл. } \partial K_j = \sum_{n=1}^{\infty} \text{дл. } \gamma_n \leq c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{2 \exp(\frac{1}{\alpha_n})} < +\infty,$$

где K_j — исключительные круги области D .

Из классической формулы Коши с учетом конечности длины границы ∂D и условия, что f исчезает на $\partial K(0, 1)$, предельным переходом получим формулу

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\partial K_j} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}} = \begin{cases} f^{(p)}(z), & z \in D \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus D, \end{cases} \quad (5)$$

где $p = 0, 1, 2, \dots$.

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[0, 2]$ функцию

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in [0, 1] \\ 0, & z \in [1, 2]. \end{cases}$$

Функция F бесконечно дифференцируема на отрезке $[0, 2]$, что следует из классической теоремы о почленном дифференцировании функциональных рядов и доказываемого ниже факта равномерной сходимости рядов из (5) на отрезке $[0, 2]$, при этом имеем соотношение

$$F^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}, \quad z \in [0, 2], \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Отсюда, ввиду (5) следует, что

$$F^{(p)}(1) = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Теперь оценим $|F^{(p)}(z)|$ для $z \in [0, 2]$, в результате чего заодно будет доказана и равномерная сходимость рядов из (5) на отрезке $[0, 2]$.

С этой целью заметим, что из условия $0 \in [0, 1) \subset D$ следует существование некоторого круга $K(0, r) \subset D$, так, что для любой точки $z \in \partial D \cap (\Delta_{n-1} \setminus \Delta_n)$ имеем оценку

$$|z| \geq \frac{r\alpha_n}{\pi}, \quad z \in [0, 2]. \quad (8)$$

Из (6), ввиду (4) и (8) имеем

$$|F^{(p)}(z)| \leq c_1 \frac{p!}{2\pi} \left(\frac{\pi}{r}\right)^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{2 \exp(\alpha_n^{-1}) - (p+1)}, \quad z \in [0, 2]. \quad (9)$$

Для оценки последнего ряда зафиксируем значение p и пусть N_p — такое натуральное число, что

$$\alpha_1^{-1} < \alpha_2^{-1} < \dots < \alpha_{N_p}^{-1} \leq \log(p+1) < \alpha_{N_p+1}^{-1} < \dots$$

(существование такого N_p следует из условия $\alpha_n^{-1} \uparrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$).

Отсюда имеем соотношения

$$\alpha_n^{-(p+1)} < (\log(p+1))^{p+1} \quad \text{для } n=1, 2, \dots, N_p, \quad (10)$$

$$\exp(\alpha_n^{-1}) \geq p+1 \quad \text{для } n \geq N_p+1. \quad (11)$$

Учитывая (10) и вытекающий из (2) факт сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{2 \exp(\alpha_n^{-1})}$, получаем

$$\sum_{n=1}^{N_p} \alpha_n^{2 \exp(\alpha_n^{-1}) - (p+1)} \leq (\log(p+1))^{p+1} \sum_{n=1}^{N_p} \alpha_n^{2 \exp(\alpha_n^{-1})} \leq c_2 (\log(p+1))^{p+1}, \quad (12)$$

где $c_2 = \text{const}$.

Далее, ввиду (11) имеем

$$\sum_{n=N_p+1}^{\infty} \alpha_n^{2 \exp(\alpha_n^{-1}) - (p+1)} \leq \sum_{n=N_p+1}^{\infty} \alpha_n^{\exp(\alpha_n^{-1})} < c_3, \quad c_3 = \text{const}. \quad (13)$$

Из (9), (12) и (13) получаем

$$|F^{(p)}(z)| \leq c \left(\frac{\pi}{r}\right)^{p+1} p! (\log(p+1))^{p+1}, \quad z \in [0, 2], \quad (14)$$

где $c = \text{const}$, $r = \text{const}$.

В силу соотношений (7) и (14), из теоремы Данжуа-Карлемана вытекает, что $F(z) = 0$, $z \in [0, 2]$, т. е. $f(z) = 0$, $z \in [0, 1)$, откуда следует, что $f \equiv 0$ (так как $[0, 1) \subset D$). Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (2) налагает ограничения на скорость убывания последовательности $\{\alpha_n\}_0^\infty$ при $n \rightarrow \infty$ и показывает, что эта последовательность не может произвольно медленно стремиться к нулю. Так, например, при $\alpha_n = \frac{1}{\log \log n}$ условие (2) выполняется, но уже при скорости $\alpha_n = \frac{1}{\log \log \log n}$ условие (2) не удовлетворя-

ется. Наш критерий во втором случае не позволяет определить обладает или не обладает область D свойством единственности при выполнении условия (3).

Замечание 2. Обстоятельство принадлежности области D классу L в теореме не существенно. Теорема справедлива для более общего класса областей, получающихся из единичного круга удалением некоторой счетной системы областей $\{G_j\}_1^\infty$. Надо только условие (3) заменить условием

$$\sup_{n \geq 1} \alpha_n^{-2 \exp(\alpha_n^{-1})} \sum_{(j)} \text{diam}(G_j \cap (\Delta_{\alpha_{n-1}}^0 \setminus \Delta_{\alpha_n}^0)) < +\infty,$$

где $\text{diam } A = \sup_{z_1, z_2 \in A} |z_1 - z_2|$.

Замечание 3. Доказанная теорема характеризует свойство единственности как для областей типа L с условием, что гармоническая мера $\omega(z, \partial K(0, 1), D)$ положительна, так и для некоторых областей типа L , для которых $\omega(z, \partial K(0, 1), D) = 0$.

Чтобы убедиться в этом достаточно доказать следующее

Утверждение. Пусть Δ — произвольный угол с вершиной 0 , $l = \Delta \cap \partial K(0, 1)$, V — окрестность дуги l , $\varepsilon > 0$. Существует лежащая в $\Delta \cap U \cap K(0, 1)$ система $\{K_i\}_1^\infty$ кругов $K_i = K(z_i, r_i)$ такая, что $\bar{K}_i \cap \bar{K}_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\{z_i\}' = l$

$$\sum_{i=1}^\infty r_i < \varepsilon, \quad (15)$$

причем $\omega(z, l, D) = 0$, где $D = K(0, 1) \setminus \bigcup_{i=1}^\infty \bar{K}_i$.

Действительно, предположим это утверждение справедливо.

Пусть $\{\alpha_n\}_0^\infty$ — последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы, и пусть $\{l_n\}_1^\infty$, $l_n = \partial K(0, 1) \cap (\Delta_{\alpha_{n-1}}^0 \setminus \Delta_{\alpha_n}^0)$, последовательность пар дуг единичной окружности, образующихся последовательностью $\{\alpha_n\}_0^\infty$. Согласно вышеуказанному утверждению (с учетом условия (15)), для l_n и числа $\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi} \alpha_n^{-2 \exp(\alpha_n^{-1})}$ существует система σ_n

нелересекающихся кругов, накапливающихся к l_n

$$\sigma_n \subset (\Delta_{\alpha_{n-1}}^0 \setminus \Delta_{\alpha_n}^0) \cap \left\{ z; |z| > \frac{1}{n+1} \right\},$$

такая, что

$$\omega(z, l_n, D_n) = 0, \quad D_n = K(0, 1) \setminus \bar{\sigma}_n,$$

дл. $\partial D_n \cap K(0, 1) < \alpha_n^{-2 \exp(\alpha_n^{-1})}$, $n = 1, 2, \dots$

Рассмотрим область

$$D = K(0, 1) \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \bar{\sigma}_n.$$

Очевидно, что D — область типа L и точка $e^{i\theta}$ радикально достижима: из D . Итак, построенная область D удовлетворяет всем условиям теоремы, следовательно, обладает свойством единственности.

С другой стороны имеем

$$\omega(z, \partial K(0, 1), D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \omega(z, I_n, D_n) = 0.$$

Итак, остается только убедиться в справедливости вышеуказанного утверждения.

С этой целью рассмотрим область G и функцию f , которые фигурируют в теореме неединственности А. А. Гончара [3]. Эта теорема, в частности, утверждает, что для любых $\beta > 2$ и $\varepsilon > 0$ существуют: область $G = D(\{\zeta_j, \rho_j\}_1^{\infty})$ типа L такая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\rho_j}\right)^{\beta}} < \varepsilon \quad (16)$$

и нетривиальная мероморфная в $K(0, 1)$ функция, удовлетворяющая условию (1).

Итак точки $\{\zeta_j\}_1^{\infty}$ — простые полюсы функции f и пусть точки $\{\eta_k\}_1^{\infty}$ — нули функции f . Далее, пусть W_1 и W_2 — произведения Вейерштрасса для круга $K(0, 1)$ с простыми нулями, соответственно, в точках $\{\zeta_j\}_1^{\infty}$ и $\{\eta_k\}_1^{\infty}$ (см. [6]). Тогда функция

$$F = f \cdot W_1 / W_2$$

голоморфна в $K(0, 1)$ и там не имеет нулей. Применяя к голоморфной в $K(0, 1)$ функции $\log F$ теорему Пуанкаре о разделении особенностей [6], можно написать $\log F = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \in H(C \setminus l)$, $\varphi_2 \in H(C \setminus \gamma)$, γ — дополнительная к l дуга.

Отсюда имеем

$$f(z) = e^{\varphi_1} e^{\varphi_2} W_2 / W_1, \quad z \in K(0, 1). \quad (17)$$

Далее, произведение Вейерштрасса W_1 разобьем на два множителя $\tilde{W}_1$ и $\hat{W}_1$ без общих нулей так, чтобы $\hat{W}_1$ имел нули лишь в тех точках ζ_j , для которых $K(\zeta_j, \rho_j) \subset \Delta \cap V$. Перепишем соответствующие круги $K(\zeta_j, \rho_j)$ в виде последовательности $\{K(z_i, r_i)\}_1^{\infty}$. Для них будет выполнено условие (16).

Аналогично, W_2 разбиваем на множители $\tilde{W}_2$ и $\hat{W}_2$ без общих нулей так, чтобы $\hat{W}_2$ имел нули лишь в тех точках η_k , которые попадают в $\Delta \cap V$.

Без ограничения общности можем считать, что произведения $\tilde{W}_1$ и $\tilde{W}_2$ сходятся в области $\overline{C} \setminus l$, а произведения $\hat{W}_1$ и $\hat{W}_2$ — в $C \setminus \gamma$. В действительности, мы можем сначала построить произведения $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_2$, $\hat{W}_1$, $\hat{W}_2$, а затем положить $\tilde{W}_1 = \tilde{W}_1 \hat{W}_1$, $\tilde{W}_2 = \tilde{W}_2 \hat{W}_2$. Полагая

$$f_1 = e^{\varphi_1} \frac{\tilde{W}_2}{\tilde{W}_1}, \quad z \in K(0, 1),$$

$$f_2 = e^{\varphi_2} \frac{\hat{W}_2}{\hat{W}_1}, \quad z \in K(0, 1),$$

из (17) имеем

$$f(z) = f_1(z) f_2(z), \quad z \in K(0, 1). \quad (18)$$

Из перечисленных выше свойств функций, участвующих в определении f_1 и f_2 , следует, что исключая концы дуг l и γ , мы можем утверждать, что функция f_1 непрерывна и не исчезает на γ , а f_2 непрерывна и не исчезает на l . Кроме того, имеем, что $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow l$, $z \in G$. Тогда из (18) следует, что $f_1(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow l$, $z \in D$ (исключая, быть может, концы дуги l).

Таким образом, мероморфная в D функция f_1 исчезает на l и если удалить из D сколь угодно малые ε -окрестности концов дуги l , то f_1 будет ограничена в полученной области D_ε . Тогда мы имеем, что $\omega(z, l_\varepsilon, D) \equiv 0$, где $l_\varepsilon = l \cap D_\varepsilon$. Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим, что $\omega(z, l, D) = 0$.

Для завершения доказательства утверждения, остается только заметить, что выполняемое условие (16) можно заменить условием

$$\sum_{i=1}^n r_i^\alpha < \varepsilon, \quad \alpha > 0,$$

и, в частности, условием (15), ввиду соотношения

$$x^\alpha \leq \left(\frac{\beta}{x}\right)^\beta \frac{1}{\left(\log \frac{1}{x}\right)^\beta} \quad \text{при } 0 < x < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

В заключение выражаю свою искреннюю признательность Н. У. Аракеляну за ценные советы и обсуждения.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 23.V. 1986

2. Գ. ԲԱԼԱԿՅԱՆ. L տիպի անվերջ-կապանի տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաների միակերպության մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ստացված են L տիպի տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաների միակերպության բավարար պայմաններ, որոնք ընդգրկում են դեպքեր, երբ միավոր շրջանագծի հարմունիկ շափր զրո է: Ապացուցման մեթոդը հիմնվում է Դանսոն-Կարլեմանի քվազիանալիտիկության հայտնի պայմանների օգտագործման վրա:

H. G. BALAKIAN. On the uniqueness of analytical functions in infinitely connected domains of L type (summary)

This paper obtains sufficient conditions for uniqueness of analytical functions in L -type domains, which include cases, where the harmonic measure of unit circle is zero. The proof is based on the Denjoy-Carleman conditions of quasianalyticity.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. U. Arakelian and P. M. Gauthier. On tangential approximation by holomorphic functions, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XVII, № 6, 1982, 421—440.
2. А. Г. Балакян. Метрические критерии единственности голоморфных функций в бесконечносвязных областях типа L , Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XX, № 2, 1985, 131—145.
3. А. А. Гончар. О примерах неединственности аналитических функций, Вестник МГУ, «Математика, Механика», 1964, № 1, 37—44.
4. С. Мандельброт. Квазианалитические классы функций, М.—Л., ОНТИ, 1937.
5. W. Rudin. Real and complex analysis, Second ed., McGraw-Hill, N. Y., 1974.
6. Ж. Валирон. Аналитические функции, М., Гостехиздат, 1957.