УДК 517.53:517.5

А. А. СААРЯН

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА АБЕЛЯ-ПЛАНА.
 ПРИЛОЖЕНИЯ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

В последние годы в теории квантованных полей появились интересные применения формулы суммирования Абеля-Плана [1]. В работе [2] с помощью этой формулы проведена регуляризация тензора энергии-импульса скалярного поля в различных фридмановских моделях Вселенной. Позднее формула Абеля-Плана применялась также к вычислению вакуумного среднего тензора энергии-импульса квантованных полей в различных полных и неполных многообразиях (эффект Казимира). С ее помощью легко доказывается независимость результатов расчета от известного произвола, существующего в процедуре перенормировки наблюдаемых величин. Сравнительно подробное изложение этих вопросов можно найти в [3].

В ряде граничных задач математической физики приходится рассматривать суммы по нулям заданной функции. Еще Фурье в своих исследованиях по теории теплопроводности пришел к необходимости рассматривать ряды вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(j_k x)$, где j_k — положительные корни функции $J_0(z)$ [4]. Аналогичные выражения, но содержащие квадраты функций Бесселя, возникают в связи с эффектом Казимира для идеально проводящей сферы в квантовой теории поля. Обычная формула Абеля-Плана относится к рядам по нулям функции $\sin \pi z$ и в указанных случаях неприменима. Ниже приводится обобщение этой формулы для сумм по нулям заданной функции.

§ 1. Обобщенная формула Абеля-Плана

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ мероморфны в полуплоскости $\text{Re } z > 0$. Через $z_{f,k}$ и $z_{g,k}$ обозначим полюсы, соответственно $f(z)$ и $g(z)$ в этой области, расположенные в порядке $|z_{i,k}| \leq |z_{i,k+1}|$, $i=f, g$. Предположим сначала, что $\text{Im } z_{f,k} \neq 0$ (см. замечание к теореме 1.1).

Теорема 1.1. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{C_b^a} [g(z) + af(z)] dz = 0, \quad a = -1, 1, \quad (1.1)$$

где C_b^1 (C_b^{-1}) — верхняя (нижняя) половина правой полуокружности радиуса b с центром в точке $z=0$, то имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \pi i \left[\sum_k \operatorname{Res}_{z=z_{g,k}} g(z) + \sum_{a,k} a \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z_f, k > 0} f(z) \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_a^{\operatorname{Im} a} a \int_0^{\infty} [g(z) + af(z)] dz. \quad (1.2)$$

Здесь предполагается, что интеграл в левой части существует, а возможные особенности на мнимой оси должны обходиться малыми полуокружностями в правой полуплоскости.

Доказательство. Рассмотрим контур C , состоящий из C_b^1 , C_b^{-1} и прямолинейного отрезка $[-ib, ib]$ (возможные особенности на мнимой оси обходятся справа). Согласно теореме о вычетах

$$\int_C g(z) dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_{g,k}} g(z), \quad (1.3)$$

где в правой части суммирование проводится по полюсам, находящимся внутри контура C . Пусть C^1 и C^{-1} — верхняя и нижняя половины этого контура. Тогда имеем

$$\int_C g(z) dz = \sum_a \int_{C^a} g(z) dz = \sum_a \left\{ \int_{C^a} [g(z) + af(z)] dz - a \int_{C^a} f(z) dz \right\}, \\ \alpha = -1, 1.$$

По той же теореме о вычетах

$$\sum_a a \int_C f(z) dz + 2 \int_0^b f(x) dx = 2\pi i \sum_a a \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z_f, k > 0} f(z).$$

Далее

$$\int_C [g(z) + af(z)] dz = \int_{C_b^a} [g(z) + af(z)] dz - a \int_0^{iab} [g(z) + af(z)] dz.$$

Учитывая эти соотношения и перейдя в (1.3) к пределу при $b \rightarrow \infty$, с учетом (1.1) приходим к формуле (1.2).

З а м е ч а н и е. Нетрудно показать, что формула (1.2) остается в силе и при наличии у функции $f(z)$ полюсов на вещественной оси в области $\operatorname{Re} z > 0$, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности этих полюсов не содержит четных степеней. В этом случае в левой части

формулы (1.2) под $\int_0^{\infty} f(x) dx$ понимается главное значение этого интеграла, которое существует в силу вышесказанного. Далее всюду в

(1.2) будем записывать интеграл *p. v.* $\int_0^{\infty} f(x) dx$, полагая, что он существует в смысле главного значения.

Формулу (1.2) мы будем называть обобщенной формулой Абеля-Плана, поскольку когда $g(z) = -if(z) \operatorname{ctg} \pi z$ и $f(z)$ — аналитическая функция, из неё получается обычная формула Абеля-Плана [1, 3]. Подставив в (1.2) $g(z) = -if(z) \operatorname{ctg} \pi s(z)$, получаем формулу суммирования по целочисленным значениям аналитической функции $s(z)$.

§ 2. Суммирование по нулям функции $Af(z) + Bzf'(z)$

Рассмотрим приложения общих формул к цилиндрическим функциям. Для упрощения записи последующих формул удобно ввести обозначение

$$\bar{F}(z) = AF(z) + BzF'(z), \quad (2.1)$$

где $F(z)$ — произвольная функция, штрих означает производную по аргументу функции и, наконец, A и B — наперед заданные произвольные вещественные числа. Функцию $g(z)$ в обобщенной формуле Абеля-Плана (1.2) выберем в виде

$$g(z) = if(z) \frac{\bar{Y}_\nu(z)}{J_\nu(z)}, \quad (2.2)$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя и Неймана. Для суммы и разности имеем

$$g(z) + af(z) = af(z) \frac{\bar{H}_\nu^{(a)}(z)}{J_\nu(z)}, \quad a = -1, 1.$$

Здесь $H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(-1)} \equiv H_\nu^{(2)}$ (такое обозначение оказывается удобным) — функции Бесселя третьего рода (функции Ханкеля). Используя асимптотические формулы для бесселевых функций при фиксированном ν и $|z| \rightarrow \infty$ (см., например, [5]), можно убедиться, что условия (1.1) выполняются, если $f(z)$ удовлетворяет одному из неравенств

$$|f(z)| < \varepsilon(x) e^{c|y|} \quad \text{или} \quad |f(z)| < \frac{Me^{2|y|}}{|z|^a} \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z = x + iy, \quad (2.3)$$

где $c < 2$, $a > 1$, $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Обозначим через $\lambda_{\nu, k} \neq 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$, $|\lambda_{\nu, k}| < |\lambda_{\nu, k+1}|$) корни функции $J_\nu(z)$ в правой полуплоскости (если существуют нули на мнимой оси, то будем брать только с положительной мнимой частью). Все они простые. Отметим, что при действительных $\nu > -1$ функция $J_\nu(z)$ имеет лишь вещественные нули, за исключением случая $A/B + \nu < 0$, когда имеются два чисто мнимых нуля [4, 6]. Отсюда с помощью вронскиана $W[J_\nu, Y_\nu] = 2/\pi z$ находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\lambda_{\nu, k}} \frac{\bar{Y}_\nu(z)}{J_\nu(z)} f(z) &= - \frac{2\lambda_{\nu, k} f(\lambda_{\nu, k})}{\pi [(\lambda_{\nu, k} - \nu^2) J_\nu^2(\lambda_{\nu, k}) + \lambda_{\nu, k}^2 J_\nu'^2(\lambda_{\nu, k})]} \equiv - \\ &\equiv - \frac{2}{\pi} T_{\nu, k} f(\lambda_{\nu, k}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Интеграл в правой части формулы (1.2) можно записать в виде

$$\sum_{\alpha=-1,1}^{i\alpha=\infty} \int_0^{i\alpha} f(z) \frac{\overline{H}_\nu^{(\alpha)}(z)}{J_\nu(z)} dz, \quad (2.5)$$

где особенности на мнимой оси (включая точку $z = 0$) обходятся справа. Рассмотрим два случая.

а). Допустим, что $f(z)$ не имеет особенностей на мнимой оси (кроме, быть может, $z = 0$) и

$$f(ze^{\pi i}) = -e^{2\pi i} f(z) + o(z^3), \quad \text{при } z \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

(в частности это условие выполняется если $f(z) = o(z^3)$). Здесь

$$\beta = \begin{cases} 2|\operatorname{Re} \nu| - 1, & \text{если } \nu - \text{целое} \\ |\operatorname{Re} \nu| + |\operatorname{Re} \nu| - 1, & \text{если } \nu - \text{нецелое.} \end{cases}$$

В этом случае для значений ν , при которых $\overline{J}_\nu(z)$ не имеет чисто мнимых корней, интеграл (2.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\overline{K}_\nu(x)}{\overline{I}_\nu(x)} [e^{-\nu x} f(xe^{\pi i/2}) + e^{\nu x} f(xe^{-\pi i/2})] dx + \\ & + \sum_{\alpha} \int_{\overline{J}_\nu^\alpha} f(z) \frac{\overline{H}_\nu^{(\alpha)}(z)}{J_\nu(z)} dz, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\overline{\Gamma}_\rho^1$ и $\overline{\Gamma}_\rho^{-1}$ — верхняя и нижняя половины полуокружности радиуса ρ , лежащей в правой полуплоскости с центром в $z = 0$, которые обходятся в положительном направлении относительно этой точки. В первом интеграле вместо обычных функций Бесселя введены модифицированные функции Бесселя I, K , [5]. Из условия (2.6) следует, что

$$f(z) \frac{\overline{H}_\nu^{(1)}(z)}{J_\nu(z)} = f(z_1) \frac{\overline{H}_\nu^{(2)}(z_1)}{J_\nu(z_1)} + o(z^{-1}), \quad z_1 = ze^{-\pi i}.$$

Исходя из этого нетрудно показать, что при $\rho \rightarrow 0$

$$\sum_{\alpha} \int_{\overline{\Gamma}_\rho^\alpha} f(z) \frac{\overline{H}_\nu^{(\alpha)}(z)}{J_\nu(z)} dz = -\pi \operatorname{Res}_{z=0} \left[f(z) \frac{\overline{Y}_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right]. \quad (2.8)$$

С помощью (1.2), (2.7), (2.8) получаем

Следствие 2.1. Если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ (с возможной точкой ветвления $z = 0$) кроме полюсов $z_k (\neq \lambda_{\nu, k})$, $\operatorname{Re} z_k > 0$ и удовлетворяет условиям (2.3) и (2.6), то для таких ν , когда $\overline{J}_\nu(z)$ не имеет чисто мнимых корней, справедлива формула

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} T_{\nu, k} f(\lambda_{\nu, k}) - p. v. \int_0^{\infty} f(x) dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\overline{K}_\nu(x)}{\overline{I}_\nu(x)} [e^{-\nu x} f(xe^{\pi i/2}) +$$

$$+ e^{x+i} f(xe^{-\pi i/2})] dx - r_1, [f(z)] + \frac{\pi}{2} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\bar{Y}_v(z)}{J_v(z)} f(z), \quad (2.9)$$

где введено обозначение

$$r_1, [f(z)] \equiv \pi i \sum_{a, k} a \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z_k > 0} f(z) \frac{\bar{H}_v^{(a)}(z)}{J_v(z)} - \pi \sum_k \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z_k = 0} f(z) \frac{\bar{Y}_v(z)}{J_v(z)}, \quad a = -1, 1. \quad (2.10)$$

б). Пусть теперь функция $f(z)$ удовлетворяет условию.

$$f(xe^{\pi i/2}) = -e^{2x+i} f(xe^{-\pi i/2}). \quad (2.11)$$

В частности, если $f(z)$ имеет чисто мнимые полюсы, то они комплексно сопряженные: $\pm iy_k$, $y_k > 0$. С помощью (2.11) интеграл в правой части формулы (1.2) можно записать в виде

$$\sum_{a, k} \int_{C_p(a\sigma_k)} f(z) \frac{\bar{H}_v^{(a)}(z)}{J_v(z)} dz, \quad \sigma_k = 0, iy_k, \lambda_{v, k}; \quad \arg \lambda_{v, k} = \pi/2,$$

где $C_p(+0) = \gamma_p^1$, $C_p(-0) = \gamma_p^{-1}$ (см. (2.7)), а контур $C_p(it)$ ($t \neq 0$) есть полуокружность радиуса ρ в правой полуплоскости с центром в точке it и с направлением обхода против часовой стрелки. Здесь учтено также, что чисто мнимые корни функции $\bar{J}_v(z)$ являются комплексно сопряженными, поскольку $\bar{J}_v(ze^{\pi i}) = e^{x+i} \bar{J}_v(z)$ и что согласно (2.11)

$$f(z) \cdot \frac{\bar{H}_v^{(1)}(z)}{J_v(z)} = f(z_1) \frac{\bar{H}_v^{(2)}(z_1)}{J_v(z_1)}, \quad z_1 = ze^{-\pi i}, \quad \arg z = \frac{\pi}{2}, \quad (2.12)$$

поэтому интегралы в правой части (1.2) по прямолинейным отрезкам вдоль верхней и нижней частей мнимой оси попарно сократятся. Из (2.12) следует равенство

$$\sum_a \int_{C_p(a\sigma_k)} f(z) \frac{\bar{H}_v^{(a)}(z)}{J_v(z)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\lambda_k} f(z) \frac{\bar{H}_v^{(1)}(z)}{J_v(z)}, \quad (2.13)$$

где $\sigma_k = iy_k$, $\lambda_{v, k}$, $\arg \lambda_{v, k} = \pi/2$. Если теперь учесть (2.8) то получим

Следствие 2.2. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в правой полуплоскости (кроме возможной точки ветвления $z=0$) с полюсами z_k , $\operatorname{Re} z_k > 0$ и $\pm iy_k$, $y_k > 0$, $k=1, 2, 3, \dots (\neq \lambda_{v, \rho})$. Если эта функция удовлетворяет (2.3) и (2.11), то

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} T_{v, k} f(\lambda_{v, k}) - p. v. \int_0^{\infty} f(x) dx = -\frac{i\pi i}{2} \times \times \sum_{\eta_k=0, iy_k} (2 - \delta_{0\eta_k}) \operatorname{Res}_{z=\eta_k} f(z) \frac{\bar{H}_v^{(1)}(z)}{J_v(z)} - r_{1, v} [f(z)]. \quad (2.14)$$

Напомним, что согласно предположению интегралы в левых частях (2.9) и (2.14) должны существовать.

Из (2.14) при $B = 0$, например, получаем [7]

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\mu+\nu+1}(j_{\nu, k}) J_{\nu}(j_{\nu, k} t)}{j_{\nu, k}^{\mu+1} J_{\nu+1}^2(j_{\nu, k})} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} J_{\mu+\nu+1}(z) J_{\nu}(zt) \frac{dz}{z^{\mu}} = \\ &= \frac{(1-t^2)^{\mu} t^{\nu}}{2^{\mu+1} \Gamma(\mu+1)}, \quad 0 < t \leq 1, \operatorname{Re} \mu, \operatorname{Re} \nu > -1. \end{aligned}$$

Если в формуле (2.14) функцию $f(z)$ выбрать в виде

$$f(z) = F(z) \bar{J}_{\nu}(z), \quad (2.15)$$

так чтобы сумма по нулям $\bar{J}_{\nu}(z)$ обратилась в нуль, то можно получить полезную формулу для вычисления интегралов, содержащих функцию $J_{\nu}(z)$. Условия (2.3) и (2.11) для функции $F(z)$ запишутся в виде

$$|F(z)| < \varepsilon_1(x) e^{c_1|y|} \text{ или } |F(z)| < \frac{M e^{|y|}}{|z|^{\alpha_1}} \text{ при } |z| \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

$$c_1 < 1, \varepsilon_1(x) = o(x^{1/2 - \delta_{B0}}) \text{ при } x \rightarrow \infty, \alpha_1 > 3/2 - \delta_{B0},$$

$$f(xe^{\pi i/2}) = -e^{\pi i} F(xe^{-\pi i/2}). \quad (2.17)$$

Здесь и далее $\delta_{BB'} = 1$ при $B = B'$ и $\delta_{BB'} = 0$ при $B \neq B'$. Таким образом, для функций, удовлетворяющих (2.16) и (2.17), верна формула

$$\begin{aligned} p. v. \int_0^{\infty} F(x) \bar{J}_{\nu}(x) dx &= r_{1\nu} [F(z) \bar{J}_{\nu}(z)] + \\ &+ \frac{\pi i}{2} \sum_{\gamma_k = 0, i y_k} (2 - \delta_{0\gamma_k}) \operatorname{Res} \bar{H}_{\nu}^{(1)}(z) F(z), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $z_k, \operatorname{Re} z_k > 0$ и $\pm i y_k, y_k > 0$ — полюсы функции $F(z)$, а $r_{1\nu}$ определяется формулой (2.10). Когда $F(z) = z^{\nu+1} \bar{F}(z)$, $\bar{F}(ix) = \bar{F}(-ix)$, а $\bar{F}(z)$ — аналитическая в правой полуплоскости функция, получаем

$$\int_0^{\infty} x^{\nu+1} \bar{F}(x) \bar{J}_{\nu}(x) dx = 0.$$

Этот результат при $B = 0$ был получен в [8].

Введем функционал

$$A_{\nu m} [G(z)] \equiv p. v. \int_0^{\infty} z^{\nu-2m-1} G(z) \bar{J}_{\nu}(z) dz, \quad (2.19)$$

где m — целое число. С помощью (2.18) легко убедиться в справедливости следующих результатов:

$$\begin{aligned}
 A_{\nu, m} [F_1(z)] &= A_{\nu, m}^{(0)} [F_1(z)] \equiv \\
 &\equiv \begin{cases} -\pi (d/dz)^{2m} [z^\nu \bar{Y}_\nu(z) F_1(z)]_{z=0} / 2(2m)!, & \text{при } m > 0 \\ 0, & \text{при } m < 0, \end{cases} \\
 A_{\nu, m} \left[\frac{F_1(z)}{z^2 - a^2} \right] &= \pi a^{\nu-2m-2} \bar{Y}_\nu(a) F_1(a) / 2 + A_{\nu, m}^{(0)} \left[\frac{F_1(z)}{z^2 - a^2} \right], \quad a > 0, \\
 A_{\nu, m} \left[\frac{F_1(z)}{z^4 - a^4} \right] &= -\frac{\pi}{4} a^{\nu-2m-4} [\bar{Y}_\nu(a) F_1(a) - \\
 &- (-1)^m \cdot \frac{2}{\pi} \bar{K}_\nu(a) F_1(ia)] + A_{\nu, m}^{(0)} \left[\frac{F_1(z)}{z^4 - a^4} \right],
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

и т. д. Здесь $F_1(z)$ — аналитическая в правой полуплоскости функция, $F_1(xe^{it/2}) = F_1(xe^{-it/2})$ и $F'(0) \neq 0$. Для обеспечения сходимости интеграла (2.19) в начале координат необходимо потребовать, чтобы в (2.20) $\operatorname{Re} \nu > m$. В качестве $F_1(z)$, например, можно выбрать следующие функции:

$$\begin{aligned}
 \prod_{l=1}^n (z^2 + z_l^2)^{-\mu_l/2} J_{\mu_l}(b_l \sqrt{z^2 + z_l^2}), \quad \operatorname{Re} \nu < \sum_{l=1}^n \operatorname{Re} \mu_l + 2m + (n+1)/2 - \delta_{B_0} + \delta_{B_0}, \\
 z^{-2n} \prod_{l=1}^n [1 - J_0(b_l z)], \quad \operatorname{Re} \nu < 2(m+n) + 1/2 + \delta_{B_0} - \delta_{B_0}, \\
 \prod_{l=1}^n (z^2 + z_l^2)^{\mu_l/2} Y_{\mu_l}(b_l \sqrt{z^2 + z_l^2}), \quad \operatorname{Re} \nu < 2m - \\
 - \sum_{l=1}^n \mu_l + (n+1)/2 - \delta_{B_0} + \delta_{B_0}, \quad \mu_l > 0 - \text{полуцелые числа}, \\
 \prod_{l=1}^n z^{i k_l} [J_{\nu_l + k_l}(a_l z) Y_{\mu_l}(b_l z) - Y_{\nu_l + k_l}(a_l z) J_{\mu_l}(b_l z)], \\
 c \equiv \sum_{l=1}^n |a_l - b_l| \leq 1, \quad k_l - \text{целые числа}, \\
 \operatorname{Re} \nu < 2m + n - \sum_{l=1}^n |k_l| + 1/2 + \delta_{B_0} - \delta_{B_0}, \quad a_l, \operatorname{Re} \mu_l \geq 0 \\
 (\text{при } \operatorname{Re} \mu_l < 0 \quad k_l > |\operatorname{Re} \mu_l|),
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

а также любые их произведения (при соответствующих условиях на постоянные). Здесь $b \equiv \sum_{l=1}^n b_l$, $b_l > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\operatorname{Re} \nu > m$. В (2.21) рядом с функциями выписаны условия, при которых справедлива первая из формул в (2.20). Условия применимости II и III формул (2.20) к функциям (2.21) получаются из неравенств для $\operatorname{Re} \nu$, приведенных в (2.21), если к их правым частям прибавить 2 и 4, соответственно.

Рассмотрим приложения полученных формул к рядам вида $\sum_{k=1}^{\infty} G(\lambda_{\nu, k}) J_{\mu}(\lambda_{\nu, k} t)$. Следующая теорема позволяет просуммировать довольно широкий класс таких рядов.

Теорема 2.1. Если функция $F(z)$ мероморфна в полуплоскости $\text{Re}(z) > 0$ (кроме, быть может, точки $z=0$) с полюсами z_k , $\text{Re } z_k > 0$ и $\pm iy_k$, $y_k > 0$ ($\neq \lambda_{\nu, l}$) удовлетворяет условию

$$F(xe^{-x/2}) = (-1)^{m+1} e^{xt} F(xe^{-xt/2}) \quad (2.22)$$

(m —целое число) и одному из неравенств

$$|F(z)| < \varepsilon_1(x) e^{a|y|} \quad \text{или} \quad |F(z)| < \frac{Me^{a_0|y|}}{|z|^{a_1}} \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.23)$$

где $a < \min(t, 2-t) = a_0$, то верна формула

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} T_{\nu, k} F(\lambda_{\nu, k}) J_{\nu+m}(\lambda_{\nu, k} t) = \\ & = \frac{\pi}{4} \sum_{\gamma_k = 0, iy_k, z_k} (2 - \delta_{0, \gamma_k}) \text{Res} [J_{\nu+m}(zt) \bar{Y}_{\nu}(z) - Y_{\nu+m}(zt) \bar{J}_{\nu}(z)] \frac{F(z)}{J_{\nu}(z)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Она непосредственно вытекает из (2.14), если положить $f(z) = F(z) J_{\nu+m}(zt)$, а для вычисления интеграла в левой части воспользоваться (2.18). Из выражений, выведенных в этом параграфе, можно получить формулы суммирования по нулям функции $J_{\nu}(z)$ (в частности для рядов Фурье-Бесселя), положив $B = 0$.

Замечание. Равенство (2.24) можно получить также, если рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C [\bar{Y}_{\nu}(z) J_{\nu+m}(zt) - \bar{J}_{\nu}(z) Y_{\nu+m}(zt)] \frac{F(z)}{J_{\nu}(z)} dz,$$

где C тот же контур, что и в (1.3), а чисто мнимые полюсы функций $F(z)$, $1/J_{\nu}(z)$ и начало координат обходятся по малым полуокружностям в правой полуплоскости, и воспользоваться при этом теоремой Коши о вычетах.

Из (2.24) при $m=0$, $F(z) = z J_{\nu}(zx)/(z^2 - a^2)$, $B=0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\nu}(\lambda_{\nu, k}(x)) J_{\nu}(\lambda_{\nu, k}(t))}{(\lambda_{\nu, k}^2 - a^2) J_{\nu+1}^2(\lambda_{\nu, k})} &= \frac{\pi}{4} \frac{J_{\nu}(ax)}{J_{\nu}(a)} [J_{\nu}(at) Y_{\nu}(a) - \\ & - Y_{\nu}(at) J_{\nu}(a)], \quad 0 \leq x \leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Отметим, что приведенное в [7] выражение для суммы этого ряда при $t = a$ не совпадает с (2.25).

Если выполнено условие (2.23), то в (2.24) в качестве $F(z)$ можно выбрать функции (2.21), умноженные на z^{γ} , $\gamma = \nu + m - 2p - 1$ (p —целое число), а также любые произведения этих функций между собой и с $\prod_{l=1}^n (z^2 - c_l^2)^{-k_l}$. Например, имеют место следующие формулы суммирования, которые в литературе, по-видимому, не рассматривались (ниже $B=0$, т. е. $J_{\nu}(\lambda_{\nu, k}) = 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\nu, k}^{\gamma-2} \frac{J_{\nu}(\lambda_{\nu, k}(t))}{J_{\nu+1}^2(\lambda_{\nu, k})} \prod_{l=1}^n [J_{\mu_l}(a_l \lambda_{\nu, k}) Y_{\mu_l}(b_l \lambda_{\nu, k}) - Y_{\mu_l}(a_l \lambda_{\nu, k}) J_{\mu_l}(b_l \lambda_{\nu, k})] = \\ = \frac{2^{\gamma-2} \Gamma(\nu)}{\pi^n t^{\gamma}} (1-t^{2\nu}) \prod_l \frac{b_l^{\mu_l}}{\mu_l a_l^{\mu_l}} \left[1 - \left(\frac{a_l}{b_l} \right)^{2\mu_l} \right], \end{aligned}$$

$$0 < t \leq 1, c \equiv \sum_{l=1}^n |a_l - b_l| \leq t \leq 1, a_l, b_l > 0, \operatorname{Re} \mu_l \geq 0,$$

$$\operatorname{Re} \nu < n + 3/2 - \delta_{ct},$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{J_{\nu+1}(\sigma \lambda_{\nu, k}) J_{\nu}(\theta_{\nu, k})}{\lambda_{\nu, k}^{2\nu+3} J_{\nu+1}^2(\lambda_{\nu, k})} \prod_{l=1}^n [1 - J_0(b_l \lambda_{\nu, k})] = \\ & = \frac{\sigma^{\nu+1} (1-t^2)}{4^{\nu+1} \nu(\nu+1) t^{\nu}} \prod_{l=1}^n b_l^2, \quad \sigma + \sum_{l=1}^n b_l \leq t \leq 1, \sigma_l, b_l > 0, \\ & \sum_{k=1}^n \frac{J_{\nu+1}(\sigma \lambda_{\nu, k}) J_{\mu}(b \lambda_{\nu, k})}{(\theta_{\nu, k}^2 - a^2) \lambda_{\nu, k}^{\mu+1} J_{\nu+1}^2(\theta_{\nu, k})} J_{\nu}(\theta_{\nu, k}) = \\ & = \frac{\pi}{4a^{\mu+1}} \frac{J_{\mu}(ba)}{J_{\nu}(a)} J_{\nu+1}(a\sigma) [Y_{\nu}(a) J_{\nu}(at) - J_{\nu}(a) Y_{\nu}(at)], \\ & \quad \sigma + b \leq t \leq 1, \sigma, b > 0, \operatorname{Re} \mu > -7/2 + \delta_{\sigma+b, t}, \end{aligned}$$

и т. д. Все известные нам ряды по нулям функции $\bar{J}_{\nu}(z)$ (см., например, [4, 6, 7]) являются частными случаями полученных формул.

§ 3. Интегралы, содержащие цилиндрические функции

Ниже с помощью обобщенной формулы Абеля-Плана мы вычислим ряд интегралов, содержащих цилиндрические функции. Пусть функция $F(z)$ при $\operatorname{arg} z = \pi/2$ удовлетворяет условию

$$F(ze^{-\pi i}) = -e^{-\lambda z} F(z), \quad (3.1)$$

где λ —некоторое число. В формуле (1.2) в качестве функций $f(z)$ и $g(z)$ выберем

$$\begin{aligned} f(z) &= F(z) [J_{\nu}(z) \cos \delta + Y_{\nu}(z) \sin \delta], \\ g(z) &= -iF(z) [J_{\nu}(z) \sin \delta - Y_{\nu}(z) \cos \delta], \quad \delta = (\lambda - \nu) \pi/2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Их сумма и разность равны

$$g(z) + af(z) = aH_{\nu}^{(a)}(z) F(z) e^{-i\delta a}, \quad a = -1, 1.$$

При таком выборе исходных функций интеграл в правой части (1.2) равен

$$\pi i \sum_{\substack{\gamma_k = 0, i y_k \\ z = \gamma_k}} (1 - \delta_{0\gamma_k}/2) \operatorname{Res} H_{\nu}^{(1)}(z) F(z) e^{-i\delta},$$

где $\pm i y_k, y_k > 0$, как и прежде, чисто мнимые полюсы функции $F(z)$. Теперь из (1.2) получаем

Следствие 3.1. Если функция $F(z)$ мероморфна в $\operatorname{Re} z > 0$ (кроме, быть может, $z=0$) с полюсами $z_k, \operatorname{Re} z_k > 0, \pm i y_k, y_k > 0$ и удовлетворяет условиям (2.16) ($B=0$), (3.1), то верна формула

$$\begin{aligned} B[f(z)] &\equiv p. v. \int_0^{\infty} F(x) [J_{\nu}(x) \cos \delta + Y_{\nu}(x) \sin \delta] dx = \\ &= \pi i \left\{ \sum_{\substack{\alpha, k \\ \alpha \operatorname{Im} z_k > 0}} a \operatorname{Res}_{\alpha \operatorname{Im} z_k > 0}^2 H_{\nu}^{(a)}(z) F(z) e^{-i\delta a} - i \sum_k \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z_k = 0} [J_{\nu}(z) \sin \delta - \right. \end{aligned}$$

$$- Y_\nu(z) \cos \delta] F(z) + \sum_{\tau_k=0, i, y_k} (1 - \delta_{0\tau_k}/2) H_\nu^{(1)}(z) F(z) e^{-i\delta} \}, \quad (3.3)$$

где предполагается, что интеграл в левой части существует, а $\delta = (\lambda - \nu) \pi/2$.

В частности, отсюда при $\delta = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, вытекает формула (2.18) при $B = 0$. Из (3.3) следует, что [4, 7]

$$\int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{x^2 + z^2} \prod_{l=1}^n J_{\mu_l}(b_l x) [J_\nu(x) \cos \delta + Y_\nu(x) \sin \delta] dx =$$

$$= -z^{\rho-2} K_\nu(z) \prod_{l=1}^n I_{\mu_l}(b_l z).$$

$$\delta = \left(\rho + \sum_1^n \mu_l - \nu \right) \pi/2, \quad 2 \operatorname{Re} \rho < n + 7 - \delta_{b_1}, \quad b \equiv \sum b_l \leq 1, \quad b_l > 0,$$

$$|\operatorname{Re} \nu| < \operatorname{Re} \rho + \sum \operatorname{Re} \mu_l.$$

Если $\delta \neq \pi n$, то для аналитической в $\operatorname{Re} z \geq 0$ функции $F(z)$ с помощью формулы (3.3) получаем

$$B_\nu[F(z)] = 0,$$

$$B_\nu[F(z)/z^2 - a^2] = \pi F(a) [J_\nu(a) \sin \delta - Y_\nu(a) \cos \delta]/2, \quad a > 0, \quad (3.4)$$

$$B_\nu \left[\frac{F(z)}{(z^2 - c^2)^{p+1}} \right] = \frac{\pi}{2^{p+1} p!} \left(\frac{d}{z dz} \right)^p \left[F(z) \frac{H_\nu^{(1)}(z)}{z} \right]_{z=c} e^{-i\delta},$$

$$0 < \arg c < \frac{\pi}{2}, \quad p - \text{целое число.}$$

Из первой формулы, в частности, при $\delta = \pi(n + 1/2)$, $F(z) = z^\nu F_1(z)$, $F_1(ix) = F_1(-ix)$ имеем [8]

$$\int_0^\infty x^\nu F_1(x) Y_\nu(x) dx = 0.$$

В качестве $F(z)$ в (3.4) можно выбрать функции

$$z^{\rho-1} \prod_{l=1}^n (z^2 + z_l^2)^{-\mu_l/2} J_{\mu_l}(b_l \sqrt{z^2 + z_l^2}), \quad \lambda = \rho, \quad |\operatorname{Re} \nu| < \operatorname{Re} \rho < \sum \operatorname{Re} \mu_l +$$

$$+ (\pi + 3)/2 - \delta_{b_1}, \quad (3.5)$$

$$z^{\rho-1} \prod_{l=1}^n [1 - J_0(b_l z)], \quad \lambda = \rho, \quad |\operatorname{Re} \nu| - 2n < \operatorname{Re} \rho < 3/2 - \delta_{b_1},$$

$$z^{\rho-1} \prod_{l=1}^n [J_{\mu_l+k_l}(a_l z) Y_{\mu_l}(b_l z) - Y_{\mu_l+k_l}(a_l z) J_{\mu_l}(b_l z)],$$

$$\lambda = \rho + \sum_{l=1}^n k_l, \quad c \equiv \sum_{l=1}^n |a_l - b_l| \leq 1,$$

$a_l > 0, |\operatorname{Re} \nu| + \sum |k_l| < \operatorname{Re} \rho < n + 3/2 - \delta_{c_1}, \operatorname{Re} \mu_l > 0$ (при $\operatorname{Re} \mu_l < 0, k_l \leq |\operatorname{Re} \mu_l|$)

и любые их произведения (k_i — целые числа). Здесь $b_n > 0$, $b = \sum b_i < 1$. В (3.5) выписаны достаточные условия, при выполнении которых имеет место первая из формул (3.4). Аналогичные условия для II и III формул (3.4) отличаются от приведенных в (3.5) наличием в правых частях неравенств для $\operatorname{Re} \rho$ дополнительных слагаемых $2, 2(\rho+1)$, соответственно.

Рассмотрим теперь интегралы, содержащие функцию $J_\nu(z) Y_\nu(\lambda z) - J_\nu(\lambda z) Y_\nu(z)$. В обобщенной формуле Абеля—Плана положим

$$f(z) = \frac{1}{2i} \sum_a \alpha \frac{H_\nu^{(a)}(\lambda z)}{H_\nu^{(a)}(z)} F(z), \quad g(z) = \frac{1}{2i} \sum_a \frac{H_\nu^{(a)}(\lambda z)}{H_\nu^{(a)}(z)} F(z), \quad \alpha = -1, 1, \quad (3.6)$$

$H_\nu^{(-1)} \equiv H_\nu^{(2)}$. Для определенности рассмотрим случай $\lambda > 1$ (при $\lambda < 1$ выражение для $g(z)$ нужно выбрать с обратным знаком). Для выполнения условий (1.1) достаточно потребовать, чтобы функция $F(z)$ удовлетворяла одному из неравенств

$$|F(z)| < \varepsilon(x) e^{c|y|}, \quad c < \lambda - 1 \quad \text{или} \quad |F(z)| < \frac{M e^{(\lambda-1)|y|}}{|z|^a}, \quad |z| \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

($\varepsilon(x)$ и a те же, что и в (2.3)). Тогда из (1.2) следует, что для мероморфной в $\operatorname{Re} z > 0$ функции $F(z)$ с полюсами z_k , $\operatorname{Re} z_k > 0$ имеет место формула

$$\begin{aligned} C_{\nu, \lambda} [F(z)] &\equiv p. v. \int_0^\infty \frac{J_\nu(x) Y_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x) Y_\nu(x)}{J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x)} F(x) dx = \\ &= \frac{1}{2i} \sum_a \alpha \int_0^{i\infty} F(z) \frac{H_\nu^{(a)}(\lambda z)}{H_\nu^{(a)}(z)} dz + r_2[F(z)], \end{aligned} \quad (3.8)$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} r_2[F(z)] &= \pi \sum_{a, k} \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z_k > 0} F(z) \frac{H_\nu^{(a)}(\lambda z)}{H_\nu^{(a)}(z)} + \frac{\pi}{2} \sum_k \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z_k = 0} \left[\frac{H_\nu^{(1)}(\lambda z)}{H_\nu^{(1)}(z)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{H_\nu^{(2)}(\lambda z)}{H_\nu^{(2)}(z)} \right] F(z), \end{aligned} \quad (3.9)$$

а в интеграле правой части особенности на мнимой оси (включая точку $z = 0$) обходятся в правой полуплоскости. Таким образом, можно сформулировать следующие утверждения.

Следствие 3.2. Если функция $F(z)$ мероморфна при $\operatorname{Re} z > 0$ (кроме, быть может, $z = 0$) с полюсами z_k , $\operatorname{Re} z_k > 0$ и $\pm iy_k$, $y_k > 0$, удовлетворяет одному из неравенств (3.7) и условию

$$F(xe^{-\pi/2}) = -e^{(a-\nu)z} F(xe^{-\pi/2}), \quad (3.10)$$

то для значений ν , при которых $H_\nu^{(1)}(z)$ ($H_\nu^{(2)}(z)$) не имеет нулей в квадранте $0 \leq \arg z \leq \pi/2$ ($-\pi/2 \leq \arg z < 0$), имеет место формула

$$C_{\nu, \lambda} [F(z)] = r_2[F(z)] + \frac{\pi}{2} \sum_{\tau_k = -\nu, 1-k} (\tau_k - \delta_{0, \tau_k}) \operatorname{Res}_{z = \tau_k} \frac{H_\nu^{(1)}(\lambda z)}{H_\nu^{(1)}(z)} F(z), \quad (3.11)$$

(предполагается, что в левой части интеграл существует).

Действительно, из условия (3.10) находим

$$\frac{H_{\mu}^{(1)}(\lambda z)}{H_{\nu}^{(1)}(z)} F(z) = \frac{H_{\mu}^{(2)}(\lambda z_1)}{H_{\nu}^{(2)}(z_1)} F(z_1), \quad z_1 = ze^{-\alpha} \quad (3.12)$$

и что если $F(z)$ имеет чисто мнимые полюсы, то они комплексно сопряженные: $\pm iy_k$, $y_k > 0$. Следовательно, интеграл в правой части (3.8) можно представить в виде

$$\sum_{\substack{\alpha, \sigma_k \\ C_p(\alpha\sigma_k)}} \int F(z) \frac{H_{\mu}^{(\alpha)}(\lambda z)}{H_{\nu}^{(\alpha)}(z)} dz, \quad \sigma_k = 0, \quad iy_k$$

(о контурах $C_p(\alpha\sigma_k)$ см. выше). Воспользовавшись (3.12) и тем, что в (3.11) интеграл сходится в нуле, получаем

$$\sum_{\substack{\alpha \\ C_p(\alpha\sigma_k)}} \int F(z) \frac{H_{\mu}^{(\alpha)}(\lambda z)}{H_{\nu}^{(\alpha)}(z)} dz = (2 - \delta_{0\sigma_k}) \pi i \operatorname{Res}_{z=\sigma_k} \frac{H_{\mu}^{(1)}(\lambda z)}{H_{\nu}^{(1)}(z)} F(z), \quad (3.13)$$

откуда с помощью (3.8) приходим к формуле (3.11). Отметим, что вычет в точке $z = 0$ можно записать также в виде

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{H_{\mu}^{(1)}(\lambda z)}{H_{\nu}^{(1)}(z)} F(z) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{J_{\mu}(\lambda z) Y_{\nu}(z) + Y_{\mu}(\lambda z) Y_{\nu}(z)}{J_{\nu}^2(z) + Y_{\nu}^2(z)} F(z).$$

Все известные нам интегралы вида (3.11) (см. [7, 9]) являются частными случаями этой формулы. Например, из нее при соответствующем выборе $F(z)$ находим [9]

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(x) Y_{\nu}(\lambda x) - J_{\nu}(\lambda x) Y_{\nu}(x)}{J_{\nu}^2(x) + Y_{\nu}^2(x)} [J_{\nu}(x) Y_{\nu+1}(\lambda' x) - J_{\nu+1}(\lambda' x) Y_{\nu}(x)] dx =$$

$$= \begin{cases} -1/(\lambda^{\nu} \lambda'^{\nu+1}), & \lambda' < \lambda \\ (\lambda^{\nu} - \lambda'^{\nu})/\lambda'^{\nu+1}, & \lambda' > \lambda \end{cases}$$

где $\operatorname{Re} \nu > -1$. Если в качестве функции $F(z)$ выбрать $z^{2m+1}/(z^2 + a^2)$, $z^{2m+1}/(z^2 - c^2)$, то при $\mu = \nu$ и целых значениях $m \geq 0$ получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(x) Y_{\nu}(\lambda x) - J_{\nu}(\lambda x) Y_{\nu}(x)}{J_{\nu}^2(x) + Y_{\nu}^2(x)} \frac{x^{2m+1} dx}{x^2 + a^2} =$$

$$= (-1)^m a^m \frac{\pi}{2} \frac{K_{\nu}(\lambda a)}{K_{\nu}(a)}, \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad \lambda > 1,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(x) Y_{\nu}(\lambda x) - J_{\nu}(\lambda x) Y_{\nu}(x)}{J_{\nu}^2(x) + Y_{\nu}^2(x)} \frac{x^{m+1} dx}{x^2 - c^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} c^{2m} \frac{J_{\nu}(c) J_{\nu}(\lambda c) + Y_{\nu}(c) Y_{\nu}(\lambda c)}{J_{\nu}^2(c) + Y_{\nu}^2(c)}, \quad c > 0, \quad \lambda > 1.$$

Частные случаи этих формул при $\nu = m = 0$ приведены в [9]. В (3.11) вместо $F(z)$ можно выбрать функции (3.5) (при соответствующих усло-

виях на постоянные, см. неравенства (3.7)), где $\rho = \mu - \nu - 2m$ (m — целое число), а также произведения этих функций между собой и с

$\prod_{l=1}^n (z^2 - c_l^2)^{-k_l}$. Например

$$\int_0^{\infty} \frac{J_\nu(x) Y_\nu(\lambda x) - J_\nu(\lambda x) Y_\nu(x)}{J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x)} \prod_{l=1}^n (x^2 + z_l^2)^{-\lambda_l/2} j_{\nu_l}(b_l \sqrt{x^2 + z_l^2}) \frac{dx}{x} = \\ = \frac{\pi}{2\lambda} \prod_{l=1}^n z_l^{-\nu_l} J_{\nu_l}(b_l z_l),$$

$$\operatorname{Re} \nu > 0, b \equiv \sum b_l \leq \lambda - 1, b_l > 0, \operatorname{Re} z_l \geq 0, \sum_1^n \operatorname{Re} \mu_l + n/2 + 1 > \delta_{b, \lambda - 1}.$$

Следствие 3.3. Пусть функция $F(z)$ мероморфна в правой полуплоскости (кроме, быть может, $z=0$) с полюсами $z_l, \operatorname{Re} z_l > 0$, удовлетворяет условию

$$F(ze^{\pi i}) = -e^{(\mu-\nu)\pi i} F(z) + o(z^{[\operatorname{Re} \mu_l - |\operatorname{Re} \nu| - 1]}), z \rightarrow 0$$

и одному из неравенств (3.7). Тогда для значений ν , при которых $H_\nu^{(1)}(z)$ ($H_\nu^{(2)}(z)$), не имеет корней в $0 \leq \arg z \leq \pi/2$ ($-\pi/2 \leq \arg z \leq 0$),] верна формула

$$C_{\mu, \nu} [F(z)] = r_2 [F(z)] + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{K_\mu(\lambda x)}{K_\nu(x)} [e^{(\nu-\mu)\pi i/2} F(xe^{\pi i/2}) + \\ + e^{(\mu-\nu)\pi i/2} F(xe^{-\pi i/2})] dx + \frac{\pi}{2} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{H_\mu^{(1)}(\lambda x)}{H_\nu^{(1)}(z)} F(z), \lambda > 1, \quad (3.14)$$

если интеграл в левой части существует (определение $C_{\mu, \nu} [F(z)]$ см. (3.8)).

Оно непосредственно вытекает из (3.8) и (3.13) с $\sigma_k = 0$. С помощью (3.14), например, получаем

$$C_{\mu, \nu} \left[\prod_{l=1}^n J_{\mu_l}(b_l z) \right] = \cos(\nu - \mu + \sum_1^n \mu_l) \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{K_\mu(\lambda x)}{K_\nu(x)} \prod_{l=1}^n J_{\mu_l}(b_l x) dx, \\ \sum_1^n \operatorname{Re} \mu_l + |\operatorname{Re} \nu| > |\operatorname{Re} \mu| - 1, b \equiv \sum_1^n b_l < \lambda - 1, b_l > 0, \pi > 2 \delta_{b, \lambda - 1}.$$

Подобные формулы особенно удобны для численного расчета интегралов в их левых частях, так как подынтегральная функция в правой части на бесконечности не осциллирует и экспоненциально мала.

Я признателен Г. С. Саакяну и Л. Ш. Григоряну за интерес к работе и ценные обсуждения, а также участникам семинара кафедры высшей математики и математической физики Ереванского государственного университета за обсуждения конечных результатов работы.

Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ. Արեւ-Պլանայի ընդհանրացված բանաձևը: Կիրառություններ զլանային ֆունկցիաների նկատմամբ (ամփոփում)

Ապացուցվում է թեորեմ, որը ընդհանրացնում է Արեւ-Պլանայի հայտնի գումարման բանաձևը: Ինքնին են նրա կիրառությունները զլանային ֆունկցիաների նկատմամբ: Ստացված են գումարման բանաձևեր Բեսսելի ֆունկցիաների դրոներով շարքերի համար և բանաձևեր զլանային ֆունկցիաներ պարունակող որոշ ինտեգրալներ հաշվելու համար: Դրանց օգնությամբ հաշվված է ինտեգրալների ու շարքերի լայն դաս:

A. A. SAHARIAN. *Abel—Plana's generalized formula. Applications to cylindrical functions (summary)*

A theorem generalizing the well known Abel—Plana's summation formula is proved and applied to cylindrical functions. Summation formulas for series by zeros of the Bessel functions are derived. By these formulas a broad class of sums and integrals is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Евграфов. Аналитические функции, М., «Наука», 1968, 471 с.
2. С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, А. А. Старобинский. Рождение частиц из вакуума вблизи однородной изотропной сингулярности, ЖЭТФ, № 5, 1976.
3. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях, М., Атомиздат, 1980, 295 с.
4. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. Часть 1, М., ИИЛ, 1949, 798 с.
5. М. А. Абрамовиц, И. Стиган. Ред.-ры. Справочник по специальным функциям, М., «Наука», 830 с.
6. Г. Бейтмен, А. Эрлейи. Высшие трансцендентные функции, т. 2, М., «Наука», 1984, 296 с.
7. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды. Специальные функции, М., «Наука», 1983, 752 с.
8. Ch. Schwartz. A class of discontinuous integrals involving Bessel functions, J. Math. Phys., 23, № 12, 1982, 2266—2267.
9. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований, т. 2, Преобразование Бесселя. Интегралы от специальных функций, М., «Наука», 1970, 328 с.