ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517.986

А. М. АКОПЯН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТОЧЕЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ И АВТОМОРФИЗМОВ НА АЛГЕБРАХ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

В настоящей работе исследуются некоторые свойства точечных дифференцирований и автоморфизмов на алгебрах обобщенных аналитических функций, возникающих из рассмотрения произвольных полугрупп Γ_0 с делением (вместо полугруппы Z_+ целых неотрицательных чисел).

Пусть Γ — группа, порожденная полугруппой Γ_0 и $\hat{\Gamma}$ — ее компактная группа характеров. Согласно теореме двойственности Понтрягина, Γ отождествляется с группой характеров $\hat{\Gamma}$ соотношением $x \to \chi_x$, где $\chi_x(\alpha) = \alpha(x)$, $\alpha \in \hat{\Gamma}$.

Равномерная алгебра на $\hat{\Gamma}$, порожденная характерами χ_x, $x \in \Gamma_0$ будет в дальнейшем обозначаться через $A(\Gamma_0)$ (называемой алгеброй обобщенных аналитических функций в смысле Аренса—Зингера, [1]). Эта алгебра содержит в себе в качестве плотной подалгебры коммутативную банахову алгебру $l^1(\Gamma_0)$ (со сверткой в качестве произведения и нормой $\|f\| = \sum_{x \in \Gamma_0} |f(x)|$.

Простейший нетривиальный пример алгебры $A(\Gamma_0)$ — алгебра аналитических в единичном круге функций, непрерывных вплоть до границы; в этом случае $\Gamma_0 = Z_+$. В случае, когда Γ_0 — положительная часть некоторой подгруппы вещественных чисел, алгебра $A(\Gamma_0)$ изометрически изоморфна алгебре ограниченных аналитических почти периодических функций в верхней полуплоскости, см. [2].

Теория обобщенных аналитических функций берет свое начало с работы Аренса и Зингера [1], в которой впервые изучались аналитические почти периодические функции с позиций теории равномерных алгебр. За ней последовал цикл работ Аренса [2], [3], Гофмана [4] и других. В серии работ Хельсона и Лауденслагера [5—7] и Хельсона [8] дается относительно полное изложение основополагающих результатов в этом направлении (см. также монографию Гамелина [9], гл. VII).

В работе [1], в частности, показано, что пространствами максимальных идеалов алгебр $A(\Gamma_0)$ и $l^1(\Gamma_0)$ служит полугруппа $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ гомоморфизмов Γ_0 в единичный круг, а границей Шилова — группа $\widehat{\Gamma}$ характеров группы Γ. Толчком к настоящей работе послужила статья Аренса [2], посвященная в основном автоморфизмам алгебры $A(\Gamma_0)$, а также точечным дифференцированиям на $A(\Gamma_0)$. Исследованию точечных дифференцирований на $l^1(\Gamma_0)$ и автоморфизмов $A(\Gamma_0)$ для определенных классов полугрупп и посвящена данная работа.

В § 1 вводится понятие квазимаксимальной полугруппы и исследуются некоторые ее свойства. Класс таких полугрупп включает в себя все максимальные полугруппы. Для квазимаксимальных полугрупп Γ_0 в R_+ и для любых максимальных дается описание полугруппы $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ и, следовательно, пространств максимальных идеалов алгебр $A(\Gamma_0)$ и $l^1(\Gamma_0)$. Во втором параграфе результаты § 1 применяются для описания точечных дифференцирований на $l^1(\Gamma_0)$. Дифференцирования в точках, являющихся идемпотентами полугруппы $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$, описываются для произвольных полугрупп Γ_0. Описанию автоморфизмов $A(\Gamma_0)$ для некоторого класса полугрупп, содержащего в себе, в частности, и квазимаксимальные подполугруппы R_+, посвящен последний параграф статьи.

§ 1. Квазимаксимальные полугруппы

На протяжении всей статьи будем придерживаться следующих обозначений.

Через $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ уже была обозначена полугруппа характеров Γ_0 т. е. гомоморфизмов Γ_0 в единичный круг.

Характер $p \in \mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ называют положительным, если $p(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \Gamma_0$, идемпотентным, если $p^2 = p$.

Очевидно каждый идемпотентный характер положителен. Гомоморфизм $p \equiv 1$ будем называть тривиальным идемпотентом. Если G — максимальная группа в Γ_0, то через ρ_G будем обозначать идемпотент такой, что $\rho_G \equiv 1$ на G и $\rho_G \equiv 0$ на $\Gamma_0 \setminus G$. В случае, когда $G = \{0\}$, обозначим $\rho_0 = \rho_G$. Ясно, что множества всех идемпотентов и положительных характеров образуют полугруппы; их мы будем обозначать, соответственно, через $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ и $\mathrm{Phom}\,\Gamma_0$. В полугруппе $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ всегда имеются идемпотенты $p \equiv 1$ и ρ_G. Отметим, что если $p \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$, то $p^u \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$ при всех вещественных $u > 0$, где $p^u(x) = e^{u \ln p(x)}$, если $p(x) \neq 0$ и $p^u(x) = 0$ при $p(x) = 0$.

Для полугруппы Γ_0, содержащейся в одной и только одной максимальной полугруппе Γ_+ группы Γ, обозначим через $\nu(\Gamma_0)$ порядок максимальной группы, содержащейся в Γ_+. Напомним, что полугруппа Γ_0 называется максимальной, если любая полугруппа группы Γ, содержащая Γ_0, совпадает либо с Γ_0, либо с Γ. Для максимальных полугрупп Γ_0, условие $\nu(\Gamma_0) = 1$ равносильно тому, что в Γ_0 нет нетривиальной группы.

Заметим, что, если Γ_0 — максимальная полугруппа, то $\Gamma=\Gamma_0 \cup (-\Gamma_0)$. Более того, если Γ_0 не содержит нетривиальной группы, то для любых $x, y \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$ найдется такое целое $n>0$, что $nx-y \in \Gamma_0$, т. е. Γ_0 задает полный архимедов порядок на группе Γ. Как хорошо известно, каждая такая группа изоморфна аддитивной подгруппе группы R вещественных чисел, причем образ Γ_0 при этом изоморфизме содержится в R_+. Поэтому, не умаляя общности, можно максимальные полугруппы Γ_0 с $\nu(\Gamma_0)=1$ считать содержащимися в R_+. Кроме того, любая подгруппа R, отличная от группы Z целых чисел плотна в R в естественной топологии. В дальнейшем, если специально не оговаривается, будет предполагаться, что $\Gamma_0 \underline{\subset} Z_+$ (результаты для случая $\Gamma_0 \subseteq Z_+$ доказываются тривиально).

Предложение 1.1. *Пусть Γ_0 — максимальная полугруппа. Тогда:*

а) *полугруппа* $\operatorname{Ihom} \Gamma_0$ *содержит лишь один нетривиальный идемпотент;*

б) *для любых* $p, q \in \operatorname{Phom} \Gamma_0 \setminus \operatorname{Ihom} \Gamma_0$ *существует такое число* $u>0$, *что* $p^u = q$.

Доказательство. Пусть G — максимальная группа в Γ_0. Для любого $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0$ сужение $p/G = 1$; поэтому $\operatorname{Phom} \Gamma_0 = \operatorname{Phom} J_0$, а $\operatorname{Ihom} \Gamma_0 = \operatorname{Ihom} J_0$, где $J_0 = \Gamma_0/G$ — фактор-полугруппа Γ_0 по G. Полугруппа J_0 — максимальна (в фактор-группе Γ/G) и не содержит нетривиальной группы. Это очевидное замечание позволяет свести доказательство к случаю, когда в Γ_0 нет нетривиальной группы.

Тогда, в силу максимальности Γ_0, для любых $x, y \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$ найдется такое целое $n>0$, что $nx-y \in \Gamma_0$. Поэтому

$$p(nx)=p(nx-y)\,p(y) \tag{1.1}$$

для всех $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0$. Отсюда непосредственно следует, что если $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0$ отлично от ρ_0 и тождественной единицы, то $0<p(x)<1$ для всех $x \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$ (т. е. ρ_0 — единственный нетривиальный идемпотент; напомним, что $\rho_0(0)=1$, $\rho_0(x)=0$, $x \neq 0$). Продолжим p на всю группу, полагая $p(x)=[p(-x)]^{-1}$ для $x \in (-\Gamma_0)$. Тогда $\Phi(x) = -\ln p(x)$ определяет линейную монотонно возрастающую функцию на Γ. Легко показать, что каждая такая функция продолжается до линейной функции на R; поэтому найдется такое $u>0$, что $\Phi(x)=ux$, т. е. $p(x) = e^{-ux}$ для всех $x \in \Gamma_0$. Предложение доказано.

Определение 1.1. Полугруппу Γ_0 назовем квазимаксимальной, если любая полугруппа группы Γ, содержащая Γ_0, совпадает либо с Γ, либо содержится в одной и только одной максимальной полугруппе группы Γ.

Ясно, что любая максимальная полугруппа — квазимаксимальна. Для некоторых квазимаксимальных полугрупп можно доказать аналог предложения 1.1. (предл. 1.2.).

Очевидно, что квазимаксимальная полугруппа может содержаться только в одной максимальной полугруппе. В частности, все подполугруппы Γ, отличные от Γ и содержащие Γ_0, лежат в одной и той же максимальной подполугруппе Γ.

Отметим, что в силу вышеприведенных замечаний, для квазимаксимальной полугруппы Γ_0 условие $\nu(\Gamma_0)=1$ равносильно тому, что Γ_0 изоморфна некоторой подполугруппе R_+. В дальнейшем, без ограничения общности, такие полугруппы будем рассматривать как полугруппы в R_+.

Предложение 1.2. *Пусть Γ_0— квазимаксимальная полугруппа и* $\nu(\Gamma_0)=1$. *Тогда*:

а) *полугруппа* $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ *состоит из* ρ_0 *и* $\rho\equiv 1$;

б) *для любых* $p, q\in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0\setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ *существует* $u>0$ *такое, что* $p^u=q$.

Доказательство. Для $p\in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$ положим $J=\{x\in\Gamma_0: : p(x)=0\}$ и обозначим через Γ_1 полугруппу, порожденную множеством $\Gamma_0\cup(-J)$. Поскольку полугруппа Γ_1 содержит нетривиальную группу, порожденную множеством J, то, в силу наших предположений, $\Gamma_1=\Gamma$. Тогда для любого $x\in\Gamma_0$ существуют такие $x_0\in\Gamma_0$ и $x_1\in J$, что $-x=x_0-x_1$, откуда $p(x_1)=p(x_0)p(x)$. Отсюда следует, что если p — идемпотент, то либо $p\equiv 1$, либо $p=\rho_0$. В случае же, когда $p\in \mathrm{Phom}\ \Gamma_0\setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$, мы получаем, что $p(x)>0$ для всех $x\in\Gamma_0$.

Продолжим гомоморфизм $p\in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0\setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ на всю группу Γ, полагая $p(x)=[p(-x)]^{-1}$ для $x\in(-\Gamma_0)$ и определим взаимно-однозначное отображение $\Phi:\Gamma\to R\times R$, задаваемое формулой $\Phi(x)= =(x, -\ln p(x))$. Ясно, что образ $\Phi(\Gamma_0)$ полугруппы Γ_0, образующий, очевидно, подполугруппу в $R\times R$, содержится в первой четверти комплексной плоскости. Мы хотим показать, что $\Phi(\Gamma_0)$ расположена на некоторой прямой, проходящей через начало координат. Предположим противное. Понятно, что в этом случае каждая четверть комплексной плоскости будет содержать более чем одну точку из группы $\Phi(\Gamma)$. Следовательно, мы можем провести две такие прямые l_1 и l_2, проходящие через начало координат, что пересечение соответствующих им полуплоскостей Π_{l_1} и Π_{l_2}, целиком содержащих в себе $\Phi(\Gamma_0)$ с группой $\Phi(\Gamma)$ образуют две различные максимальные подполугруппы в $\Phi(\Gamma)$. Таким образом, прообразы множеств $\Pi_{l_1}\cap\Phi(\Gamma)$ и $\Pi_{l_2}\cap\Phi(\Gamma)$ дают нам две различные максимальные подполугруппы Γ, содержащие Γ_0, что противоречит квазимаксимальности Γ_0.

Итак, найдется такое $u>0$, что $-\ln p(x)=ux$, т. е. $p(x)=e^{-ux}$ для всех $x\in\Gamma_0$. Предложение доказано.

Учитывая теперь тот факт, что пространства $M_{A(\Gamma_0)}$ и $M_{l^1(\Gamma_0)}$ максимальных идеалов алгебр $A(\Gamma_0)$ и $l^1(\Gamma_0)$ совпадают с $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ и, что для каждого характера $\zeta\in\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ имеется полярное разложение $\zeta=p\alpha$, где $p\in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$, а α — характер группы Γ (см. [1]), можем заключить, что предложения 1.1. и 1.2. дают описание пространств $M_{A(\Gamma_0)}$ и $M_{l^1(\Gamma_0)}$, соответственно, для произвольных максимальных полугрупп Γ_0 и квазимаксимальных полугрупп Γ_0 с $\nu(\Gamma_0)=1$. (Пространством M_A максимальных идеалов банаховой алгебры A называется совокупность всех нетривиальных гомоморфизмов A в поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел).

Следующее утверждение характеризует квазимаксимальные полугруппы в R_+.

Предложение 1.3. *Пусть Γ_0 — полугруппа неотрицательных действительных чисел. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *полугруппа Γ_0 — квазимаксимальна;*

б) *для каждого $x \in \Gamma$ найдется целое n, такое, что $nx \in \Gamma_0$;*

в) *для любых $x, y \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$, либо $[x-y, \Gamma_0]=\Gamma$, либо $[y-x, \Gamma_0]=\Gamma$.*

Доказательство. Через $[x, \Gamma_0]$ мы обозначаем полугруппу, порожденную элементом $x \in \Gamma$ и полугруппой Γ_0. Положим также $\Gamma_+ = \Gamma \cap R_+$; очевидно, полугруппа Γ_+ — максимальна.

а) $\Rightarrow$ б). В силу квазимаксимальности Γ_0, для любого $x \in \Gamma_+ \setminus \Gamma_0$, $[-x, \Gamma_0] = \Gamma$. Следовательно, существуют $x_0 \in \Gamma_0$ и целое $n > 0$, такие, что $x = x_0 - nx$, откуда $(n+1)x \in \Gamma_0$.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $x, y \in \Gamma_0$ и $x - y \in \Gamma_+$. Для доказательства в) достаточно показать, что $(-\Gamma_0) \subset [y-x, \Gamma_0]$. По условию, $n(x-y) \in \Gamma_0$ при некотором целом n, откуда $x - y \in [y-x, \Gamma_0]$. Пусть $-z \in \Gamma_0$. Так как Γ_+ максимальна, то найдется такое целое $m > 0$, что $m(x-y) + z \in \Gamma_+$. Опять, ссылаясь на условие б), можем написать, что $\omega = k[m(x-y)+z] \in \Gamma_0$ при некотором целом $k > 0$, откуда $z = km(y-x) + \omega + (k-1)(-z) \in [y-x, \Gamma_0]$.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть Γ_1 — подполугруппа Γ, содержащая Γ_0, но не содержащаяся в Γ_+. Тогда, если $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_+$, то по условию, $[x, \Gamma_0] = \Gamma$, т. е. $\Gamma_1 = \Gamma$. Предложение доказано.

В заключение этого параграфа рассмотрим несколько примеров.

(1). Пусть Γ — произвольная подгруппа R. Тогда $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{x \in R_+ : x > u > 0\} \cup \{0\}$ — квазимаксимальная полугруппа.

(2). Любая полугруппа рациональных чисел квазимаксимальна.

(3). Примером полугруппы в R, не являющейся квазимаксимальной, служит полугруппа $\Gamma_\alpha = \{m + \alpha n : m, n \in \mathbf{Z}_+\}$, α — положительное иррациональное число.

Справедливость утверждений (1)—(3) легко проверяется непосредственно из условия б) предложения 1.3.

Рассмотрим несколько примеров полугрупп на плоскости.

(4). Полугруппа $\Gamma_0 = \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+$ не является квазимаксимальной. Действительно, каждая полугруппа $\Gamma_\alpha = \{(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : m + \alpha n > 0\}$, где α — иррациональное число, $\alpha > 0$, является максимальной, и Γ_0 лежит в каждой из них.

(5). Полугруппа $\Gamma_0 = \{(m, n) \in \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}$ при $m=0, n \geqslant 0\}$ — квазимаксимальна, порождает группу $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, причем $\nu(\Gamma_0) = \infty$. Полугруппа $\mathrm{Phom}\,\Gamma_0$ порождается характерами p_1, $p_1(m, n) = e^{-m}$ и p_2, $p_2(m, n) = 0$ при $m > 0$, $p_2(0, n) = e^{-n}$, причем $p_1 \neq p_2^u$ для всех $u > 0$. Нетривиальным идемпотентом, кроме ρ_0, служит также ρ_1, $\rho_1(m, n) = 0$ при $m > 0$, $\rho(0, n) = 1$. Пример (5) показывает, что утверждение предложения 1.2 в общем случае неверно.

§ 2. Точечные дифференцирования на алгебре $l^1(\Gamma_0)$

Напомним, что пространством максимальных идеалов алгебры $l^1(\Gamma_0)$ служит полугруппа Hom Γ_0. В связи с этим, удобно ассоциировать с функцией $f \in l^1(\Gamma_0)$ ряд

$$\hat{f}(\zeta) = \sum_{x \in \Gamma_0} f(x)\,\zeta(x),$$

абсолютно сходящийся в Hom Γ_0.

Функция $\hat{f}$ представляет собой так называемое преобразование Гельфанда элемента f из $l^1(\Gamma_0)$. Алгебра $\widehat{l^1(\Gamma_0)}$ преобразований Гельфанда совпадает в точности с множеством сумм абсолютно сходящихся рядов $\sum_{x \in \Gamma_0} c(x)\,\chi_x$ на компакте Hom Γ_0, $\sum_{x \in \Gamma_0} |c(x)| < \infty$, где $\chi_x(\zeta) = \zeta(x)$, $\zeta \in$ Hom Γ_0, характеры χ_x, $x \in \Gamma_0$ будем называть базисными функциями алгебры $l^1(\Gamma_0)$.

Всюду в дальнейшем функцию $f \in l^1(\Gamma_0)$ будем отождествлять с ее преобразованием Гельфанда.

Непрерывный линейный функционал D на $l^1(\Gamma_0)$ называется точечным дифференцированием (в ζ), если существует гомоморфизм $\zeta \in$ Hom Γ_0 такой, что

$$D(fg) = f(\zeta)\,D(g) + g(\zeta)\,D(f), \quad f, g \in l^1(\Gamma_0).$$

Пусть $\zeta = p\alpha$ — полярное разложение гомоморфизма $\zeta \in$ Hom Γ_0, где $p \in$ Phom Γ_0, $\alpha \in \hat{\Gamma}$. Непосредственно проверяется, что функционал D_ζ, определенный формулой

$$D_\zeta(f) = D_\omega f(\alpha p^{1+\omega})_{\omega=0}, \tag{2.1}$$

где $D_\omega(\cdot)/_{\omega=0}$ — обычная производная функции от комплексной переменной ω в точке $\omega = 0$, задает точечное дифференцирование в ζ (для $u+iv \in C$, $u \geqslant 0$ положим $p^{u+iv}(x) = \exp[(u+iv)\ln p(x)]$, при $p(x) \neq 0$ и $p^{u+iv}(x) = 0$, если $p(x) = 0$).

Если p — не идемпотент, то существует $x \in \Gamma_0$ такой, что $0 < p(x) < 1$ и тогда $D_\zeta(\chi_x) = \zeta(x)\ln p(x) \neq 0$. Если же p — идемпотент, то функция $F(\omega) = f(\alpha p^{1+\omega})$, как функция от комплексной переменной ω, постоянна (а именно, $F(\omega) = \sum f(x)\,\alpha(x)$, где суммирование берется по тем $x \in \Gamma_0$, для которых $p(x) = 1$), поэтому $F'(\omega) = 0$, т. е. $D_\zeta(f) = 0$, $f \in l^1(\Gamma_0)$. Таким образом, во всех точках $\zeta \in$ Hom Γ_0, для которых имеется хотя бы одно $x \in \Gamma_0$ такое, что $|\zeta(x)| \neq 0, 1$, существует точечное дифференцирование, и оно может быть задано формулой (2.1); однако, формула (2.1) не может задать точечное дифференцирование в точках, являющихся идемпотентами.

Очевидно, что для определения точечного дифференцирования на алгебре $l^1(\Gamma_0)$ достаточно определения ограниченного функционала D на базисных функциях χ_x, $x \in \Gamma_0$, удовлетворяющего условию

$$D(\chi_{x+y}) = \zeta(x)\,D(\chi_y) + \zeta(y)\,D(\chi_x), \quad x, y \in \Gamma_0, \ \zeta \in \text{Hom}\,\Gamma_0.$$

В самом деле, пусть $|D(\chi_x)| \leqslant 1$ для всех $x \in \Gamma_0$. Тогда для $f \in l^1(\Gamma_0)$ можем определить

$$D(f) = \sum_{x \in \Gamma_0} f(x)\, D(\chi_x), \tag{2.2}$$

ибо ряд в правой части (2.2) абсолютно сходится и $|D(f)| \leqslant \|f\|$. Равенство $D(fg) = f(\zeta)\, D(g) + g(\zeta)\, D(f)$ проверяется непосредственно.

Обозначим через E_ζ множество всех точечных дифференцирований в заданной точке $\zeta \in \mathrm{Hom}\,\Gamma_0$. Оно является банаховым пространством в естественной норме функционала.

Следующее простое предложение позволяет сводить вопрос о размерности пространства E_ζ к случаю, когда $\zeta \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$, т. е. ζ — положительный характер Γ_0.

Предложение 2.1. *Пространство E_ζ изометрически изоморфно пространству E_p, где p — положительный характер в полярном разложении ζ.*

Доказательство. Пусть $\zeta = p\alpha$ — полярное разложение гомоморфизма $\zeta \in \mathrm{Hom}\,\Gamma_0$. Каждому дифференцированию $D \in E_\zeta$ поставим в соответствие функционал D', действующий на базисных функциях χ_x, $x \in \Gamma_0$ по следующему правилу $D'(\chi_x) = \dfrac{D(\chi_x)}{\alpha(x)}$. Непосредственно проверяется, что $D' \in E_p$ и что соответствие $D \to D'$ задает изометрический изоморфизм между E_ζ и E_p.

Назовем гомоморфизмы $p_1, \cdots, p_n \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ мультипликативно независимыми, если равенство $(p_1^{u_1} \cdots p_n^{u_n})(x) = 1$ выполняется для всех $x \in \Gamma_0$ с $(p_1 \cdots p_n)(x) \neq 0$, тогда и только тогда, когда $u_1 = \cdots = u_n = 0$.

Предложение 2.2. *Пусть $p_1, \cdots, p_n \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0 \setminus \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ — мультипликативно независимы. Тогда для $p = p_1 \cdots p_n$, $\dim E_p \geqslant n$.*

Доказательство. Для каждого $j = \overline{1, n}$ функционал D_j, заданный формулой (2.1), определяет нетривиальное точечное дифференцирование в точке p.

Для всех $x \in \Gamma_0$ с $p_j(x) \neq 0$, $D_j(\chi_x) = p(x) \ln p_j(x)$. Если теперь $u_1, \cdots, u_n$ — такие, что $u_1 D_1 + \cdots + u_n D_n = 0$, то $u_1 \ln p_1(x) + \cdots + u_n \ln p_n(x) = 0$ для всех тех $x \in \Gamma_0$, для которых $p(x) \neq 0$. Тогда для таких x, $(p_1^{u_1} \cdots p_n^{u_n})(x) = 1$, откуда, по условию, все $u_j = 0$, что и требовалось доказать.

Опишем точечные дифференцирования в точках, являющихся идемпотентами полугруппы $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$ для произвольных полугрупп Γ_0.

Пусть $\rho \in \mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$, обозначим через $J = \{y \in \Gamma_0 : \rho(y) = 1\}$ На $\mathrm{Ker}\,\rho = \{x \in \Gamma_0 : \rho(x) = 0\}$ введем следующее отношение эквивалентности: $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}\,\rho$ эквивалентны $(x_1 \sim x_2)$, если существуют такие $y_1, y_2 \in J$, что $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Класс эквивалентности, соответствующий элементу x, обозначим через $\tilde{x}$, $\tilde{x} = \{x' \in \mathrm{Ker}\,\rho : x' \sim x\}$.

Назовем элемент $x \in \mathrm{Ker}\,\rho$ минимальным в Γ_0 (относительно ρ), если x не эквивалентно суммам $x_1 + x_2$ при всех $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}\,\rho$. Множество всех минимальных элементов обозначим через J_ρ. Очевидно, что $x+y \in J$, для всех $y \in J$ и $x \in J_\rho$; обозначим $\tilde{J}_\rho = \{\tilde{x} : x \in J_\rho\}$.

Теорема 2.3. *Пусть D^x—функция на $l^1(\Gamma_0)$, определенная для любого $\tilde{x} \in \tilde{J}_\rho$ на базисных функциях следующим образом $D^x(\chi_y) = 1$, $y \in \tilde{x}$, $D^x(\chi_y) = 0$, $y \in \Gamma_0 \setminus \tilde{x}$. Тогда D^x для любого $\tilde{x} \in \tilde{J}_\rho$ является точечным дифференцированием в ρ и множество всех таких дифференцирований образует базис в пространстве E_ρ. При этом $\dim E_\rho = \operatorname{card} \tilde{J}_\rho$.*

Доказательство. То что D^x представляет собой точечное дифференцирование в ρ и семейство $\{D^x : \tilde{x} \in \tilde{J}_\rho\}$ линейно независимо, проверяется непосредствннно.

Пусть теперь D — нетривиальное точечное дифференцирование в ρ. Для всех $x \in \Gamma_0 \setminus J_\rho$, $D(\chi_x) = 0$. В самом деле, если $x \in J$, то в силу ограниченности функционала D, из равенства $D(\chi_{nx}) = nD(\chi_x)$, верного при всех целых $n > 0$, следует, что $D(\chi_x) = 0$. Далее, для $x \in \operatorname{Ker} \rho \setminus J_\rho$ существуют такие x_1, $x_2 \in \operatorname{Ker} \rho$ и y, $y_1 \in J$, что $x+y = x_1 + x_2 + y_1$, поэтому $D(\chi_x) = D(\chi_{x_1+x_2}) = 0$.

Теперь, учитывая то, что $D(\chi_y) = D(\chi_x)$ для всех $y \in \tilde{x}$, легко видеть, что $D = \sum_{\tilde{x} \in \tilde{J}_\rho} c_x D^x$, где $c_x = D(\chi_x)$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $\Gamma_0 = \{x \in R_+ : x \geqslant 1\} \cup \{0\}$. Множестром минимальных элементов для идемпонента $\rho_0 (\rho_0(0) = 1,\ \rho_0(x) = 0,\ x \neq 0)$ служит отрезок $J_{\rho_0} = [1, 2)$, поэтому $\dim E_{\rho_0} = \infty$.

Перейдем к описанию точечных дифференцирований на $l^1(\Gamma_0)$ в точках $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0 \setminus \operatorname{Ihom} \Gamma_0$, в случае, когда Γ_0 — максимальная полугруппа.

Теорема 2.4. *Пусть Γ_0 — максимальная полугруппа. Тогда для любого $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0 \setminus \operatorname{Ihom} \Gamma_0$ пространство E_p одномерно.*

Доказательство. Пусть D — точечное дифференцирование в точке $p \in \operatorname{Phom} \Gamma_0 \setminus \operatorname{Ihom} \Gamma_0$. Так как Γ_0 — максимальна, то $p \neq 0$, и мы можем положить $D_0 = Dp^{-1}$. Непосредственно проверяется, что D_0 — аддитивная функция на Γ_0, и обратно, любая аддитивная функция D_0 на Γ_0 задает точечное дифференцирование $D = pD_0$ в p. В силу того, что D_0 разлагается в сумму $D_0 = D_1 + iD_2$ вещественных аддитивных функций D_j, $j = 1, 2$, то для описания пространства E_p достаточно описать вещественные аддитивные функции на Γ_0.

Если D_0 — положительно определенная аддитивная функция на Γ_0, то $\exp(-D_0) \in \operatorname{Phom} \Gamma_0$. Тогда по предложению 1.1., существует такое $u > 0$, что $\exp(-D_0) = p^u$, т. е. $D_0(x) = -u \ln p(x)$, $x \in \Gamma_0$. Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству положительности любой вещественнозначной аддитивной функции на полугруппе Γ_0.

Если G — максимальная полугруппа в Γ_0, то фактор-полугруппа Γ_0/G изоморфна некоторой максимальной полугруппе R_0 в R_+.

С другой стороны, $D_0 \equiv 0$ на G. Действительно, так как $p \equiv 1$ на G, то $D_0(x) = D(\chi_x)$, $x \in G$, откуда $D(\chi_{nx}) = nD_0(x)$ при всех $x \in G$ и $n \in Z_+$. Справедливость тождества $D_0 \equiv 0$ на G следует из ограниченности функционала D.

Тогда при изоморфизме $\Gamma_0/G \to R_0$, функция D_0 перейдет в аддитивную функцию D_0 на R_0, что позволяет рассматривать Γ_0 как полугруппу в R_+.

Если $\Gamma_0 = Z_+$, то равенство $D_0(n) = nD_0(1)$, $n > 0$, влечет за собой положительность (или отрицательность) D_0.

Пусть Γ_0 плотна в R_+. Допустим, что D_0 не знакопостоянна. Тогда для любого $x \in \Gamma_0$ с $D_0(x) > 0$ существует $y < x$ такой, что $D_0(y) < 0$. В противном случае, существует такой x, что $D_0(y) > 0$ при всех $y \leqslant x$, и тогда, в силу того, что для каждого $z > x$ найдется такое $n > 0$, что $z - nx < x$, то $D_0(z) = D_0(z - nx) + D_0(nx) > 0$, т. е. D_0 — положительно определенная функция, вопреки допущению.

Положим $x_1 = x - y$, тогда $D_0(x_1) > D_0(x)$. Если теперь, $x_1, \cdots, x_n \in \Gamma_0$ выбраны таким образом, что $x > x_1 > \cdots > x_n$ и $D_0(x) < D_0(x_1) < \cdots < D_0(x_n)$, то пусть $x_{n+1} = x_n - y_n$, где $y_n \in \Gamma_0$, такой, что $D_0(y_n) < 0$. Итак, можно построить последовательность $x_n \in \Gamma_0$, $x_n \downarrow 0$ такую, что $D_0(x_n) > D_0(x)$ и $D_0(x_n) < D_0(x_{n+1})$ для всех $n \geqslant 1$. Выберем такую последовательность $\{x_{k_n}\} \subset \{x_n\}$, что $nx_{k_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $D_0(nx_{k_n}) > nD_0(x)$ и, имея в виду, что $p(nx_{k_n}) = e^{unx_{k_n}} \to \infty$ при $n \to \infty$, получаем, что $D(\chi_{nx_{k_n}}) = p(nx_{k_n}) D_0(nx_{k_n}) \to \infty$, при $n \to \infty$, что противоречит ограниченности функционала D. Это и доказывает теорему.

§ 3. Автоморфизмы алгебры $A(\Gamma_0)$

Пусть α — произвольный характер группы Γ и φ — автоморфизм полугруппы Γ_0. Гомеоморфизм

$$\zeta \to \alpha \cdot \zeta \circ \varphi, \quad \zeta \in \mathrm{Hom}\, \Gamma_0 \tag{3.1}$$

назовем вращением „обобщенного диска" $\mathrm{Hom}\, \Gamma_0$.

Очевидно, что непрерывный линейный оператор V на алгебре $A(\Gamma_0)$, определенный на базисных функциях χ_x, $x \in \Gamma_0$ соотношением

$$V\chi_x = \alpha(x)\, \chi_{\varphi(x)}, \quad x \in \Gamma_0, \tag{3.2}$$

представляет собой автоморфизм алгебры $A(\Gamma_0)$ и

$$Vf(\zeta) = f(\alpha\zeta \circ \varphi), \quad f \in A(\Gamma_0) \tag{3.3}$$

(так же, как и в § 2, функцию $f \in A(\Gamma_0)$ отождествляем с ее преобразованием Гельфанда).

В данном параграфе покажем, что для широкого класса полугрупп Γ_0, автоморфизмы алгебры $A(\Gamma_0)$ исчерпываются вращениями $\mathrm{Hom}\, \Gamma_0$, т. е. задаются формулой (3.3).

Забегая вперед укажем, что таковыми являются полупруппы Γ_0, у которых полугруппа идемпотентов $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$ состоит из одного нетривиального идемпотента ρ_0 (в частности, все квазимаксимальные полугруппы Γ_0 с $\nu(\Gamma_0)=1$, см. предложение 1.2.).

Хорошо известно, что все автоморфизмы диск-алгебры $A(Z_+)$ порождаются конформными отображениями τ единичного круга на себя (см., например, [10], стр. 203), где $\tau(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ — функция Мёбиуса, переводящая z_0 в 0. В работе Аренса ([2]) приведен пример полугруппы Γ_0, отличной от Z_+, для которой автоморфизмы $A(\Gamma_0)$ также не исчерпываются вращениями $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$. В качестве такой полугруппы берется полугруппа $\Gamma_0=\{(m,\ n)\in Z_+\times Z$ для $m=0,\ n\geqslant 0\}$.

Пусть теперь V — произвольный автоморфизм алгебры $A(\Gamma_0)$ и τ_V — порожденный им гомеоморфизм компакта $A(\Gamma_0)$ на себя:

$$\tau_V(\zeta)(x)=(V\chi_x)(\zeta),\quad x\in\Gamma_0,\ \zeta\in\mathrm{Hom}\,\Gamma_0. \tag{3.4}$$

Необходимое условие того, чтобы все автоморфизмы V алгебры $A(\Gamma_0)$ индуцировались автоморфизмами полугруппы Γ_0, т. е. задавались формулой (3.3), очевидно, состоит в том, чтобы соответствующие им гомеоморфизмы τ_V были инвариантными на полугруппе $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0$,

$$\tau_V(\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0)\subset\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0. \tag{3.5}$$

Как показано Аренсом ([2]) для полугрупп Γ_0, задающих так называемый слабый архимедов порядок на группе Γ, условие (3.5) является также и достаточным. Напомним, что полугруппа Γ_0 задает слабый архимедов порядок на Γ, если для каждого $x\in\Gamma$ существует гомоморфизм h группы Γ в вещественную ось R такой, что $h(x)\neq 0$ и $h(y)\geqslant 0$ для всех $y\in\Gamma_0$. Примером может служить любая полугруппа в R_+, и в частности, любая квазимаксимальная полугруппа Γ_0 с $\nu(\Gamma_0)=1$.

Отметим следующее свойство отображения τ_V, которым мы неоднократно будем пользоваться:

$$\tau_V(\hat{\Gamma})=\hat{\Gamma}, \tag{3.6}$$

справедливость которого непосредственно следует из того, что группа $\hat{\Gamma}$ служит границей Шилова алгебры $A(\Gamma_0)$ (см. [1]).

Теорема 3.1. *Пусть полугруппа* Γ_0 *не изоморфна* Z_+ *и* $\mathrm{Ihom}\,\Gamma_0=\{1,\ \rho_0\}$. *Тогда для любого автоморфизма* V *алгебры* $A(\Gamma_0)$ *существует характер* α *группы* Γ *и автоморфизм* φ *полугруппы* Γ_0 *такие, что* $V\chi_x=\alpha(x)\chi_{\varphi(x)}$, $x\in\Gamma_0$.

Доказательство. Напомним, что $\rho_0(0)=1$ и $\rho_0(x)=0$, $x\neq 0$. Из условия теоремы следует, что для всех положительных характеров $p\neq\rho_0$, 1, $0<p(x)<1$ при всех $x\in\Gamma_0$. Действительно, допустим, что множество $J_0=\{x\in\Gamma_0: p(x)=0\}$ не пусто. Определим характер ρ_1 следующим образом: $\rho_1\equiv 0$ на J_0 и $\rho_1\equiv 1$ на $\Gamma_0\diagdown J_0$. Поскольку J_0 есть собственный идеал в Γ_0, а $\Gamma_0\diagdown J_0$ — подполугруппа Γ_0, то ρ_1 является идемпотентом $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$, отличным от 1 и ρ_0, что противоречит условию теоремы. Точно так же устанавливается, что $p(x) < 1$ для всех $x \in \Gamma_0$.

Зафиксируем произвольный характер $p \in \mathrm{Phom}\,\Gamma_0$, $p \neq 1, \rho_0$, и определим непрерывное отображение Φ правой полуплоскости $\Pi = \{u + iv \in \mathbf{C} : u \geqslant 0\}$ в компакт $\mathrm{Hom}\,\Gamma_0$:

$$\Phi(u + iv) = p^{u+iv},\ u \geqslant 0,\ v \in R,$$

где $p^{u+iv}(x) = \exp[(u+iv)\ln p(x)]$, $x \in \Gamma_0$. Ниже мы неоднократно будем пользоваться следующими свойствами этого отображения:

1) образ $\Phi(iR) = \{p^{iv} : v \in R\}$ есть подгруппа группы $\widehat{\Gamma}$;

2) для любого $f \in A(\Gamma_0)$ композиция $f \circ \Phi$ представляет собой ограниченную почти периодическую аналитическую функцию в правой полуплоскости (см. [1] или [2]).

Предположим, что задан автоморфизм U. Так как $U \neq 0$, то $U(1) = 1$ (здесь $1 = \chi_0$, где $\chi_0(\zeta) = \zeta(0) = 1$, $\zeta \in \mathrm{Hom}\,\Gamma_0$).

Пусть $x \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$, $f = U\chi_x$, $\sum c_n \chi_{x_n}$ — ряд Фурье функции f. Положим $F = f \circ \Phi$. Покажем, что задача сводится к доказательству неравенства $F(\omega) \neq 0$, верного для всех $\omega = u + iv \in \Pi$. В самом деле, так как $\tau_U(\widehat{\Gamma}) = \widehat{\Gamma}$ ((3.6)), то $|F(iv)| = 1$ для всех $v \in R$. Если теперь $F \neq 0$ в правой полуплоскости, то по теореме Безиковича (см. [11]), $F(\omega) = ce^{\lambda\omega}$, где $|c| = 1$, $\lambda < 0$. Для членов соответствующих рядов имеем $\sum c_n p^u(x_n) e^{iv \ln p(x_n)} = ce^{\lambda u} e^{i\lambda v}$, $u + iv \in \Pi$. Так как $p(x_n) > 0$, то, полагая в ней $u = 0$, получим $\sum c_n e^{iv \ln p(x_n)} = ce^{i\lambda v}$, при всех $v \in R$. Отсюда необходимо следует, что все $c_n = 0$, за исключением одного $c_{n_0} \neq 0$, и тогда $U\chi_x = c\chi_{x_{n_0}}$. Полагая затем $c = \alpha(x)$ и $x_{n_0} = \varphi(x)$, непосредственно убеждаемся, что α — характер группы Γ, а φ — автоморфизм Γ_0.

Допустим теперь, что $F(\omega_0) = 0$ в некоторой точке $\omega_0 = u_0 + iv_0$. Докажем, что в этом случае множество $\Phi(iR) = \{p^{iv} : v \in R\}$ гомеоморфно окружности.

Ограниченная аналитическая почти периодическая в некоторой области функция, имеющая нуль, имеет их бесконечно много; пусть ω_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$ — нуль функции F, $\omega_n = u_n + iv_n$. Как было показано в начале доказательства, $\zeta(x) \neq 0$ для всех $\zeta \neq \rho_0$ и $x \in \Gamma_0$, поэтому из равенств $F(\omega_n) = 0$ следует, что $\tau_U(p^{\omega_n}) = \rho_0$ при всех n. Учитывая теперь биективность τ_U, получаем, что $p^{\omega_n} = p^{\omega_0}$, откуда $p^{u_n} = p^{u_0}$, и, так как $p(x) < 1$ для всех $x \in \Gamma_0$, то $u_n = u_0$. Окончательно, $p^{iv_n} = p^{iv_0}$ для всех n, т. е. $i(v_n - v_0)$ принадлежат ядру $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{iv \in iR : \Phi(iv) = 1\}$ вложения $\Phi : iR \to \widehat{\Gamma}$.

Хорошо известно, что любая замкнутая подгруппа группы R есть либо $\{0\}$, либо R, либо изоморфна Z. Поэтому, из того, что $\mathrm{Ker}\,\Phi$ есть собственная замкнутая подгруппа мнимой оси и $i(v_n - v_0) \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, заключаем, что $\operatorname{Ker} \Phi = itZ$, $t > 0$. Итак, $\Phi(iR)$ гомеоморфно R/Z и, следовательно, гомеоморфна окружности. Для удобства положим $t = 2\pi$, тогда $p^{2\pi i} \equiv 1$, откуда $-\ln p(x) \in Z_+$, т. е. $p(x) = e^{-n_x}$, где $n_x \in Z_+$.

Полагая теперь $p(x_n) = e^{-k_n}$, $k_n \in Z_+$, получаем $F(\omega) \sim \sum c_n e^{-k_n \omega} = \sum c_n z^{k_n} \sim \tilde{F}(z)$, где $\omega \in \Pi$, $z = e^{-\omega}$. Функция $\tilde{F}$ обладает следующими свойствами:

1) $\tilde{F}$ аналитична внутри единичного круга;

2) $|\tilde{F}(z)| = 1$ для z, $|z| = 1$;

3) $\tilde{F}(e^{-\omega_0}) = 0$

(отметим, что для всех ω_n, $e^{-\omega_n} = e^{-\omega_0}$, поскольку $\omega_n = u_0 + iv_n$, а $v_n - v_0 \in 2\pi Z$).

Пусть $\alpha \in \hat{\Gamma}$ и $\alpha \neq 1$. Рассмотрим функцию $\tilde{F}_\alpha(z) \sim \sum c_n \alpha(x_n) z^{k_n}$. Легко видеть, что она удовлетворяет условиям 1) и 2) и не является постоянной, поэтому существует z', $|z'| < 1$, такая, что $\tilde{F}_\alpha(z') = 0$. Это означает, что $\tau_U(\alpha p^{\omega'})(x) = 0$, где $e^{-\omega'} = z'$. Кроме того $\tau_U(p^{\omega_0}(x) = 0$, поэтому $\alpha p^{\omega'} = p^{\omega_0}$, откуда следует, что $\alpha p^{iv'} = p^{iv_0}(v' = \operatorname{Im} \omega')$, т. е. $\alpha = p^{i(v_0 - v')} \in \Phi(iR)$. Итак, $\Phi(iR) = \hat{\Gamma}$. Поскольку $\Phi(iR)$ гомеоморфно окружности, группа Γ изоморфна Z. Учитывая условия теоремы, заключаем, что Γ_0 является подполугруппой Z_+, не изоморфная Z_+. Поскольку в случае $\Gamma_0 \subset Z_+$ автоморфизмы $A(\Gamma_0)$ представляют собой вращения единичного круга, то теорема доказана.

В частности, в случае, когда Γ_0 — квазимаксимальная полугруппа с $\nu(\Gamma_0) = 1$, автоморфизмы $A(\Gamma_0)$ исчерпываются вращениями „обобщенного диска“ $\operatorname{Hom} \Gamma_0$. Автоморфизмы φ таких полугрупп Γ_0 имеют вид $\varphi(x) = ux$, $x \in \Gamma_0$, $u > 0$, (причем $u = 1$, когда в Γ_0 есть минимальный элемент); поэтому для всех автоморфизмов U алгебры $A(\Gamma_0)$, $U\chi_x = \alpha(x)\chi_{ux}$, $x \in \Gamma_0$, $\alpha \in \hat{\Gamma}$.

Замечание 1. Пусть U — автоморфизм алгебры $l^1(\Gamma_0)$ и $\tau(\zeta)(x) = (U\chi_x)(\zeta)$, $x \in \Gamma_0$. Определим линейный оператор $\tilde{U}$ на $A(\Gamma_0)$, полагая $(\tilde{U}\chi_x)(\zeta) = \tau(\zeta)(x)$, $x \in \Gamma_0$. Поскольку $M_{A(\Gamma_0)} = M_{l^1(\Gamma_0)} = \operatorname{Hom} \Gamma_0$ и алгебра $l^1(\Gamma_0)$ всюду плотна в $A(\Gamma_0)$, то $\tilde{U}$ представляет собой непрерывный автоморфизм алгебры $A(\Gamma_0)$. Тогда теорема 3.1 утверждает, что в случае, когда в $\operatorname{Hom} \Gamma_0$ всего лишь один нетривиальный идемпотент ρ_0, автоморфизмы алгебры $l^1(\Gamma_0)$ также исчерпываются вращениями „обобщенного диска“ $\operatorname{Hom} \Gamma_0$.

Заметим, что в отличие от алгебры $A(Z_+)$, автоморфизмы алгебры $l^1(Z_+)$ также представляют собой вращения диска (поскольку гомеоморфизм τ имеет вид $\tau(\zeta) = e^{i\theta} \dfrac{\zeta - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}$, $|\zeta_0| < 1$, $|\zeta| \leq 1$, и $\| \tau(\zeta) \|_{l^1(Z_+)} = 1 + 2|\zeta_0|$, а U — ограниченный оператор, то $\zeta_0 = 0$, т. е. $\tau(\zeta) = e^{i\theta}\zeta$, см. также, [12], стр. 175).

Замечание 2. Применяя свойство (3.6) нетрудно показать, что все изометрические автоморфизмы $l^1(\Gamma_0)$ для произвольной полугруппы Γ_0 индуцируются автоморфизмаии полугруппы Γ_0.

Действительно, пусть автоморфизм U алгебры $l^1(\Gamma_0)$ такой, что $\|U\chi_x\| \leqslant 1$ для всех $x \in \Gamma_0$. Пусть $U\chi_x = \sum c_n \chi_{x_n}$, тогда $\sum |c_n| \leqslant 1$. С другой стороны, поскольку $\tau_U(\hat{\Gamma}) = \hat{\Gamma}$ ((3.6)), то для любого $\alpha \in \hat{\Gamma}$, $|\sum c_n \alpha(x_n)| = 1$, в частности $|\sum c_n| = 1$ ($\alpha \equiv 1$). Тогда $|\sum c_n| = \sum |c_n|$, откуда $\arg c_n \equiv \text{const} = \theta$, т. е. $c_n = r_n e^{i\theta}$ при всех n. Из тех же соображений $\arg \alpha(x_n) \equiv \text{const}$. так как $|\sum r_n \alpha(x_n)| = 1 = \sum r_n = \sum |r_n \alpha(x_n)|$, т. е. $\alpha(x_n) = \alpha(x_1)$ при всех n. Поскольку последнее тождество верно для всех $\alpha \in \hat{\Gamma}$, $x_n = x_1$ при всех n и, следовательно, $U\chi_x = e^{i\theta}\chi_{x_1}$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 12. IX. 1985

Լ. Մ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ. Ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշիվների վրա կետային դիֆերենցումների և ավտոմորֆիզմների որոշ հատկություններ *(ամփոփում)*

Γ խմբի մեջ ներդրված Γ_0, միավորով ադիտիվ աբելյան կիսախմբերի համար հետազոտվում են այդ կիսախմբերով ծնված ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշիվների որոշ հատկությունները։

Ներմուծվում է կիսախմբերի հատուկ տիպ (քվազիմաքսիմալ) և այդ տիպի կիսախմբերի համար տրվում է $l^1(\Gamma_0)$ բանախյան հանրահաշվի մաքսիմալ իդեալների տարածության նկարագրությունը։

Կամայական Γ_0 մաքսիմալ կիսախմբերի համար նկարագրվում են $l^1(\Gamma_0)$ հանրահաշվի կետային դիֆերենցումները։ $l^1(\Gamma_0)$ հանրահաշվի կետային դիֆերենցումները Hom Γ_0 կիսախմբի իդեմպոտենտներում նկարագրվում են կամայական Γ_0 կիսախմբերի համար։

Կիսախմբերի լայն դասի համար (որը ընդգրկում է նաև քվազիմաքսիմալները) նկարագրվում են Γ խմբի բնութագրերի կոմպակտ $\hat{\Gamma}$ խմբի վրա Γ խմբի χ_x $(x \in \Gamma_0)$ բնութագրերով ծնված $A(\Gamma_0)$ հանրահաշվի բոլոր ավտոմորֆիզմները։ Ապացուցվում է, որ $A(\Gamma_0)$ հանրահաշվի U ավտոմորֆիզմները ծնվում են Γ_0 կիսախմբի φ ավտոմորֆիզմներով՝

$$U\chi_x = \alpha(x)\chi_{\varphi(x)}, \quad x \in \Gamma_0,$$

որտեղ α-ն Γ խմբի ցանկացած բնութագիր է։

L. M. HAKOPIAN. *Some properties of point differentiations and automorphisms on algebras of generalized analytic functions* (summary)

Some properties of algebras of generalized analytic functions generated by additive abelian semigroups Γ_0 which can be included in some group Γ are investigated. We introduce the special type of so called quasimaximal semigroups and for them we describe maximal ideal's space of Banach algebra $l^1(\Gamma_0)$. For every maximal semigroup Γ_0 we describe point differentiations on algebra $l^1(\Gamma_0)$. Point differentiations on $l^1(\Gamma_0)$ in idempotents of semigroups Hom Γ_0 we describe for arbitrary samigroups Γ_0. For a large class of semigroups (which includes quasimaximals) we describe automorphisms of the uniform algebra $A(\Gamma_0)$ on the dual compact group $\hat{\Gamma}$ generated by characters χ_x of Γ, for $x \in \Gamma_0$. We prove that the automorphism U of $A(\Gamma_0)$ is induced by the automorphism φ of the semigroup Γ_0

$$U\chi_x = \alpha(x)\chi_\varphi(x),$$

where α is an arbitrary character of Γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Arens and I. M. Singer*. Generalized analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc., v. 81, 1956, 379--393.
2. *R. Arens*. A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc Trans. Amer, Math. Soc., 81, № 2, 1956, 501—513.
3. *R. Arens*. The boundary integral of log |Φ| for generalized analytic functions Trans. Amer. Math. Soc., v. 86, 1957, 57—69.
4. *K. Hoffman*. Boundary behavior of generalized analytic functions, Trans, Amer Math. Soc., 87, № 2, 1958, 447—466.
5. *H. Helson and D. Lawdenslager*. Prediction theory and Fourier series in several vaviables, Acta Math., 99, 1959, 165—202.
6. *H. Helson and D. Lawdenslager*. Prediction theory and Fourier series in several, variables, II Acta Math., 106, 1961, 175—213.
7. *H. Helson and D. Lawdenslager*. Invariant subspaces, Proc. Infernat. Symp. Linear Spaces, Ierusalem, 1960, Macmillan (Pergamon), N. Y., 1961, 251—262.
8. *H. Helson*. Compact groups with ordered duals, Proc. Lond. Math. Soc., (3) 14 (A), 1965, 144—156.
9. *Т. Гамелин*. Равномерные алгебры, М., «Мир», 1973.
10. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ. 1963.
11. *A. S. Besicovitch*. Almost periodic functions, Cambridge, 1932.
12. *Ж.-П. Кахан*. Абсолютно сходящиеся тригонометрические ряды, М., «Мир». 1976.