УДА 517. 946

Փ. Օ. МАМИКОНЯՆ

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ
 НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Известное неравенство Гронуолла и его различные обобщения играют важную роль при изучении многих вопросов теории дифференциальных и интегральных уравнений (см., например, [1] или [2]).

Предлагаемая работа посвящена одному такому обобщению неравенства Гронуолла. Пусть $I^n \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n\}$, а $I \equiv I^1$. В классе непрерывных на I^n функций рассматривается интегральное неравенство

$$u(x) \leq f(x) + Ku + Lu + Nu, \quad x \in I^n, \quad (0.1),$$

где

$$Ku \equiv p(x) \int_0^x K(t) u(t) dt, \quad (0.2)$$

$$Lu \equiv q(x) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) u(s) ds \right) dt, \quad (0.3)$$

$$Nu \equiv \sum_{k=1}^p r_k(x) \int_0^x n_k(t) \omega_k[u(t)] dt, \quad (0.4)$$

а $f(x)$, $p(x)$, $K(x)$, $g(x)$, $l(x)$, $m(x)$, $r_i(x)$, $n_i(x)$ и $\omega_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, p$) — некоторые заданные на I^n и I функции.

Изучение нелинейных интегральных неравенств вида (0.1) неразрывно связано с исследованиями по качественной теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений и основополагающий результат здесь принадлежит I. Bihari [3] (случай $n=1$, $f(x) \equiv \text{const}$, $Ku \equiv Lu \equiv 0$, $p=1$, $r_1(x) \equiv \text{const}$). Из многочисленных работ, посвященных оценкам решений частных классов интегральных неравенств вида (0.1), к предлагаемой непосредственно примыкают работы G. Butler и T. Rogers [8], U. D. Dhongade и S. G. Deo [9], V. Singare [10]; цикл работ по оценкам решений таких неравенств имеет В. G. Pachpatte (см., например, [11] — [13]).

Такие неравенства изучались также в связи с исследованиями по устойчивости и асимптотическому поведению решений дифференциальных и интегродифференциальных уравнений: здесь можно упомянуть работы S. Grace и B. Lalli [14], R. Agarwal [15], J. Tong [16], En Hao Yang [17].

В § 1 работы сформулированы основные результаты, в § 2 приводятся доказательства.

§ 1 Формулировка результатов

При изучении интегральных неравенств вида (0.1) важную роль играют два „промежуточных“ случая: линейный случай, когда $\mathbf{N}u \equiv 0$ и случай, когда $\mathbf{K}u \equiv \mathbf{L}u \equiv 0$. Рассмотрение общего случая часто различными способами можно свести к некоторой комбинации этих двух частных случаев.

Рассмотрим сначала линейный случай:

$$u(x) \leq f(x) + \mathbf{K}u + \mathbf{L}u, \quad x \in I^n, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ определяются, соответственно, выражениями (0.2) и (0.3). Обозначим

$$\hat{\alpha}(x) \equiv \sup_{0 < s < x} \alpha(s) \quad (1.2)$$

для любой непрерывной на I^n функции $\alpha(x)$.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$, $p(x)$, $K(x)$, $q(x)$, $l(x)$ и $m(x)$ непрерывны и неотрицательны на I^n .

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) непрерывной функции $u(x)$ имеет место оценка

$$u(x) \leq \hat{f}(x) \cdot \tau(x), \quad x \in I^n, \quad (1.3)$$

где

$$\tau(x) \equiv \exp \left\{ p(x) \int_0^x K(t) dt \right\} \cdot \exp \left\{ \hat{q}(x) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) ds \right) dt \right\}. \quad (1.4)$$

Если n —нечетное число, оценку (1.3) можно существенно уточнить. Для того, чтобы сформулировать соответствующий результат, введем, следуя [6], понятие мультипликативной степени m (m —натуральное число) функции. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$ и $1 \leq k < m \leq n$, где k и m —натуральные числа. Обозначим $x^{m-k} \equiv (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m)$.

О п р е д е л е н и е. Заданную на I^n функцию $h(x)$ назовем мультипликативной степени m ($1 \leq m \leq n$) функцией, если существует последовательность целых чисел $p_0, p_1, \dots, p_m$ ($0 = p_0 < p_1 < \dots < p_{m-1} < p_m = n$) и функции $h_i(x^{p_i - p_{i-1}})$ ($i = 1, 2, \dots, m$) такие, что

$$h(x) = \prod_{i=1}^m h_i(x^{p_i - p_{i-1}}), \quad x \in I^n. \quad (1.5)$$

Имеет место

Теорема 2. Пусть n —нечетное число, а функции $f(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $l(x)$ и $m(x)$ непрерывны и неотрицательны на I^n . Пусть, далее, $K(x) \leq h(x)$ ($x \in I^n$), где $h(x)$ —мультипликативная степени m ($1 \leq m \leq n$) функция, то есть допускает представление (1.5).

Тогда, если функции h_i непрерывны и неотрицательны, соответственно на $I^{p_i - p_{i-1}}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то для любой удовлетво-

ряющей неравенству (1.1) непрерывной функции $u(x)$ имеет место оценка (1.3), где

$$(\tau x) \equiv I_m [p(x) \mu(x; h_1, h_2, \dots, h_m)] \cdot J_0 \left(2i \sqrt{\widehat{q}(x) \int_0^x l(t) dt \int_0^x m(t) dt} \right), \quad (1.6)$$

причем

$$\mu(x; h_1, h_2, \dots, h_m) \equiv \prod_{i=1}^m \int_0^{x^{r_i}} h_i(\xi^{r_i}) d\xi^{r_i} \quad (1.7)$$

$$(r_i = p_i - p_{i-1}; d\xi^{r_i} \equiv d\xi_{p_{i-1}+1} \dots d\xi_{p_i}; i = 1, 2, \dots, m),$$

$$I_m(\tau) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{(kl)^m},$$

где $J_0(s)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Заметим, что в частных случаях оценку (1.3) можно получить при более слабых ограничениях: а именно, предполагая локальную интегрируемость с квадратом и неотрицательность на I^n функций, определяющих неравенство (1.1). Это, в частности, имеет место для нечетных n , если $p(x) \equiv q(x) \equiv 1$ (для случая $n=1$ соответствующий результат сформулирован в [5]) и для произвольного n , если $L_i \equiv 0$ (см. [6]).

В связи с оценкой (1.3) для нечетных n отметим также, что любая функция является мультипликативной степени 1 функцией. Поэтому полученная оценка имеет место для произвольной непрерывной и неотрицательной на I^n функции $K(x)$: только в этом случае $I_m(\tau)$ совпадает с экспонентой. С другой стороны, если функция $K(x)$ ограничена на I^n хотя бы по одной переменной x_i , она мажорируется сверху через мультипликативную степени 2 функцию. Если $K(x)$ вообще не зависит от некоторых переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ ($i_s \leq n$, $s = 1, \dots, p$), то она сама является мультипликативной степени p функцией. Что касается поведения функции $I_m(\tau)$ при $\tau \rightarrow +\infty$, то заметим, что

$$I_m(\tau) \leq C(m) \cdot \exp\{-m \tau^{1/m}\},$$

где $C(m) = \sqrt{m} \cdot e^{-12m}$ (см. [6]) и, в частности, $I_2(\tau) = J_0(2i\sqrt{\tau})$, где $J_0(s)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Приведенные здесь оценки обобщают и уточняют полученные ранее результаты. Отметим, в частности, используемые часто в приложениях результаты В. Г. Pachpatte [11] (случай $n=1$, $p(x) \equiv q(x) \equiv 1$, $K(x) \equiv l(x)$) и Р. Agarwal [15] (случай $n=1$, $p(x) \equiv q(x) \equiv 1$), результат которого следует из оценки (1.3) теоремы 1 при $n=1$. Например, для „модельного“ случая, когда $p(x) \equiv q(x) \equiv 1$, $K(x) = k_0 = \text{const}$, $l(x) = l_0 = \text{const}$, $m(x) = m_0 = \text{const}$, а $f(x)$ — неубывающая функция, полученный в [15] для $n=1$ результат гарантирует, что

$$u(x) \leq f(x) \cdot e^{k_0 x} \cdot e^{\frac{1_0 m_0 x^2}{2}},$$

в то время как из оценки (1.3) теоремы 2 следует

$$u(x) \leq f(x) \cdot e^{1_0 x} \int_0^{2i \sqrt{1_0 \cdot m_0 \cdot x^2}},$$

что на порядок точнее.

Ряд работ (см., например, [12], [15]) посвящен обращению двумерных интегральных неравенств типа (1.1). Однако предложенные в этих работах оценки содержат функцию Римана некоторой определяемой интегральным неравенством краевой задачи, причем исследование поведения этой функции представляет собой задачу по крайней мере той же трудности, что и обращение самого интегрального неравенства. Предложенная здесь оценка (1.3) теоремы 1 позволяет, на наш взгляд, устранить этот недостаток.

Пусть теперь $Ku \equiv Lu \equiv 0$. В этом случае интегральное неравенство (0.1) примет вид

$$u(x) \leq f(x) + Nu, \quad x \in I^n, \quad (1.9)$$

где N определяется выражением (0.4).

Определение. Непрерывная на I функция $\varphi(x)$ называется субмультипликативной на I , если

$$\varphi(x \cdot y) \leq \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad (1.10)$$

для любых $x, y \in I$.

Функция $\varphi(x) = x^k$ ($k \geq 0$), например, является субмультипликативной на I .

Следуя [9] и [18] введем

Определение. Скажем, что непрерывная на I функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $S_r(I)$, где r — действительное число, если

$$a^{-1} \varphi(x) \leq \varphi(a^{-1} \cdot x), \quad x \in I \quad (1.11)$$

для всех $a \geq r$.

Легко проверить, например, что функция $\varphi(x) = x^k$ ($0 \leq k \leq 1$) принадлежит классу $S_1(I)$. Имеет место

Теорема 3. Пусть функции $f(x)$, $r_k(x)$ и $n_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, p$) непрерывны и неотрицательны на I^n , причем $f(x) \neq 0$ на множестве $0 < x \leq \varepsilon$ для любого положительного ε . Пусть, кроме того, $\omega_k(x) \leq \varphi_k(x)$ ($x \in I$, $k=1, 2, \dots, p$), где $\varphi_k(x)$ непрерывны, неотрицательны, не убывают на I , причем $\varphi_1(x), \dots, \varphi_s(x)$ ($0 \leq s \leq p$) субмультипликативны на I , а $\varphi_{s+1}(x), \dots, \varphi_p(x)$ принадлежат $S_\gamma(I)$, где $\gamma = f(0)$.

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.9) непрерывной функции $u(x)$ имеет место оценка

$$u(x) \leq \tilde{f}(x) \prod_{k=1}^s Q_k(x) \prod_{k=s+1}^p G_k(x), \quad x \in I^n, \quad (1.12)$$

где

$$Q_k(x) \equiv \Phi_k^{-1} \left\{ \Phi_k(1) + \frac{\widehat{r}_k(x)}{\widehat{f}(x)} \cdot \varphi_k[\widehat{f}(x)] \cdot \prod_{L=1}^{k-1} \varphi_k[Q_L(x)] \cdot \int_0^x n_k(t) dt \right\} \quad (k=1, 2, \dots, s), \quad (1.13)$$

$$G_k(x) \equiv \Phi_k^{-1} \left\{ \Phi_k(1) + \widehat{r}_k(x) \prod_{L=1}^s Q_L(x) \cdot \prod_{L=s+1}^{k-1} G_L(x) \cdot \int_0^x n_k(t) dt \right\}, \quad (1.14)$$

($k=s+1, \dots, p$)

$\widehat{f}(x)$ и $\widehat{r}_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, p$) определяется (1.2), а

$$\Phi_k(u) \equiv \int_{u_k}^u \frac{ds}{\varphi_k(s)}, \quad (u \geq 0, u_k > 0, k=1, 2, \dots, p), \quad (1.15)$$

причем оценка имеет место по крайней мере для тех $x \in I^n$, для которых

$$\Phi_k(1) + \frac{\widehat{r}_k(x)}{\widehat{f}(x)} \cdot \varphi_k[\widehat{f}(x)] \cdot \prod_{L=1}^{k-1} \varphi_k[Q_L(x)] \cdot \int_0^x n_k(t) dt \in \text{Dom}(\Phi_k^{-1}) \quad (1.16)$$

для всех $k=1, 2, \dots, s$ и

$$\Phi_k(1) + \widehat{r}_k(x) \cdot \prod_{L=1}^s Q_L(x) \cdot \prod_{L=s+1}^{k-1} G_L(x) \cdot \int_0^x n_k(t) dt \in \text{Dom}(\Phi_k^{-1}) \quad (1.17)$$

для всех $k=s+1, s+2, \dots, p$.

Заметим, что оценка (1.12) не зависит от выбора u_k в определении функции $\Phi_k(u)$ (1.15). Действительно, полагая в (1.15) $\overline{u}_k$ вместо u_k , получим

$$\overline{\Phi}_k(u) \equiv \int_{\overline{u}_k}^u \frac{ds}{\varphi_k(s)} = \Phi_k(u) - \delta_k, \quad \text{где } \delta_k \equiv \int_{u_k}^{\overline{u}_k} \frac{ds}{\varphi_k(s)},$$

откуда $\overline{\Phi}_k(1) = \Phi_k(1) - \delta_k$ ($k=1, 2, \dots, p$). В свою очередь, $\overline{\Phi}_k^{-1}(x) = \Phi_k^{-1}(x + \delta_k)$, поэтому

$$\overline{\Phi}_k^{-1} \{ \overline{\Phi}_k(1) + A \} = \overline{\Phi}_k^{-1} \{ \Phi_k(1) - \delta_k + A \} = \Phi_k^{-1} \{ \Phi_k(1) + A \},$$

что обеспечивает независимость $Q_k(x)$ и $G_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, p$), а следовательно, и оценки (1.12) от выбора u_k . Наиболее естественно положить $u_k = 0$ ($k=1, 2, \dots, p$). Однако, легко видеть, что это можно сделать только в случае, когда $\Phi_k(u)$ имеет конечный предел при $u_k \rightarrow +0$. В противном случае такой выбор невозможен.

Если рассматривать важный для приложений случай, когда $\omega_k(x) = x^{r_k}$ ($k=1, 2, \dots, p$), то несложный анализ показывает, что если $0 \leq r_k \leq 1$ для всех k , то оценку (1.12) можно применить, полагая как $s=p$, так и $s=0$ (если только $f(0) \geq 1$), причем оценка будет иметь место для всех $x \in I^n$. Если же $r_k > 1$ для всех k , то оценка (1.12) применима только для $s=p$ и имеет место на некотором подмножестве I^n . В „промежуточном“ случае, когда $0 \leq r_k \leq 1$ для $k=1, 2, \dots, s$ и $r_k > 1$ для $k=s+1, s+2, \dots, p$ ($0 < s < p$), оценка (1.12) имеет место на некотором подмножестве I^n .

Например, для интегрального неравенства

$$u(x) \leq f(x) + \int_0^x n_1(t) u^k(t) dt + \int_0^x n_2(t) u^m(t) dt, \quad x \in I^n, \quad (1.18)$$

где $0 < k < 1$, $m > 1$, а $f(0) \geq 1$, имеем $r_1(x) \equiv r_2(x) \equiv 1$, $\omega_1(x) \equiv x^k$, $\omega_2(x) \equiv x^m$ и, согласно (1.15)

$$\Phi_1(u) = \int_{u_1}^u \frac{ds}{s^k} = \frac{u^{1-k}}{1-k} - \frac{u_1^{1-k}}{1-k} = \frac{u^{1-k}}{1-k},$$

если положить $u_1 = 0$ (так как $0 < k < 1$), и

$$\Phi_2(u) = \int_{u_2}^u \frac{ds}{s^m} = \frac{u^{1-m}}{1-m} - \frac{u_2^{1-m}}{1-m} = \frac{1}{m-1} \left\{ 1 - \frac{1}{u^{m-1}} \right\},$$

если положить $u_2 = 1$ (так как $m > 1$). Тогда, согласно (1.12), (1.13) и (1.14), для любой удовлетворяющей неравенству (1.18) непрерывной функции $u(x)$ имеет место оценка

$$u(x) \leq \hat{f}(x) \cdot \left\{ 1 + (1-k) \cdot \int_0^x n_1(t) dt \right\}^{\frac{1}{1-k}} \times \\ \times \left[\frac{1}{1 - (m-1) \hat{f}^{m-1}(x) \cdot \int_0^x n_2(t) dt} \right]^{\frac{1}{m-1}}$$

по крайней мере для тех $x \in I^n$, для которых

$$(m-1) \cdot \hat{f}^{m-1}(x) \cdot \int_0^x n_2(t) dt < 1. \quad (1.19)$$

Так как левая часть последнего неравенства обращается в нуль при $x=0$, по непрерывности существует интервал $0 \leq x < a$, на котором выполнено условие (1.19).

Рассмотрим теперь общий случай интегрального неравенства (0.1). Используя полученные выше оценки, нетрудно показать, что имеет место

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 3. Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (0.1) непрерывной функции $u(x)$ имеет место оценка

$$u(x) \leq \widehat{f}(x) \cdot \tau(x) \cdot \prod_{k=1}^2 \widehat{Q}_k(x) \cdot \prod_{k=2+1}^p \widehat{G}_k(x), \quad x \in I^n, \quad (1.20)$$

где $\widehat{Q}_k(x)$ и $\widehat{G}_k(x)$ получаются соответственно из (1.13) и (1.14) заменой всюду $\widehat{f}(x)$ на $\widehat{f}(x) \cdot \tau(x)$, а $\widehat{r}_k(x)$ — на $\widehat{r}_k(x) \cdot \tau(x)$ ($k=1, 2, \dots, p$), причем $\tau(x)$ определяется выражением (1.6), если выполнены условия теоремы 2 и выражением (1.4), если выполнены условия теоремы 1.

Заметим, что оценка (1.20) содержит как частные случаи полученные выше оценки (1.3) и (1.12). Она также обобщает и уточняет ряд полученных для частных случаев (в основном для одномерных неравенств) результатов (см., например, [11], [15] или [17]). Полученные оценки для решений интегрального неравенства (0.1) могут использоваться как для уточнения полученных ранее (см. [15] или [17]), так и для установления новых оценок поведения при $x \rightarrow +\infty$ решений широкого класса как одномерных, так и многомерных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.

§ 2. Доказательства

Докажем сформулированные выше утверждения.

Для доказательства утверждения теоремы 1 зафиксируем некоторую точку $x_0 \in I^n \setminus \{0\}$ и рассмотрим на множестве $I_{x_0}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n, 0 \leq x \leq x_0\}$ интегральное уравнение

$$z(x) = \widehat{f}(x_0) + \widehat{p}(x_0) \int_0^x K(t) z(t) dt + \widehat{q}(x_0) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) z(s) ds \right) dt,$$

решение которого $z(x)$ является на $I_{x_0}^n$ наилучшаемой оценкой сверху для удовлетворяющих неравенству (1.1) функций (см., например, [4]), причем $\widehat{f}(x_0)$, $\widehat{p}(x_0)$ и $\widehat{q}(x_0)$ определяются (1.2). Тогда

$$D_1 \cdots D_n z(x) = \widehat{p}(x_0) \cdot K(x) \cdot z(x) + \widehat{q}(x_0) \cdot l(x) \cdot \int_0^x m(t) z(t) dt \leq \\ \leq z(x) \left\{ \widehat{p}(x_0) K(x) + \widehat{q}(x_0) \cdot l(x) \cdot \int_0^x m(t) dt \right\},$$

где $D_1 \cdots D_k \equiv D_k(D_1 \cdots D_{k-1})$ ($k=2, 3, \dots, n$), а $D_l \equiv \frac{\partial}{\partial x_l}$. Но так как

$$D_1 \cdots D_k z(x) \cdot D_{k+1} z(x) \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

$$D_1 \cdots D_k z(x) |_{x_{k+1}=0} = 0,$$

согласно [7] имеем

$$\ln z(x) \leq \ln z(x)|_{x_0} + \int_0^x \left\{ \widehat{p}(x_0) \cdot K(t) + \widehat{q}(x_0) \cdot l(t) \cdot \int_0^t m(s) ds \right\} dt, \quad x \in I_{x_0}^n$$

откуда, с учетом того, что $z(x)|_{x_0} = \widehat{f}(x_0)$ и $u(x) \leq z(x)$ получаем, что

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \widehat{f}(x_0) \cdot \exp \left\{ \widehat{p}(x_0) \cdot \int_0^x K(t) dt + \widehat{q}(x_0) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) ds \right) dt \right\} = \\ &= Q(x_0, x), \quad x \in I_{x_0}^n. \end{aligned}$$

Так как искомая оценка верна и при $x = x_0$, имеем $u(x_0) \leq Q(x_0, x_0)$, откуда, ввиду произвольности выбора точки $x_0 \in I^n$, имеем $u(x) \leq Q(x, x)$, что и составляет содержание оценки (1.3) с учетом (1.4). Теорема доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 2 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. В классе локально интегрируемых с квадратом на I^n функций рассмотрим интегральные операторы

$$Au \equiv \int_0^x a(t) u(t) dt, \quad (2.1)$$

$$Bu \equiv \int_0^x b(t) \left(\int_0^t c(s) u(s) ds \right) dt. \quad (2.2)$$

Имеет место

Лемма 2.1 Пусть $e(x) \equiv 1$ и функции $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ локально интегрируемы с квадратом и неотрицательны на I^n , где n — нечетное число. Тогда для интегральных операторов (2.1) и (2.2) соотношения

$$A(A^{m-1} e \cdot B^p e) + B(A^m e \cdot B^{p-1} e) \leq A^m e \cdot B^p e \quad (2.3)$$

имеют место для любых натуральных p и m .

Для доказательства утверждения леммы заметим, что

$$\begin{aligned} R_{m,p}\{A, B\} &\equiv A(A^{m-1} e \cdot B^p e) + B(A^m e \cdot B^{p-1} e) = \\ &= \int_0^x a(t) \cdot A^{m-1} e(t) \cdot B^p e(t) dt + \int_0^x b(t) \left(\int_0^t c(s) A^m e(s) \cdot B^{p-1} e(s) ds \right) dt \leq \\ &\leq \int_0^x a(t) \cdot A^{m-1} e(t) \cdot B^p e(t) dt + \int_0^x b(t) \cdot A^m e(t) \left(\int_0^t c(s) B^{p-1} e(s) ds \right) dt. \end{aligned}$$

Так как

$$A^m e(x) = \int_0^x a(t) A^{m-1} e(t) dt \quad (m = 1, 2, \dots)$$

имеем, что $D_1 \cdots D_n A^m e(x) = a(x) A^{m-1} e(x)$ и $D_1 \cdots D_k A^m e(x)|_{x_{k+1}-c} = 0$ ($k=1, 2, \dots, n-1$). Тогда, проинтегрировав по частям в первом слагаемом, получим

$$\begin{aligned} R_{m,p} \{A, B\} &\leq \int_0^x D_1 \cdots D_n A^m e(t) \cdot B^p e(t) dt + \\ &+ \int_0^x b(t) \cdot A^m e(t) \left(\int_0^t c(s) \cdot B^{p-1} e(s) ds \right) dt = \\ &= A^m e(x) \cdot B^p e(x) + (-1)^n \int_0^x A^m e(t) \cdot D_1 \cdots D_n B^p e(t) dt + \\ &+ \int_0^x b(t) \cdot A^m e(t) \left(\int_0^t e(s) \cdot B^{p-1} e(s) ds \right) dt = A^m e(x) \cdot B^p e(x) + \\ &+ \int_0^x A^m e(t) \left\{ D_1 \cdots D_n B^p e(t) - b(t) \int_0^t c(s) B^{p-1} e(s) ds \right\} dt. \end{aligned}$$

Но выражение в фигурных скобках равно нулю, так как по определению

$$B^p e(x) = \int_0^x b(t) \left(\int_0^t c(s) B^{p-1} e(s) ds \right) dt \quad (p=1, 2, \dots).$$

Отсюда получаем, что $R_{m,p} \{A, B\} \leq A^m e \cdot B^p e$, что и доказывает лемму.

Лемма 2.2. В предположениях леммы 2.1 для интегральных операторов (2.1) и (2.2) соотношения

$$(A + B)^m e \leq \sum_{i=0}^m A^{m-i} e \cdot B^i e$$

имеют место для любого натурального m .

Доказательство проведем по индукции. При $m=1$ оно очевидно. Пусть оно верно для $m=k$. Тогда

$$(A + B)^{k+1} e \equiv (A + B) [(A + B)^k e] = A [(A + B)^k e] + B [(A + B)^k e].$$

Ввиду изотонности операторов A и B и предположения индукции при $m=k$

$$\begin{aligned} (A + B)^{k+1} e &\leq \sum_{i=0}^k A (A^{k-i} e \cdot B^i e) + \sum_{i=0}^k B (A^{k-i} e \cdot B^i e) = \\ &= A^{k+1} e + \sum_{i=1}^k A (A^{k-i} e \cdot B^i e) + \sum_{i=0}^{k-1} B (A^{k-i} e \cdot B^i e) + B^{k+1} e. \end{aligned}$$

Меняя индекс суммирования в первой сумме и делая замену $i=p-1$ во второй, получим

$$(A+B)^{k+1} e \leq A^{k+1} e + \sum_{p=1}^k A(A^{k-p} e \cdot B^p e) + \sum_{p=1}^k B(A^{k-p+1} e \cdot B^{p-1} e) + B^{k+1} e = A^{k+1} e + \sum_{p=1}^k \{A(A^{k-p} e \cdot B^p e) + B(A^{k-p+1} e \cdot B^{p-1} e) + B^{k+1} e\}.$$

Согласно утверждению леммы 2.1

$$A(A^{k-p} e \cdot B^p e) + B(A^{k-p+1} e \cdot B^{p-1} e) \leq A^{k-p} e \cdot B^p e \quad (p=1, 2, \dots, k).$$

Тогда

$$(A+B)^{k+1} e \leq A^{k+1} e + \sum_{p=1}^k A^{k-p} e \cdot B^p e + B^{k+1} e = \sum_{p=0}^{k+1} A^{k-p} e \cdot B^p e,$$

то есть (2.4) верна для $m = k + 1$, а следовательно и для любого натурального m . Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть функции $f(x)$, $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ локально интегрируемы с квадратом и неотрицательны на I^n , где n — нечетное число. Пусть, кроме того, $z_1(x)$ и $z_2(x)$ являются определенными на I^n решениями, соответственно, интегральных уравнений

$$u = 1 + Au, \quad (2.5)$$

$$v = 1 + Bv. \quad (2.6)$$

Тогда для определенного на I^n решения $z(x)$ интегрального уравнения

$$\omega(x) = f(x) + A\omega + B\omega \quad (2.7)$$

имеет место оценка

$$z(x) \leq \operatorname{esssup}_{0 < s < x} f(s) \cdot z_1(x) \cdot z_2(x) \quad (2.8)$$

почти всюду на I^n , если только $f(x)$ локально существенно ограничена на I^n .

Для доказательства утверждения леммы решение $z(x)$ интегрального уравнения (2.7) представим в виде ряда Неймана

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (A+B)^k f.$$

Так как $f(x)$ неотрицательна и локально существенно ограничена сверху на I^n , то

$$z(x) \leq \operatorname{esssup}_{0 < s < x} f(s) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (A+B)^k e,$$

где $e(x) \equiv 1$. Согласно утверждению леммы 2.2

$$z(x) \leq \operatorname{esssup}_{0 < s < x} f(s) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^k A^{k-p} e \cdot B^p e \right).$$

С другой стороны, так как $z_1(x)$ и $z_2(x)$ — определенные на I^n решения, соответственно, интегральных уравнений (2.5) и (2.6),

$$z_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k e, \quad z_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B^k e.$$

откуда, согласно формуле Коши для произведения абсолютно сходящихся рядов, получим

$$z(x) \leq \operatorname{esssup}_{0 < s < x} f(s) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^k A^{k-p} e \cdot B^p e \right) < \\ \leq \operatorname{esssup}_{0 < s < x} f(s) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k e \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B^k e = \operatorname{esssup}_{0 < s < x} f(s) \cdot z_1(x) \cdot z_2(x).$$

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения теоремы 2. Зафиксируем точку $x_0 \in I^n \setminus \{0\}$ и на множестве $I_{x_0}^n \equiv \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n, 0 \leq x \leq x_0\}$ рассмотрим интегральное уравнение

$$z(x) = f(x) + \widehat{p}(x_0) \int_0^x K(t) z(t) dt + \widehat{q}(x_0) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) z(s) ds \right) dt, \quad (2.9)$$

решение которого является наилучшаемой на $I_{x_0}^n$ оценкой сверху для удовлетворяющих неравенству (1.1) функций (см., например, [4]), причем $\widehat{p}(x_0)$ и $\widehat{q}(x_0)$ определяются (1.2). Если положить $a(x) \equiv \widehat{p}(x_0) \times K(x)$, $b(x) \equiv \widehat{q}(x_0) \cdot e(x)$ и $c(x) \equiv m(x)$, то согласно лемме 2.3 для решения интегрального уравнения (2.9) имеет место оценка

$$z(x) \leq \widehat{f}(x) \cdot z_1(x) \cdot z_2(x), \quad x \in I_{x_0}^n, \quad (2.10)$$

где $z_1(x)$ и $z_2(x)$, соответственно, решения интегральных уравнений

$$v(x) = 1 + \widehat{p}(x_0) \int_0^x K(t) v(t) dt \quad (2.11)$$

$$\omega(x) = 1 + \widehat{q}(x_0) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) \omega(s) ds \right) dt \quad (2.12)$$

на множестве $I_{x_0}^n$, а $\widehat{f}(x)$ определяется (1.2). Как это следует из утверждения теоремы 4 работы [6], для решения $z_1(x)$ интегрального уравнения (2.11) имеет место оценка

$$z_1(x) \leq I_m \{ \widehat{p}(x_0) \cdot \mu(x; h_1, h_2, \dots, h_m) \}, \quad (2.13)$$

где $I_m(\tau)$ и $\mu(x; h_1, h_2, \dots, h_m)$ определяются, соответственно, выражениями (1.8) и (1.7). Что касается рассматриваемого на $I_{x_0}^n$ решения $z_2(x)$ интегрального уравнения (2.12), то

$$z_2(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \omega_p(x), \quad (2.14)$$

где

$$\omega_0(x) \equiv 1,$$

$$\omega_p(x) = \widehat{q}(x_0) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) \cdot \omega_{p-1}(s) ds \right) dt \quad (p=1, 2, \dots).$$

Покажем, что для $\omega_p(x)$ имеет место оценка

$$\omega_p(x) \leq \frac{[\widehat{q}(x_0) \cdot \beta(x) \cdot \gamma(x)]^p}{(p!)^2} \quad (x \in I_{x_0}^n, \quad p=1, 2, \dots), \quad (2.15)$$

где

$$\beta(x) \equiv \int_0^x l(t) dt, \quad \gamma(x) \equiv \int_0^x m(t) dt.$$

Воспользуемся для этого методом математической индукции. При $p=1$ имеем

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &\equiv \widehat{q}(x_0) \cdot \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) \cdot \omega_0(s) ds \right) dt = \widehat{q}(x) \times \\ &\times \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) ds \right) dt \leq \widehat{q}(x_0) \cdot \int_0^x l(t) dt \times \\ &\times \int_0^x m(t) dt = \widehat{q}(x_0) \cdot \beta(x) \cdot \gamma(x). \end{aligned}$$

Пусть теперь (2.15) верна для $p=k$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_{k+1}(x) &\equiv \widehat{q}(x_0) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) \omega_k(s) ds \right) dt \leq \\ &< \widehat{q}(x_0) \int_0^x l(t) \left(\int_0^t m(s) \cdot \frac{[\widehat{q}(x_0) \cdot \beta(s) \cdot \gamma(s)]^k}{(k!)^2} ds \right) dt \leq \\ &< \frac{[\widehat{q}(x_0)]^{k+1}}{(k!)^2} \cdot \int_0^x l(t) \cdot [\beta(t)]^k dt \cdot \int_0^x m(s) [\gamma(s)]^k ds. \end{aligned}$$

Но так как $D_1 \dots D_n \beta(x) = l(x)$, $D_1 \dots D_n \gamma(x) = m(x)$ и так как

$$\begin{aligned} \int_0^x D_1 \dots D_n \beta(t) \cdot [\beta(t)]^k dt &\leq \frac{[\beta(x)]^{k+1}}{k+1}, \\ \int_0^x D_1 \dots D_n \gamma(t) \cdot [\gamma(t)]^k dt &\leq \frac{[\gamma(x)]^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

(см. [6], лемма 2), то

$$\omega_{k+1}(x) \leq \frac{[\hat{q}(x_0)]^{k+1}}{(k!)^2} \cdot \frac{[\hat{\beta}(x)]^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{[\hat{\gamma}(x)]^{k+1}}{k+1} = \frac{[\hat{q}(x_0) \cdot \hat{\beta}(x) \cdot \hat{\gamma}(x)]^{k+1}}{[(k+1)!]^2},$$

то есть оценка (2.15) верна для $p = k + 1$, а, следовательно, и для любого натурального p . Тогда, согласно (2.14)

$$z_2(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \omega_p(x) \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[\hat{q}(x_0) \cdot \hat{\beta}(x) \cdot \hat{\gamma}(x)]^p}{(p!)^2} = J_0 \left(2i \sqrt{\hat{q}(x_0) \cdot \hat{\beta}(x) \cdot \hat{\gamma}(x)} \right),$$

$$x \in I_{x_0}^n,$$

где $J_0(s)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Отсюда, с учетом (2.13) и (2.10) и того, что $u(x) < z(x)$ на $I_{x_0}^n$, получаем

$$u(x) \leq \hat{f}(x) \cdot I_n |p(x_0) \cdot \mu(x; h_1, \dots, h_m)| \cdot J_0 \left(2i \sqrt{\hat{q}(x_0) \cdot \hat{\beta}(x) \cdot \hat{\gamma}(x)} \right) \equiv \equiv Q(x_0; x)$$

на множестве $I_{x_0}^n$ для любой удовлетворяющей неравенству (1.1) функции.

Так как эта оценка имеет место на всем $I_{x_0}^n$, она по непрерывности имеет место и в точке $x = x_0$: $u(x_0) \leq G(x_0, x_0)$, откуда, ввиду произвольности выбора точки $x_0 \in I^n$ и следует искомая оценка (1.3) теоремы 2 на всем I^n . Теорема доказана.

Доказательство утверждения теоремы 3 проведем в два этапа. Сначала рассмотрим «предельные» случаи, когда $s = p$ и $s = 0$, а затем рассмотрим случай $0 < s < p$.

Доказательство для случаев $s = p$ и $s = 0$ проведем по индукции. Пусть $p = 1$, то есть рассматривается неравенство

$$u(x) \leq f(x) + r_1(x) \int_0^x n_1(t) \omega_1[u(t)] dt. \quad (2.16)$$

Пусть $x_0 \in I^n \setminus \{0\}$ — произвольная точка. Тогда решение интегрального уравнения

$$z(x) = \hat{f}(x_0) + \hat{r}_1(x_0) \int_0^x n_1(t) \cdot \omega_1[z(t)] dt,$$

где $\hat{f}(x_0)$ и $\hat{r}_1(x_0)$ определяются (1.2), будет наилучшей оценкой сверху на множестве $I_{x_0}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in I^n, 0 \leq x \leq x_0\}$ для удовлетворяющих неравенству (2.16) функций. Имеем

$$\frac{z(x)}{\hat{f}(x_0)} = 1 + \frac{\hat{r}_1(x_0)}{\hat{f}(x_0)} \int_0^x n_1(t) \cdot \omega_1[z(t)] dt. \quad (2.17)$$

Теперь рассмотрим отдельно случаи $s = p, s = 0$. Пусть сначала $s = p$. Тогда по условию $\omega_1(x) \leq \varphi_1(x)$, где $\varphi_1(x)$ субмультипликативна на I . С учетом этого из (2.17) имеем

$$\begin{aligned} \frac{z(x)}{\widehat{f}(x_0)} &\leq 1 + \frac{\widehat{r}_1(x_0)}{\widehat{f}(x_0)} \cdot \int_0^x n_1(t) \cdot \varphi_1 \left[\frac{z(t)}{\widehat{f}(x_0)} \cdot \widehat{f}(x_0) \right] dt \leq \\ &\leq 1 + \frac{\widehat{r}_1(x_0)}{\widehat{f}(x_0)} \cdot \varphi_1[\widehat{f}(x_0)] \cdot \int_0^x n_1(t) \cdot \varphi_1 \left[\frac{z(t)}{\widehat{f}(x_0)} \right] dt, \quad x \in I_{x_0}^n. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отсюда, используя оценку для решений многомерных интегральных неравенств вида (2.18) (см. [7], теорема 3), получим

$$\Phi_1 \left[\frac{z(t)}{\widehat{f}(x_0)} \right] \leq \Phi_1(1) + \frac{\widehat{r}_1(x_0)}{\widehat{f}(x_0)} \cdot \varphi_1[\widehat{f}(x_0)] \cdot \int_0^x n_1(t) dt, \quad x \in I_{x_0}^n,$$

где $\Phi_1(u)$ определяется выражением (1.15). Рассматривая полученное неравенство в точке $x = x_0$ и учитывая произвольность выбора $x_0 \in I^n$, получаем

$$\Phi_1 \left[\frac{z(t)}{\widehat{f}(x)} \right] \leq \Phi_1(1) + \frac{\widehat{r}_1(x)}{\widehat{f}(x)} \cdot \varphi_1[\widehat{f}(x_0)] \cdot \int_0^x n_1(t) dt \quad (2.19)$$

по крайней мере для тех $x \in I^n$, для которых выполнено условие (1.16) при $k=1$. Полученная оценка совпадает с (1.12) при $p=1$ (с учетом того, что $s=p$), так как обычно считается, что $\prod_{k=r-1}^r = 1$ для любого $r=0, 1, 2, \dots$.

Рассмотрим теперь случай $s=0$. Из (2.17) в этом случае следует, что

$$\begin{aligned} \frac{z(x)}{\widehat{f}(x_0)} &\leq 1 + \widehat{r}_1(x_0) \cdot \int_0^x n_1(t) \cdot \frac{1}{\widehat{f}(x_0)} \cdot \varphi_1[z(t)] dt \leq \\ &\leq 1 + \widehat{r}_1(x_0) \cdot \int_0^x n_1(t) \cdot \varphi_1 \left[\frac{z(t)}{\widehat{f}(x_0)} \right] dt, \end{aligned}$$

так как $\widehat{f}(x_0) \geq f(0) = \gamma$, а $\varphi_1(x)$ принадлежит $S_\gamma(I)$. Из полученного интегрального неравенства имеем

$$\Phi_1 \left[\frac{z(x)}{\widehat{f}(x_0)} \right] \leq \Phi_1(1) + \widehat{r}_1(x_0) \cdot \int_0^x n_1(t) dt, \quad x \in I_{x_0}^n,$$

где $\Phi_1(u)$ определяется, как и выше, выражением (1.15). Отсюда приведенными выше рассуждениями получим, что

$$u(x) \leq \widehat{f}(x) \cdot \Phi_1^{-1} \left\{ \Phi_1(1) + \widehat{r}_1(x) \cdot \int_0^x n_1(t) dt \right\}, \quad x \in I^n \quad (2.20)$$

по крайней мере для тех $x \in J^n$, для которых выполнено условие (1.17), в котором положено $k = s + 1$ и $s = 0$. Полученная оценка совпадает с (1.12) при $p = 1$ в том случае, когда $s = 0$.

Таким образом, оценка (1.12) имеет место для $p = 1$ в обоих «предельных случаях»: $s = p$ и $s = 0$. Предположим, что она имеет место при $p = L$ также в обоих случаях, то есть когда $s = p$ и $s = 0$. Положим $p = L + 1$ и запишем неравенство (1.9) в виде

$$u(x) \leq g(x) + \sum_{k=1}^L r_k(x) \cdot \int_0^x h_k(t) \omega_k[u(t)] dt, \quad (2.21)$$

где

$$g(x) \equiv f(x) + r_{L+1}(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) \cdot \omega_{L+1}[u(t)] dt. \quad (2.22)$$

Здесь снова рассмотрим отдельно случаи $s = p$ и $s = 0$. Пусть сначала $s = p$. Тогда, по предположению индукции

$$u(x) \leq \widehat{g}(x) \cdot \prod_{k=1}^L Q_k(x),$$

где $Q_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, L$) определяются выражениями (1.13). Отсюда, используя (2.22), имеем

$$u(x) \leq \widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^L Q_k(x) + \widehat{r}_{L+1}(x) \cdot \prod_{k=1}^L Q_k(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) \cdot \omega_{L+1}[u(t)] dt.$$

Используя уже доказанную для случая одного слагаемого оценку (2.19), получаем

$$u(x) \leq \widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^L Q_k(x) \cdot \Phi_{L+1}^{-1} \left\{ \Phi_{L+1}(1) + \frac{\widehat{r}_{L+1} \prod_{k=1}^L Q_k(x)}{\widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^L Q_k(x)} \cdot \varphi_{L+1} \left[\widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^L Q_k(x) \right] \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) dt \right\},$$

так как очевидно, что $\widehat{Q}_k(x) = Q_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, p$). Однако, так как функция $\varphi_{L+1}(x)$ субмультипликативна на I , имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{L+1} \left[\widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^L Q_k(x) \right] &\leq \varphi_{L+1}[\widehat{f}(x)] \cdot \varphi_{L+1} \left[\prod_{k=1}^L Q_k(x) \right] < \\ &\leq \varphi_{L+1}[\widehat{f}(x)] \cdot \prod_{k=1}^L \varphi_{L+1}[Q_k(x)]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 u(x) &\leq \widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^L Q_k(x) \cdot \Phi_{L+1}^{-1} \left\{ \Phi_{L+1}(1) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\widehat{r}_{L+1}(x)}{\widehat{f}(x)} \cdot \varphi_{L+1}[\widehat{f}(x)] \cdot \prod_{k=1}^L \varphi_{L+1}[Q_k(x)] \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) dt \right\} = \\
 &= \widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L+1} Q_k(x),
 \end{aligned}$$

если учесть, что $Q_{L+1}(x)$ определяется (1.13).

Таким образом, оценка (1.12) имеет место для $p = L + 1$, а следовательно и для любого p , если рассматривается случай $s = p$.

Рассмотрим теперь случай $s = 0$. По предположению индукции из (2.21) следует, что

$$u(x) \leq g(x) \cdot \prod_{k=1}^L G_k(x),$$

так как $g(0) = f(0) = \gamma$, $\varphi_k(x)$ принадлежит классу $S_\gamma(I)$ для любого $k = 1, 2, \dots, L$. Отсюда, согласно (2.22), имеем

$$\begin{aligned}
 u(x) &\leq \widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^L G_k(x) + \widehat{r}_{L+1}(x) \cdot \prod_{k=1}^L G_k(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) \cdot \omega_{L+1}[u(t)] dt = \\
 &= \widetilde{f}(x) + \widetilde{r}_{L+1}(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) \cdot \omega_{L+1}[u(t)] dt.
 \end{aligned}$$

Используя уже доказанную для случая одного слагаемого оценку (2.20) и учитывая представление (1.14) для $G_{L+1}(x)$, получим

$$\begin{aligned}
 u(x) &\leq \widetilde{f}(x) \cdot \Phi_{L+1}^{-1} \left\{ \Phi_{L+1}(1) + \widetilde{r}_{L+1}(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) dt \right\} = \\
 &= \widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^L G_k(x) \cdot \Phi_{L+1}^{-1} \left\{ \Phi_{L+1}(1) + \widetilde{r}_{L+1}(x) \cdot \prod_{k=1}^L G_k(x) \cdot \int_0^x n_{L+1}(t) dt \right\} = \\
 &= \widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^L G_k(x) \cdot G_{L+1}(x) = \widehat{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^{L+1} G_k(x),
 \end{aligned}$$

так как $\widetilde{f}(0) = f(0) = \gamma$, а $\varphi_{L+1}(x)$ принадлежит $S_\gamma(I)$.

Таким образом, оценка (1.12) имеет место и для $p = L + 1$, а следовательно и для любого p и в случае $s = 0$. Следовательно, она верна для любого числа слагаемых в обоих «предельных» случаях: $s = p$ и $s = 0$.

Рассмотрим теперь случай $0 < s < p$. Перепишем неравенство (1.9) в виде

$$u(x) \leq f(x) + \sum_{k=1}^s r_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \omega_k[u(t)] dt + \\ + \sum_{k=s+1}^p r_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \cdot \omega_k[u(t)] dt.$$

Если обозначить

$$h(x) \equiv f(x) + \sum_{k=s+1}^p r_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \cdot \omega_k[u(t)] dt, \quad (2.23)$$

то искомое неравенство запишется в виде

$$u(x) \leq h(x) + \sum_{k=1}^s r_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \cdot \omega_k[u(t)] dt.$$

Так как $\omega_k(x) \leq \varphi_k(x)$ ($x \in I$, $k=1, 2, \dots, s$), причем все $\varphi_k(x)$ субмультипликативны на I , согласно доказанному выше (см. случай $s=p$) имеем, что

$$u(x) \leq \tilde{h}(x) \cdot \prod_{k=1}^s Q_k(x),$$

где $Q_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, s$) определяются выражениями (1.13). Тогда, ввиду (2.23), получаем

$$u(x) \leq \tilde{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^s Q_k(x) + \sum_{k=s+1}^p \tilde{r}_k(x) \cdot \prod_{L=1}^s Q_L(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \omega_k[u(t)] dt = \\ = \tilde{f}(x) \cdot \sum_{k=s+1}^p \tilde{r}_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \cdot \omega_k[u(t)] dt,$$

то есть интегральное неравенство вида (1.9), в котором $\omega_k(x) \leq \varphi_k(x)$ ($x \in I$, $k=s+1, \dots, p$), причем все $\varphi_k(x)$ принадлежат классу $S_\gamma(I)$, где $\gamma = f(0)$. Тогда, так как $\tilde{f}(0) = f(0) = \gamma$, согласно доказанному выше (см. случай $s=0$) имеем

$$u(x) \leq \tilde{f}(x) \cdot \prod_{k=s+1}^p \Phi_k^{-1} \left\{ \Phi_k(1) + \tilde{r}_k(x) \cdot \prod_{L=s+1}^{k-1} G_L(x) \cdot \int_0^x n_k(t) dt \right\} = \\ = \tilde{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^s Q_k(x) \cdot \prod_{k=s+1}^p \Phi_k^{-1} \left\{ \Phi_k(1) + \tilde{r}_k(x) \cdot \prod_{L=1}^s Q_L(x) \cdot \prod_{L=s+1}^p G_L(x) \times \right. \\ \left. \times \int_0^x n_k(t) dt \right\} = \tilde{f}(x) \cdot \prod_{k=1}^s Q_k(x) \cdot \prod_{k=s+1}^p G_k(x),$$

если учесть, что $G_k(x)$ ($k = s + 1, \dots, p$) определяются выражениями (1.14). Таким образом, оценка (1.12) верна и в случае $0 < s < p$. Теорема 3 доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 4 перепишем интегральное неравенство (0.1) в виде

$$u(x) \leq g(x) + Ku + Lu, \quad x \in I^n, \quad (2.24)$$

где

$$g(x) \equiv f(x) + \sum_{k=1}^p r_k(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \cdot \omega_k[u(t)] dt. \quad (2.25)$$

Для решений интегральных неравенств вида (2.24) из теорем 1 и 2 следует оценка

$$u(x) \leq \widehat{g}(x) \cdot \tau(x), \quad x \in I^n, \quad (2.26)$$

где $\widehat{g}(x)$ определяется (1.2), а $\tau(x)$ совпадает с выражением (1.4), если выполнены условия теоремы 1 и с выражением (1.6), если выполнены условия теоремы 2. Используя (2.25), из (2.26) легко получаем, что

$$u(x) \leq \widehat{f}(x) \cdot \tau(x) + \sum_{k=1}^p \widehat{r}_k(x) \cdot \tau(x) \cdot \int_0^x n_k(t) \omega_k[u(t)] dt. \quad (2.27)$$

Обращение интегральных неравенств вида (2.27) составляет содержание теоремы 3, откуда, в силу $\widehat{f}(0) \cdot \tau(0) = \widehat{f}(0) = f(0) = \gamma$, получаем для удовлетворяющих неравенству (0.1) непрерывных функций $u(x)$ оценку (1.20). При этом легко видеть, что $\widehat{Q}_k(x)$ и $\widehat{G}_k(x)$ получаются, соответственно, из (1.13) и (1.14) заменой всюду $\widehat{f}(x)$ на $\widehat{f}(x) \cdot \tau(x)$, а $\widehat{r}_k(x)$ — на $\widehat{r}_k(x) \cdot \tau(x)$ ($k = 1, 2, \dots, p$).

Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность А. Б. Нерсисяну за внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 1. X. 1985

Յ 2. ՄԱՄԻԿՈՆՅԱՆ. Որոշ դասի բազմաչափ ոչ գծային ինտեգրալ անհավասարումների լուծումների գնահատականներ (ամփոփում)

Աշխատանքը նվիրված է դիֆերենցիալ և ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների որակական ուսումնասիրման հետ կապված (0.1) տեսքի բազմաչափ ոչ գծային ինտեգրալ անհավասարումների լուծումների գնահատականներին:

Առաջարկած գնահատականները ամփոփում են և ճշգրտում մասնավոր դեպքերի համար (հիմնականում միաչափ) ստացած արդյունքները:

F. H. MAMIKONIAN. *Estimates of solutions of some multidimensional nonlinear integral inequalities (summary)*

The paper is devoted to estimation of solutions of some multidimensional nonlinear integral inequalities connected with qualitative theory of differential and integrodifferential equations.

The estimates obtained improve and generalize some results known for special cases (mainly for onedimensional inequalities).

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Walter*. Differential and Integral Inequalities. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
2. *V. Lakshmikantham, S. Leela*. Differential and Integral Inequalities, vols. 1 and 2, Academic Press, New York, 1969.
3. *I. Bihari*. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problem of differential equations, Acta Math. Acad. Scient. Hung., v. 7, № 1, 1956, 81—93.
4. *Н. В. Азбелев, Э. Б. Цалюк*. Об интегральных неравенствах, 1. Мат. сборник, 56 (98), № 3, 1962, 325—342.
5. *Ф. О. Мамиконян*. Об одном обобщении неравенства Гронуолла. Республиканская научно-практическая конференция преподавателей вузов по математике, Тезисы докладов, Ереван, 1981, 17—19.
6. *Ф. О. Мамиконян*. Об оценках решений некоторых многомерных интегральных неравенств, ДАН Арм.ССР, 73, № 3, 1981, 136—145.
7. *Ф. О. Мамиконян*. Обращение некоторых многомерных нелинейных операторных неравенств, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 20, № 5, 1985, 349—365.
8. *G. Butler, T. Rogers*. A generalization of a lemma of Bihari and applications to pointwise estimates for integral equations, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 33, № 1, 1971, 77—81.
9. *U. D. Dhongade, S. G. Deo*. Some generalization of Bellman-Bihari integral inequalities, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 44, № 1, 1973, 218—226.
10. *V. Singare*. Some integral inequalities in two independent variables. Mathematics Seminar Notes Kobe Univ., v. 10 № 2 2, 1982, 775—783.
11. *B. G. Pachpatte*. On some integral inequalities similar to Bellman-Bihari inequalities, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 49, № 3, 1975, 794—802.
12. *B. G. Pachpatte, B. K. Sengge*. On nonlinear integral inequalities of the Wendroff type, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 70, № 1, 1979, 161—169.
13. *B. G. Pachpatte*. On some fundamental partial integral inequalities, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 73, № 1, 1980, 238—251.
14. *S. R. Grace, B. S. Lalli*. Asymptotic behaviour of certain second order integrodifferential equations. Journal of Math. Anal. and Appl., v. 76, № 1, 1980, 84—90.
15. *R. P. Agarwal*. A note on Grace-Lall's paper, Journal of Math. Anal. and Appl. v. 86, № 2, 1982, 471—475.
16. *J. Tong*. The asymptotic behaviour of a class of nonlinear differential equations of second order, Proc. of the Amer. Math. Society, v. 84, № 2, 1982, 235—236.
17. *En Hao Yang*. Boundedness conditions for solutions of the differential equation, $(\alpha(t)x')' + f(t, x) = 0$, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications v. 8, № 5, 1984, 541—547.
18. *P. R. Beesack*. On some Gronwall-type integral inequalities in n independent variables, Journal of Math. Anal. and Appl., v. 100, № 2, 1984, 393—408.