ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517.97

В. В. АРУТЮНЯН

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЗНАЧНЫХ ВЕТВЕЙ ФУНКЦИЙ МИНИМАЛЕЙ В ГЛАДКИХ ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Введение

Параметризованным задачам оптимизации было посвящено большое количество работ. Были изучены как функции минимума [2], [4], так и функции минималей [5]. Дифференциальные свойства функций минимума изучаются в основном для определения таких свойств фиксированной задачи, как стабильность, стойкость (calmness, [4]). В [4] Ф. Кларком с помощью этих понятий доказывается, что почти все задачи одного класса задач математического программирования нормальные. В [2] В. В. Бересневым и Б. Н. Пшеничным изучение дифференциальных свойств функции минимума ведется более явно, выводятся условия дифференцируемости этих функций. В [5] К. Малановским ведется изучение параметризованных задач оптимального управления с помощью квадратичных аппроксимаций — такие же аппроксимации для более общего класса задач используются в § 2 настоящей работы.

§ 3 работы посвящен изучению многозначных отображений — вводятся понятия функций однозначных ветвей и производных многозначных отображений, с помощью которых «фиксируются» эти отображения и общая задача параметризованной оптимизации приводится к задаче с фиксированными ограничениями. Ранее принципы изучения этих отображений были другие — в частности, Б. Н. Пшеничным [2], [3] был построен эффективный аппарат для изучения выпуклых многозначных отображений, а С. М. Асеев [6] с помощью ослабления требований линейности распространил на многозначные отображения обычные понятия производной и дифференциала. В настоящей работе многозначные отображения характеризуются с помощью некоторого множества — основания и некоторой функции, отображающей это основание на все элементы (множества) данного отображения. Вопрос существования такой функции остается открытым, однако примеры § 3 и § 4 показывают, что в некоторых случаях можно найти такие функции.

§ 1. Основные определения и обозначения

Пусть X, Y — банаховы пространства, X^*, Y^* — им сопряженные, $B(X, Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из X в Y. При $L \in B(X, Y)$, $x \in X$ через Lx обозначим образ точки x при отображении L. Пространство $B(X, X^*)$ изометрически изоморфно пространству $(X^*)^2$ [1] и поэтому при $L \in B(X, X^*)$ и $x_1, x_2 \in X$ вместо $\langle Lx_1, x_2 \rangle$ будем писать $L[x_1, x_2]$. Через $B_r(x)$ обозначим замкнутый шар радиуса r с центром x.

В дальнейшем без ссылки на это будем пользоваться следующей теоремой о смешанных производных [1].

Если $U \subset X$—открытое множество, $f: U \to X$ имеет вторую производную в точке $\hat{x} \in U$, то для всех $\xi, \eta \in X$

$$f''(\hat{x})[\xi, \eta] = f''(\hat{x})[\eta, \xi].$$

Всюду в дальнейшем производные понимаются в смысле Фреше.

Пусть X—банахово пространство, $A \subset X$. Совокупность непрерывных функций $f: A \to R$, $\Lambda_1: A \to X^*, \cdots, \Lambda_n: A \to (X^*)^n$ назовем функцией из класса $K^n(A)$, если существует функция $\tilde{f} \in \bigcup_{\Omega} C^n(\Omega)$, где объединение берется по всем открытым множествам Ω, содержащим A, такая, что при $x \in A$ $f(x) = \tilde{f}(x)$, $\Lambda_1(x) = \tilde{f}'(x), \cdots, \Lambda_n(x) = \tilde{f}^{(n)}(x)$. Вне A функцию $f(x)$ будем считать равной $+\infty$, функции $\Lambda_i(x)$, $i = 1, \cdots, n$ будем считать неопределенными. Функции из класса $K^n(A)$ обозначим через $[f] = (f, \Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_n)$. Вместо Λ_i будем писать также $f^{(i)}$, их назовем производными порядка i функции f. Таким образом, из $[f] \in K^n(A)$, $[g] \in K^n(A)$, $[f] \neq [g]$ не следует $f \neq g$.

Определение 1. Функция $f: X \to R$ называется слабо полунепрерывной снизу, если для произвольной точки $x_0 \in X$ и произвольной последовательности x_n, слабо сходящейся к x_0, $\liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x_0)$.

Следующие утверждения очевидны.

Предложение 1. а) *Если функция $f: X \to R$ выпукла и* $\operatorname{dom} f$*—замкнутое множество, то f слабо полунепрерывна снизу.*

б) *Если* $\operatorname{dom} f$*—компакт, а f—полунепрерывная снизу функция, то она слабо полунепрерывна снизу.*

Имеет место и усиление утверждения „б" предложения 1.

Предложение 2. *Если f—полунепрерывная снизу функция, а* $\operatorname{dom} f$*—локально компактное множество, то есть для произвольного шара B множество* $\operatorname{dom} f \cap B$*—компакт, то f слабо полунепрерывна снизу.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, x_n слабо сходится к x_0, но

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < f(x_0). \tag{1}$$

Тогда $\liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) < +\infty$, и можно выбрать подпоследовательность x_{n_k} такую, что $f(x_{n_k})$ сходится к конечному числу или к $-\infty$, поэтому при достаточно больших k $x_{n_k} \in \operatorname{dom} f$. Из слабой сходимости x_{n_k} следует её ограниченность, т. е. для некоторого шара B $x_{n_k} \in B$.

По условию предложения можно выбрать сходящуюся подпоследовательность последовательности x_{n_k}. Пусть сама x_{n_k} сходится, тогда она сходится к x_0. Получим

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geqslant f(x_0). \tag{2}$$

Последнее неравенство следует из условия полунепрерывности снизу функции f. (2) очевидно противоречит (1).

Если A — компакт, то для произвольного $n \in N$ функции из класса $K^n(A)$ слабо полунепрерывны снизу.

Определение 2. Функцию $f: X \to R$ назовем минимизируемой, если для произвольного замкнутого шара B существует $x_0 \in B$ так, что

$$f(x_0) = \min_{x \in B} f(x).$$

Пусть $A \subset X$. f называется минимизируемой на A, если ее сужение на A минимизируемо.

Следующее утверждение доказывается элементарно.

Предложение 3. *Произвольная слабо полунепрерывная снизу функция минимизируема на произвольном замкнутом множестве.*

Определение 3. Пусть $f: X \to R$, $A \subset X$, $x_0 \in A$. Функцию f назовем гомеоморфичной на A в точке x_0, если существуют $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|^2} \geqslant \varepsilon, \quad \text{при } \|x - x_0\| \leqslant \delta,\ x \in A,\ x \neq x_0. \tag{3}$$

Класс функций $f_\alpha(x)$, $\alpha \in \Lambda$ называется равномерно гомеоморфичным в x_α, $x_\alpha \in A$, если существуют $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что для произвольного α

$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_\alpha)}{\|x - x_\alpha\|^2} \geqslant \varepsilon, \quad \text{при } \|x - x_\alpha\| < \delta,\ x \in A,\ x \neq x_\alpha. \tag{3'}$$

§ 2. Параметризации экстремальных задач при фиксированных ограничениях

Пусть X, Y—банаховы пространства, $f: X \times Y \to R$, $\Omega \subset Y$.

Определение 4. Функцию $x(y): \Omega \to X$ назовем функцией минималей для f, если при каждом фиксированном $y \in \Omega$ $x(y)$ — точка локального минимума функции $f(x, y)$.

Теорема 1. *Пусть $f_1(x, y): X \times Y \to R$, $f_2(x, y): X \times Y \to R$ — минимизируемая функция, $x_1(y)$—дифференцируемая в точке $y \in Y$ функция минималей для $f_1(x, y)$, $x_1(y_0) = x_0$ и*

$$f_2(x, y) = f_1(x, y) + r(x, y), \tag{4}$$

где

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{r(x, y)}{\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2} = 0.$$

Пусть, далее, функция $f_1(x, y)$ равномерно по y гомеоморфична в $x_1(y)$ на X, тогда существует функция минималей $x_2(y)$ функции $f_2(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$x_2(y) = x_1(y) + \tau(y), \tag{5}$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\tau(y)}{\|y - y_0\|} = 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$g(\varepsilon, y)=\inf\{f_2(x, y): x\in x_1(y)+B_\varepsilon(0)\} \tag{6}$$

и

$$\varepsilon(y)=\inf\{\varepsilon>0: \exists\lambda>0,\ g(\varepsilon, y)=g(\varepsilon+\lambda, y)\}. \tag{7}$$

Докажем, что $$\varepsilon(y)=o(\|y-y_0\|). \tag{8}$$

Пусть это не так, тогда существуют число $\alpha>0$ и последовательность $y_n\to y_0$ такие, что $\varepsilon(y_n)\geqslant\alpha\|y_n-y_0\|$. Это значит, что для произвольных положительных чисел ε_n, меньших $\alpha\|y_n-y_0\|$, и произвольных $\lambda_n>0$

$$g(\varepsilon_n, y_n)>g(\varepsilon_n+\lambda_n, y_n) \tag{9}$$

(монотонность функции $g(\varepsilon, y)$ следует из (6)).

Из (9) получим

$$\inf\{f_2(x, y_n): x\in x_1(y_n)+B_{\varepsilon_n}(0)\}>\inf\{f_2(x, y_n): x\in x_1(y_n)+B_{\varepsilon_n+\lambda_n}(0)\}, \tag{10}$$

то есть существует $x_n\in x_1(y_n)+B_{\varepsilon_n+\lambda_n}(0)$ так, что

$$f_2(x_n, y_n)<\inf\{f_2(x, y_n): x\in x_1(y_n)+B_{\varepsilon_n}(0)\}. \tag{11}$$

Оценка (11) означает, что для произвольного $x\in x_1(y_n)+B_{\varepsilon_n}(0)$ имеет место $f_2(x_n, y_n)<f_2(x, y_n)$.

Таким образом получим следующее утверждение: существует последовательность $y_n\to y_0$, такая что для произвольных $\varepsilon_n<\alpha\|y_n-y_0\|$ и $\lambda_n>0$ существует x_n, $\|x_n-x_1(y_n)\|\leqslant\varepsilon_n+\lambda_n$ и для произвольного x, $\|x-x_1(y_n)\|<\varepsilon$ имеет место

$$f_1(x_n, y_n)+r(x_n, y_n)<f_1(x, y_n)+r(x, y_n), \tag{12}$$

откуда $f_1(x, y_n)-f_1(x_n, y_x)>r(x_n, y_n)-r(x, y_n)$,

$$f_1(x_n, y_n)-f_1(x_1(y_n), y_n)\leqslant\sup_{\|x-x_1(y_n)\|<\varepsilon_n} r(x, y_n)-r(x_n, y_n). \tag{13}$$

Выберем $\varepsilon_n=\lambda_n=\frac{1}{2}\alpha\|y_n-y_0\|$, тогда при $n\to\infty$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x(y_n)\|=0 \tag{14}$$

и

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|\bar{x}_n-x_1(y_n)\|}{\|y_n-y_0\|}\leqslant\alpha \tag{15}$$

для произвольных $\bar{x}_n\in x_1(y_n)+B_{\varepsilon_n+\lambda_n}(0)$.

Из (14), (15) получим, учитывая существование $x_1'(y_0)$,

$$\sup_{\|x-x_1(y_n)\|<\varepsilon_n} r(x, y_n)-r(x_n, y_n)=o(\|x_n-x_1(y_n)\|^2+\|x_1(y_n)-x_0\|^2+$$

$$+\|y_n-y_0\|^2)=o(\|y_n-y_0\|^2),$$

и из (13) получим оценку

$$f_1(x_n, y_n) - f_1(x_1(y_n), y_n) \leqslant o(\|y_n - y_0\|^2). \tag{16}$$

Так как последовательность x_n выбрана таким образом, что

$$f_2(x_n, y_n) < \inf_{\|x - x_1(y_n)\| < \varepsilon_n} f_2(x, y_n) \text{ и } \|x_n - x_1(y_n)\| < \varepsilon_n + \lambda_n,$$

то в силу выбора ε_n и λ_n, получаем

$$\frac{1}{2}\alpha\|y_n - y_0\| \leqslant \|x_n - x_1(y_n)\| < \alpha\|y_n - y_0\|,$$

поэтому

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\|y_n - y_0\|}{\|x_n - x_1(y_n)\|} \leqslant \frac{2}{\alpha}$$

и из (16) следует

$$f_1(x_n, y_n) - f_1(x_1(y_n), y_n) \leqslant o(\|x_n - x_1(y_n)\|^2),$$

что противоречит условию равномерной по y гомеоморфичности функции $f_1(x, y)$ в $x_1(y)$. Оценка (8) доказана.

Эта оценка означает, что для произвольного y из некоторой окрестности y_0 существуют $\varepsilon(y)$ и $\lambda(y)$, для которых $\varepsilon(y) = o(\|y - y_0\|)$, $\lambda(y) > 0$, так что

$$\inf\{f_2(x, y) : \|x - x_1(y)\| \leqslant \varepsilon(y)\} =$$
$$= \inf\{f_2(x, y) : \|x - x_1(y)\| \leqslant \varepsilon(y) + \lambda(y)\}. \tag{17}$$

Так как $f_2(x, y)$—минимизируемая по x функция, то при каждом y она достигает минимума на шаре $\|x - x_1(y)\| \leqslant \varepsilon(y)$ в некоторой точке $x_2(y)$, а из (17) следует, что $x_2(y)$—точка локального минимума для функции $f_2(x, y)$. Обозначая $x_2(y) - x_1(y) = \tau(y)$, из (8) получим (5), чем и завершится доказательство теоремы.

Применим теорему 1 в гладком случае. В дальнейшем запись $f_1(x, y) \overset{m}{\underset{x}{=}} f_2(x, y)$ будет означать, что при каждом фиксированном y точки локального минимума функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ совпадают.

Пусть $A \subset X$, $\Omega \subset Y$, $[f(x, y)] \in K^2(A \times \Omega)$, $(x_0, y_0) \in A \times \Omega$, $(x, y) \in A \times \Omega$. Тогда

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle f'_x(x_0, y_0), x - x_0\rangle + \langle f'_y(x_0, y_0), y - y_0\rangle +$$
$$+ \frac{1}{2} f''_{xx}(x_0, y_0)[x - x_0, x - x_0] + \frac{1}{2} f''_{yy}(x_0, y_0)[y - y_0, y - y_0] +$$
$$+ f''_{xy}(x_0, y_0)[y - y_0, x - x_0] + o(\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2) \overset{m}{\underset{x}{=}}$$
$$\overset{m}{\underset{x}{=}} \frac{1}{2} f''_{xx}(x_0, y_0)[x - x_0, x - x_0] + \langle f'_x(x_0, y_0), x - x_0\rangle +$$
$$+ f''_{xy}(x_0, y_0)[y - y_0, x - x_0] + o(\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2) =$$
$$= \frac{1}{2} f''_{xx}(x_0, y_0)[x - x_0, x - x_0] +$$

$$+\langle f_x(x_0, y_0)+f_{xy}(x_0, y_0)(y-y_0),\ x-x_0\rangle+o(\|x-x_0\|^2+\|y-y_0\|^2). \quad (18)$$

Пусть $b\in X^*$, обозначим при $x\in A$

$$K(x,\ b)=\frac{1}{2}f_{xx}(x_0,\ y_0)[x-x_0,\ x-x_0]+\langle b,\ x-x_0\rangle,$$

тогда

$$f(x,\ y)\underset{x}{\overset{m}{=}}K(x,\ f_x(x_0,\ y_0)+f_{xy}(x_0,\ y_0)(y-y_0))+$$
$$+o(\|x-x_0\|^2+\|y-y_0\|^2), \quad (19)$$

где функция $o(\|x-x_0\|^2+\|y-y_0\|^2)$ та же, что и в (18).

Пусть $M(b)$ — функция минималей для $K(x,\ b)$, а $m(y)=$ $=M(f_x(x_0,\ y_0)+f_{xy}(x_0,\ y_0)(y-y_0))$. Тогда из дифференцируемости $M(b)$ в точке $f_x(x_0,\ y_0)$ будет следовать дифференцируемость $m(y)$ в точке y_0 и

$$m'(y_0)=M'(f_x(x_0,\ y_0))\circ f_{xy}(x_0,\ y_0). \quad (20)$$

Для применения теоремы 1 остается исследовать условие равномерной по y гомеоморфичности в $m(y)$ функции $K(x,\ f_x(x_0,\ y_0)+$ $+f_{xy}(x_0,\ y_0)(y-y_0))$. Запишем это условие.

Существуют $\varepsilon>0$, $\delta>0$ такие, что для произвольного $y\in Y$ из некоторой окрестности y_0,

$$\frac{K(x,\ f_x(x_0,\ y_0)+f_{xy}(x_0,\ y_0)(y-y_0))-}{\|x-m(y)\|^2}$$
$$\frac{-K(m(y), f_x(x_0, y_0)+f_{xy}(x_0, y_0)(y-y_0))}{\|x-m(y)\|^2}>\varepsilon$$

как только $\|x-m(y)\|\leqslant\delta$.

Очевидно, для этого достаточно следующее условие.

Существуют $\varepsilon>0$, $\delta>0$ такие, что для произвольного $b\in X^*$ из некоторой окрестности $f_x(x_0,\ y_0)$

$$\frac{K(x,\ b)-K(M(b),\ b)}{\|x-M(b)\|^2}\geqslant\varepsilon,\ \text{при}\ \|x-M(b)\|\leqslant\delta, \quad (21)$$

а это есть условие равномерной по b гомеоморфичности в $M(b)$ функции $K(x,\ b)$ в некоторой окрестности $f_x(x_0,\ y_0)$.

Из теоремы 1 и оценок (19), (20), (21) получим следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $A\subset X$, $\Omega\subset Y$, $[f]\in K^2(A\times\Omega)$ — минимизируемая функция, $x_0\in A$, $y_0\in\Omega$, $K(x,b)=f_{xx}(x_0,\ y_0)[x-x_0,\ x-x_0]+$ $+\langle b,\ x-x_0\rangle$ — равномерно по b гомеоморфична в некоторой окрестности точки $f_x(x_0,\ y_0)$ в $M(b)$, где $M(b)$ — функция минималей для $K(x,\ b)$ на A, дифференцируемая в точке $f_x(x_0,\ y_0)$, $M(f_x(x_0,y_0))=x_0$. Тогда существует дифференцируемая в y_0 функция $x(y)$ для $f(x,\ y)$ и имеет место*

$$x'(y_0)=M'(f_x(x_0,\ y_0))\circ f_{xy}(x_0,\ y_0). \quad (22)$$

Замечание. Как видно из доказательства, условия равномерной гомеоморфичности функции $K(x,\ b)$ и дифференцируемости $M(b)$ можно заменить менее жесткими, но более труднопроверяемыми условиями равномерной по y гомеоморфичности функции $K(x, f'_x(x_0, y_0) + f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0))$ и дифференцируемости $m(y) = M(f'_x(x_0, y_0) + f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0))$. В этом случае уравнение (22) примет вид

$$x'(y_0) = m'(y_0). \tag{23}$$

Свойство гомеоморфичности функции $K(x, b)$ в случае, когда A—выпуклое множество, оказывается связанным лишь с аналогичным свойством оператора $f''_{xx}(x_0, y_0)$. Именно, имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $L \in B(X, X^*)$, $b(y): Y \to X^*$, $A \subset X$*—выпуклое множество,* $x(y): Y \to A$ *и*

$$g(x, y) = \frac{1}{2} L[x - x(y), x - x(y)] + \langle b(y), x - x(y) \rangle \geqslant 0 \text{ при } x \in A. \tag{24}$$

Если существует $\alpha > 0$ *такое, что при всех* $x \in X$

$$L[x, x] \geqslant \alpha \|x\|^2, \tag{25}$$

то функция $g(x, y)$ *равномерно по* y *гомеоморфична в* $x(y)$.

Замечание. Условие (24) нельзя считать дополнительным к условиям теоремы 2, так как оно лишь означает, что функция $g(x, y)$ принимает локальный минимум в $x(y)$.

Доказательство теоремы 3. Для фиксированного $y \in Y$ производная по x функции $g(x, y)$ в точке $x(y)$ равна $g'_x(x(y), y) = b(y)$, поэтому для всех $x \in A$

$$\langle b(y), x - x(y) \rangle = \langle g'_x(x(y), y), x - x(y) \rangle \geqslant 0$$

(необходимое условие минимума). Оценим выражение

$$\frac{g(x, y) - g(x(y), y)}{\|x - x(y)\|^2} = \frac{1}{2} L\left[\frac{x - x(y)}{\|x - x(y)\|}, \frac{x - x(y)}{\|x - x(y)\|}\right] + $$

$$+ \frac{\langle b(y), x - x(y) \rangle}{\|x - x(y)\|^2} \geqslant \frac{1}{2} L\left[\frac{x - x(y)}{\|x - x(y)\|}, \frac{x - x(y)}{\|x - x(y)\|}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \alpha \left\|\frac{x - x(y)}{\|x - x(y)\|}\right\|^2 = \frac{1}{2} \alpha, \tag{26}$$

откуда и следует равномерная гомеоморфичность функции $g(x, y)$. Последнее неравенство в (26) следует из условия (25).

В случае, когда удается аналитически вычислить точки минимума на A функции $K(x, b)$, уравнение (22) принимает явный вид. Проиллюстрируем это в случае, когда A—гиперплоскость.

Пусть X, Y — гильбертовы пространства, $f: X \times Y \to R$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем существует число $\alpha > 0$ такое, что для произвольной $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$

$$f''_{xx}(\bar{x}, \bar{y})[x, x] \geqslant \alpha \|x\|^2 \text{ при } x \in X.$$

Пусть $l \in X$, $A = \{x : \langle l, x \rangle = 0\}$, и $x_0 \in A$.
Вычислим точку минимума на A функции

$$u(x)=\frac{1}{2}L[x-x_0,\ x-x_0]+<b,\ x-x_0>,$$

где $L\in B(X,\ X)$, $b\in X^*$ и существует левый обратный оператор L^{-1}.

Имеем $u'(x)=L(x-x_0)+b$. Необходимое условие экстремума в точке M имеет вид: существует число λ такое, что $L(M-x_0)+$ $+b=\lambda l$, откуда $M=L^{-1}(\lambda l-b)+x_0$.

Из условия принадлежности M к A получим

$$<l,\ M>=0,\ <l,\ L^{-1}(\lambda l-b)>+<l,\ x_0>=0,$$

$$<l,\ L^{-1}\lambda l>=<l,\ b>,\ \lambda=\frac{<l,\ b>}{<l, L^{-1}l>},$$

$$M=L^{-1}\left(\frac{<l,\ b>}{<l,\ L^{-1}l>}l-b\right)+x_0.$$

Рассматривая M как функцию от b (для фиксированного L) вычислим производную:

$$M'(b)=L^{-1}\left(\frac{<l,\ \cdot\ >}{<l, L^{-1}l>}l-I_x\right), \tag{27}$$

где I_x—единичный оператор. Обозначим правую часть в (27) через $U_{L,\,l}$—это есть линейный непрерывный оператор из X в X при каждом L и l. Из теоремы 2 получим, что существует функция минималей $x(y)$ для $f(x,\ y)$, для которой

$$x'(y_0)=U_{f''_{xx}(x_0,\ y_0),\ l}\circ f''_{xy}(x_0,\ y_0) \tag{28}$$

и $x(y_0)=x_0$, если x_0—некоторая точка локального минимума функции $f(x,\ y_0)$ на A.

§ 3. Гладкие многозначные отображения и их проектирование на фиксированные множества

Пусть X, Y—банаховы пространства, $A: Y\to 2^X$, то есть при каждом фиксированном $y\in Y$ $A(y)$—некоторое подмножество пространства X.

Определение 5. а) Функция $f: Y\to X$ называется селектором отображения $A(y)$, если $f(y)\in A(y)$ при всех $y\in Y$.

б) Функция $h(x,\ y): X\times Y\to X$ называется функцией однозначных ветвей отображения A, если для некоторого множества $A_0\subset X$

1) $x\in A_0$ в том и только в том случае, если $h(x,\ y)\in A(y)$ при всех $y\in Y$;

2) для всех $y\in Y$ $A(y)=\bigcup_{x\in A_0} h(x,\ y)$.

Множество A_0 называется основанием функции $h(x,\ y)$.

Если для некоторого $y_0\in Y$ $A_0=A(y_0)$ и $h(x,\ y)=x$ для всех $x\in A_0$, то h называется регулярной в y_0.

в) Элемент $b\in B(Y,\ X)$ называется производным направлением отображения A в точке $(x_0,\ y_0)\in X\times Y$, если из $x_0\in\overline{A(y_0)}$ следует, что существует функция $r: Y \to X$ такая, что $x_0 + b(y - y_0) + r(y) \in A(y)$ при всех $y \in Y$ и

$$\lim_{y \to y_0} \frac{r(y)}{\|y - y_0\|} = 0.$$

Функция $dA_{y_0}(x): X \to B(Y, X)$ называется производной функцией отображения A в точке y_0, если для всех $x \in X$ $dA_{y_0}(x)$— производное направление в точке (x, y_0).

Функция $dA(x, y): X \times Y \to B(Y, X)$ называется производной отображения A, если для всех $(x, y) \in X \times Y$ $dA(x, y)$—производное направление в точке (x, y).

Селекторы, функции однозначных ветвей и производные многозначных отображений будем изучать параллельно. Следующие утверждения, некоторым образом связывающие эти понятия, очевидны.

Предложение 4. а) *Пусть $h: X \times Y \to X$—функция однозначных ветвей многозначного отображения A с основанием A_0. Тогда для каждого фиксированного $x_0 \in A_0$ функция $f(y) = h(x_0, y)$ есть селектор отображения A.*

б) *Пусть $f(y): Y \to X$—селектор отображения А, дифференцируемый в некоторой точке y_0. Тогда $f'(y_0)$--производное направление отображения A в точке $(f(y_0), y_0)$.*

Изучим конкретный тип многозначных отображений, часто встречающийся в параметризованных задачах оптимизации — параметризованные ограничения типа равенств.

Пусть $A(y) = \{x \in X: f(x, y) = 0\}$, где $f: X \times Y \to Z$, X, Y, Z— банаховы пространства.

Теорема 4. *Пусть $(x_0, y_0) \in X \times Y$, $f(x_0, y_0) = 0$, f—непрерывно дифференцируемая в (x_0, y_0) функция. Если $b \in B(Y, X)$—производное направление отображения A в точке (x_0, y_0), то*

$$f_x'(x_0, y_0) \circ b = -f_y'(x_0, y_0). \tag{29}$$

Доказательство. По определению производного направления существует функция $r: Y \to X$ такая, что

$$\lim_{y \to y_0} \frac{r(y)}{\|y - y_0\|} = 0 \text{ и } x + b(y - y_0) + r(y) \in A(y). \tag{30}$$

Последнее включение означает, что

$$f(x_0 + b(y - y_0) + r(y), y) = 0. \tag{31}$$

Из (30) следует, что $r(y)$ — дифференцируемая в y_0 функция и $r'(y_0) = 0$. Дифференцируя по y равенство (31) в точке y_0 и учитывая непрерывную дифференцируемость функции $f(x, y)$ в y_0, получим

$$f_x'(x_0, y_0) \circ b + f_y'(x_0, y_0) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $f(x, y)$—непрерывно дифференцируемая в $X \times Y$ функция, $h(x, y)$—дифференцируемая по y во всех точках $(x, y) \in A_0 \times Y$ функция однозначных ветвей отображения A с основанием A_0. Тогда по предложению 4 функция $f(y)=h(x, y)$ есть селектор при всех фиксированных $x\in A_0$, и поэтому $h'_y(x, y)$—производное направление в точке $(h(x, y), y)$. Значит, по теореме 4

$$f'_x(h(x, y), y)\circ h'_y(x, y)=-f'_y(h(x, y), y). \tag{32}$$

Обратно, пусть $h(x, y)$—некоторая функция, удовлетворяющая уравнению (32) при всех x из некоторого множества $A_0\subset X$, и пусть для некоторого $y_0\in Y$ справедливо следующее утверждение: $h(x, y_0)\in$ $\in A(y_0)$ в том и только том случае, когда $x\in A_0$. Обозначим $g(x, y)=f(h(x, y), y)$. Из (32) получим $g'_y(x, y)=0$ при $x\in A_0$, то есть при каждом фиксированном $x\in A_0$

$$g(x, y)=\text{const},\ f(h(x, y), y)=\text{const},$$

$$f(h(x, y), y)=f(h(x, y_0), y_0).$$

Для того, чтобы $h(x, y)\in A(y)$ необходимым и достатосчным условием будет $f(h(x, y_0), y_0)=0$ что, как было предположено, равносильно условию $x\in A_0$. Поэтому $h(x, y)$—функция однозначных ветвей отображения A с основанием A_0. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $f: X\times Y\to Z$ непрерывно дифференцируемая в $X\times Y$ функция, $A(y)=\{x\in X: f(x, y)=0\}$. Для того, чтобы дифференцируемая по y во всех точках $X\times Y$ функция $h: X\times Y\to X$ была функцией однозначных ветвей отображения A с основанием $A_0\subset X$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) *$h(x, y)$ удовлетворяет уравнению (32) при $x\in X_0$;*

б) *для некоторого $y_0\in Y$ $h(x, y_0)\in A(y_0)$ в том и только том случае, когда $x\in A_0$.*

Пример. $X=R^2$, $Y=R$, $Z=R$, $f(x_1, x_2, y)=x_1^2+(x_2-y)^2-1$. При каждом $y\in R$, $A(y)$ будет единичной окружностью с центром в точке $(0, y)$. Ищем регулярные в точке 0 функции однозначных ветвей и производные отображения A. Имеем

$$f'_{(x_1, x_2)}(x_1, x_2, y)=(2x_1, 2(x_2-y)),$$

$$f'_y(x_1, x_2, y)=-2(x_2-y).$$

Функции однозначных ветвей и производные будут соответственно векторами $(h_1(x_1, x_2, y), h_2(x_1, x_2, y))$ и $(d_1A(x_1, x_2, y), d_2A(x_1, x_2, y))$. Из (29) получим

$$2x_1 d_1A(x_1, x_2, y)+2(x_2-y)\,d_2A(x_1, x_2, y))=2(x_2-y), \tag{33}$$

а (32) нам даст

$$2h_1(x_1, x_2, y)\,h'_{1y}(x_1, x_2, y)+2(h_2(x_1, x_2, y)-y)\,h'_{2y}(x_1, x_2, y)=$$
$$=2(h_2(x_1, x_2, y)-y). \tag{34}$$

Уравнения (33) и (34) имеют бесконечное множество решений, что лишь означает, что как функции однозначных ветвей, так и производные отображения A определяются неоднозначно. Выпишем лишь по два согласованных друг с другом решения уравнений (33)и (34).

$$1)\ h_1(x_1, x_2, y) = x_1,\ h_2(x_1, x_2, y) = x_2 + y,\ d_1A(x_1, x_2, y) = 0,$$
$$d_2A(x_1, x_2, y) = 1;$$

$$2)\ h_1(x_1, x_2, y) = x_1\cos y + x_2\sin y,\ h_2(x_1, x_2, y) = x_2\cos y - x_1\sin y + y,$$
$$d_1A(x_1, x_2, y) = x_2 - y,\ d_2A(x_1, x_2, y) = 1 - x_1.$$

Первым решениям соответствует параллельный перенос окружности $A(0)$ вдоль прямой $x_1 = 0$, а вторая группа решений характеризует случай, когда окружность $A(0)$ «катится» по прямой $x_1 = -1$ без скольжения.

В случае параметризованных ограничений типа неравенств результат, аналогичный теореме 5, получается лишь односторонний.

Теорема 6. *Пусть $f: X\times Y \to R$—непрерывно дифференцируемая в $X\times Y$ функция, $A(y) = \{x\in X: f(x, y)\leqslant 0\}$.*

Пусть $H(f)$—множество всех дифференцирдемых по y и регулярных в нуле функций однозначных ветвей отображения $A(y)$. Тогда

$$H(f)\subset\{h(x, y): h(x, 0) = x, f'_x(h(x, y), y)\, h'_y(x, y) = -f'_y(h(x, y), y)$$
$$\text{при } f(h(x, y), y) = 0\}.$$

Доказательство. Если $h(x, y)\in H(f)$, то $f(h(x, y), y)\leqslant 0$, значит, если $f(h(x_0, y_0), y_0) = 0$, то функция $g(x, y) = f(h(x, y), y)$ принимает максимум в точке (x_0, y_0), значит $g'_y(x_0, y_0) = 0$, что и требовалось доказать.

§ 4. Случай, когда $A(y)$—гиперплоскость при всех y

Завершим изучение задачи, начатое в § 2. Сначала сформулируем задачу: требуется охарактеризовать функции минималей для дважды непрерывно дифференцируемой в $X\times Y$ функции $f(x, y)$ на множестве $A(y)$, где $A(y) = \{x: \langle l(y), x\rangle = 0\}$, причем $l(y): Y\to X^*$—дважды непрерывно дифференцируемая в Y функция. Предполагается также, что X и Y—гильбертовы пространства, и пусть существует $\bar{x}\in X$ такое, что $\langle l(y), \bar{x}\rangle \neq 0$ при всех $y\in Y$. Найдем функции однозначных ветвей отображения A, регулярные в нуле. Из теоремы 5 получим, что если $h(x, y)$—функция однозначных ветвей, то для произвольного $\bar{y}\in Y$

$$\langle l(y), h'_y(x, y)\bar{y}\rangle = -\langle l'(y)\bar{y}, h(x, y)\rangle. \tag{35}$$

Нетрудно увидеть, что уравнению (35) удовлетворяет функция

$$h(x, y) = x - \frac{\langle l(y), x\rangle}{\langle l(y), \bar{x}\rangle}\cdot\bar{x} + \frac{\langle l(0), x\rangle}{\langle l(0), \bar{x}\rangle}\cdot\bar{x}. \tag{36}$$

Действительно, в этом случае для всех $\bar{y}\in Y$, $x\in A(0)$

$$h'_y(x, y)\bar{y} = -\frac{\langle l'(y)\bar{y}, x\rangle\cdot\langle l(y), \bar{x}\rangle - \langle l'(y)\bar{y}, \bar{x}\rangle\cdot\langle l(y), x\rangle}{\langle l(y), \bar{x}\rangle^2}\bar{x}$$

и

$$< l(y),\ h_y'(x,\ y)\ \bar{y} > = - < l(y),$$

$$\frac{< l'(y)\,\bar{y},\ x >< l(y),\ \bar{x} > - < l'(y)\,\bar{y},\ \bar{x} >< l(y),\ x >}{< l(y),\ \bar{x} >^2}\,\bar{x} > =$$

$$= - < l(y),\ \frac{< l'(y)\,\bar{y},\ x >}{< l(y),\ \bar{x} >}\,\bar{x} > + < l(y),\ \frac{< l'(y)\,\bar{y},\ \bar{x} >< l(y),\ x >}{< l(y),\ \bar{x} >^2}\,\bar{x} > =$$

$$= - \frac{< l'(y)\,\bar{y},\ x >}{< l(y),\ \bar{x} >} < l(y),\ \bar{x} > +$$

$$+ \frac{< l'(y)\,\bar{y},\ \bar{x} > \cdot < l(y), x >}{< l(y),\ \bar{x} >^2} \cdot < l(y),\ \bar{x} > = - < l'(y)\,\bar{y},\ x > +$$

$$+ < l'(y)\,\bar{y},\ \frac{< l(y),\ x >}{< l(y),\ \bar{x} >}\,\bar{x} > = - < l'(y)\,\bar{y},\ h(x,\ y) >.$$

Функция $h(x,\ y)$, определенная по формуле (36), регулярна в нуле, так как если $x \in A(0)$, то $< l(0),\ x > = 0$ и

$$h(x,\ 0) = x - \frac{< l(0),\ x >}{< l(0),\ \bar{x} >}\,\bar{x} = x.$$

Теперь для того, чтобы минимизировать $f(x,\ y)$ на $A(y)$ достаточно минимизировать $f(h(x,\ y),\ y)$ на $A(0)$, так как при каждом фиксированном y $h(x,\ y)$—гомеоморфизм из X в X. Это значит, что для того, чтобы точка x_0 была точкой локального минимума для $f(h(x,\ y),\ y)$ на $A(0)$, необходимо и достаточно, чтобы точка $h(x_0,\ y)$ была точкой локального минимума для $f(x,\ y)$ на $A(y)$.

При каждом y $h(x,\ y)$—линейный непрерывный оператор из X в X, обозначим его через $P(y)$. Если $x_0(y)$—функция минималей для $f(h(x,\ y),\ y)$ на $A(0)$, то из (28)

$$\dot{x}_0(y) = U_{\dot{f}_{xx}(P(y)\,x,\ y)\,P^2(y),\ l(0)} \cdot [\dot{f}_{xy}\,P(y)\,x,\ y)\ P(y) + \dot{f}_{xx}(P(y)\,x,\ y)\,P'(y)],$$

значит если $x(y) = P(y)\,x_0(y)$, то

$$x'(y) = P'(y)\ x(y) + P(y)\ U_{\dot{f}_{xx}(P(y)\,x,\ y)\,P^2(y),\ l(0)} \cdot$$

$$\cdot [\dot{f}_{xy}(P(y)\ x,\ y)\ P(y) + \dot{f}_{xx}(P(y)\ x,\ y)\ P'(y)],$$

где $P(y): Y \to B(X,\ X)$, $P(y)\,x = h(x,\ y)$ и $U_{L,\ l}: X \to X$,

$$U_{L,\ l}\,x = L^{-1}\left(\frac{< l(0),\ x >}{< l(0),\ L^{-1}l(0) >}\ l(0) - l_x\right).$$

Очевидно, вместо $P(y)\,x$ можно брать любое другое решение уравнения (35), дважды непрерывно дифференцируемое в $X \times Y$ и взаимно однозначное при каждом фиксированном y.

Ереванский государственный университет

Поступила 13. III. 1986

Վ. Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. Ողորկ պարամետրիզացված էքստրեմալ խնդիրներում մինիմալների ֆունկցիաների միարժեք ճյուղերի դիֆերենցիալ հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Հետազոտվում են ֆիքսված սահմանափակումներով պարամետրիզացված օպտիմիզացիայի խնդիրների լուծումների դիֆերենցիալ հատկությունները։ Ֆիքսված սահմանափակումներով ողորկ պարամետրիզացված ֆունկցիայի մինիմիզացիայի խնդրի լուծումների դիֆերենցելիության հարցը բերվում է քառակուսային նպատակային ֆունկցիայով անալոգ խնդրին։ Սահմանվում են բազմարժեք արտապատկերումների ածանցյալների և միարժեք ճյուղերի ֆունկցիաների հասկացությունները և պարամետրիզացված սահմանափակումներով պարամետրիզացված օպտիմիզացիայի խնդիրը բերվում է ֆիքսված սահմանափակումներով խնդրին։ Արդյունքները ցուցադրվում են օրինակներում։

V. V. HARUTYUNIAN. *On differential properties of singlevalued branches of functions of minimals in smooth parametrized extremal problems* (summary).

Differential properties of solutions of parametrized optimization problems subject to fixed constraints are established. The problem of differentiability of solutions of smooth parametrized function minimization problem subject to fixed constraints is reduced to analogous problem with quadratic aim function. The notions of derivatives and single valued branches of multifunctions are defined and the problem of parametrized optimization subjest to parametrized constraints is reduced to the problem with fixed constraints. The results are illustrated on examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин.* Оптимальное уравнение, М., «Наука», 1979.
2. *В. В. Береснев, Б. Н. Пшеничный.* О дифференциальных свойствах функции минимума, ЖВМ и МФ, 14, № 3, 1974, 639—651.
3. *Б. Н. Пшеничный.* Выпуклые многозначные отображения и им сопряженные, Кибернетика, № 3, 1972, 94—102.
4. *F. H. Glarke.* A new approach to Lagrange multipliers, Math. Oper. Res., 1, № 2, 1976, 165—174.
5. *K. Malanowski.* On differentiability with respect to parameter of solutions to convex optimal control problems subject to state space constraints, Appl. Math. and Optim., 12, № 3, 1984, 231—245.
6. *С. В. Асеев.* Квазилинейные операторы и их применение в теории многозначных отображений, Тр. МИ АН СССР им. В. А. Стеклова, 167, 1985, 25—52.