ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517.53

Ф. А. ШАМОЯН

ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И НОВАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАССА *BMO*

Введение

Пусть $H^p\,(0<p\leqslant+\infty)$ — класс Харди в единичном круге $\mathrm{D}=\{\zeta\in\mathbf{C}:|\zeta|<1\}$. Если $f\in H^p$, то $f=J_f Q_f$, где J_f — внутренняя, а Q_f — внешняя части функции f (см. [1]). Сравнительно недавно выяснилось, что эта факторизация обладает следующим важным свойством: многие классы функций, аналитических в D и гладких вплоть до единичной окружности Γ, инвариантны относительно деления на внутренний множитель (т. е. вместе с f соответствующий класс содержит J^{-1}, где J — любой внутренний делитель функции J_f). Это свойство важно для описания замкнутых идеалов (инвариантных подпространств) в алгебрах (пространствах) аналитических функций.

Обзор о состоянии вопроса дан в [2] и [3].

Устойчивость многих классов функций относительно деления на внутренний множитель может быть выведена из того, что оператор Теплица $\mathrm{T}_h: f\to P(\bar{h}f)$, где $h\in H^\infty$, а P — проектор М. Рисса, сохраняет гладкость функции, понимаемую в том или ином смысле (см. [4] и [5]). В работе [2], в частности, было доказано, что T_h действует в пространстве $H^p_n=\{f\in H^1: f^{(n)}\in H^p\}$ каковы бы ни были целое $n\geqslant 0$, $p\in(1,+\infty)$ и функция $h\in H^\infty$ (H^p_n наделяется нормой

$$\|f\|_{H^p_n}=\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|f^{(k)}\|_{H^p}).$$

Доказательство, данное в [2], существенно опирается на теорему М. Рисса о непрерывности проектора P в $L^p(\Gamma)$ при $p\in(1,+\infty)$ и поэтому неприменимо к классу H^1_n (см. [1]).

В этой статье мы дадим полную характеристику тех $h\in L^1(\Gamma)$, для которых операторы T_h действуют в пространствах H^1_n и $BMOA_n$ (см. теорему 1). Установление этих результатов основано на новой характеристике голоморфных в круге функций с граничными значениями из классов BMO. Хорошо известно, что изучение указанных теплицевых операторов в пространствах голоморфных в круге функций и гладких вплоть до его границы, имеет и другие интересные приложения (см. [6], [7]). Одно из таких приложений к задачам наилучшего приближения приведено в § 2 (теорема 3). Часть результатов этой статьи ранее была анонсирована в работе [8].

§ 1. Теплицевы операторы в пространствах H^1_n и $BMOA_n$

Пусть f—суммируемая функция на единичной окружности Г, скажем, что f принадлежит классу BMO, если

$$\|f\|_{BMO} = \sup_I \left\{\frac{1}{|I|}\int_I |f(t) - f_I|\, dt\right\} < +\infty,$$

где I—дуга на единичной окружности Г, $f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f(t)\, dt$, $|I|$— длина дуги I.

Обозначим, далее, через $BMOA_n = BMO \cap H^1_n$, $BMOA = BMOA_0$, $\|f\|_{BMOA_n} = \max_{0<k<n} \|f^{(k)}\|_{BMO}$.

Исходя из результатов работы [10], легко установить, что

$$BMOA = \left\{f \in H^1 : f(z) = \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} |d\xi|,\ \varphi \in L^\infty(\Gamma),\ z \in D\right\}. \qquad (1)$$

При этом существует функция $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$ в представлении (1) такая, что

$$\|f\|_{BMOA} \leqslant C\|\varphi\|_\infty, \qquad (2)$$

где C не зависит от f и φ (см. [10]).

Классы BMO, введенные в работах [10], [11], в последнее время играют существенную роль в различных вопросах комплексного анализа (см., например, [7], [9], [17]).

В дальнейшем $X = H^1_n$ $(n \geqslant 1)$ или $X = BMOA_n$ $(n > 1)$. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1. *Пусть $h \in L^1(\Gamma)$, $T_h(f) = P(\bar{h}f)$—теплицев оператор с символом h. Тогда*

1. *Следующие утверждения равносильны*:

а) *T_h действует в пространстве X,*

б) *h допускает представление*

$$h = h_1 + h_2, \qquad (3)$$

где $\bar{h}_1 \in X$, $h_2 \in H^\infty_0$. Здесь $H^\infty_0 = \{f \in H^\infty : f(0) = 0\}$.

2. *Если h допускает представление* (3), *то имеет место оценка*

$$\|T_h\| \leqslant C(n)(\|\bar{h}_1\|_X + \|h_2\|_\infty). \qquad (4)$$

Если же $h_1 \equiv 0$, то справедлива также обратная оценка

$$\|h_2\|_\infty \leqslant \|T_h\|. \qquad (5)$$

Замечание 1. Условие $n > 1$ в теореме существенно: утверждение б)$\Rightarrow$а) очевидно не имеет места при $X = H^1$, $BMOA$. Это немедленно следует из представления

$$T_h(f) = M_{h_1}(f) + T_{h_2}(f),\ f \in X,$$

где $M_{h_1}(f)(z) = \bar{h}_1(z) f(z)$, $z \in D$.

поскольку M_{h_1} действует в X не при всех $\overline{h}_1 \in X$. Более того, когда $X = H^1$, $h \in H^\infty$, импликация б) $\Rightarrow$ а) снова перестает быть справедливой. Действительно, положим

$$h(z) = h_2(z) = \exp\left\{-\frac{1+z}{1-z}\right\}, \ \varphi(z) = \log\frac{1}{1-z}, \ z \in \mathrm{D},$$

где берется главная ветвь логарифма. Легко видеть, что $\varphi \in BMOA$. Используя двойственность между H^1 и $BMOA$ (см. [10]), заметим, что при ограниченности T_h функция $\varphi \cdot h$ должна принадлежать $BMOA$, а это не имеет места, поскольку

$$\sup_{z \in \mathrm{D}} \{(1-|z|)\,|(h(z)\,\varphi(z))'|\} = +\infty.$$

Значит, функция $\varphi \cdot h$ не представима в виде (1).

Другие примеры подобного рода можно построить, используя результаты работ [12], [14]. Отметим, что такой же эффект для других пространств голоморфных в круге D функций впервые был обнаружен в работе [2].

Следствие. Если $f \in X$, $f = JF$, где J — внутренняя функция, а $F \in H^1$, то $F \in X$ и

$$\|F\|_X \leqslant C(n)\,\|f\|_X.$$

В самом деле, $F = \mathrm{T}_{\overline{J}}(f)$. При $X = H^1_1$ это утверждение иным методом было доказано в [15].

Доказательство теоремы 1 основано на новой характеристике функций класса $BMOA$ в терминах старших производных, на наш взгляд, имеющих самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть G — аналитическая функция в единичном круге* D, *n — натуральное число, тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $G \in BMOA$,

2. $\displaystyle\int_{\mathrm{D}} |F^{(n)}(z)|\,|G^{(n)}(z)|\,(1-|z|)^{2n-1}\, d\sigma(z) \leqslant C(n, G)\,\|F\|_{H^1}$

какова бы ни была функция F класса H^1. Если G представима по формуле (1), *то $C(n, G) \leqslant C(n)\,\|\varphi\|_\infty$. Здесь σ обозначает плоскую меру Лебега.*

§ 2. Вывод теоремы 1 из теоремы 2

Сначала докажем импликацию а) $\Rightarrow$ б). Пусть T_h действует в пространстве X, тогда $\mathrm{T}_h(1) \in X$. Положим $h_1 \overset{\text{def}}{=} \overline{\mathrm{T}_h(1)}$. Очевидно, что функция $h_2 = h - h_1$ принадлежит классу H^1_0, где $H^1_0 = \{f \in H^1, f(0) = 0\}$. Докажем, что $h_2 \in H^\infty$. Имеем

$$\mathrm{T}_h(f)(z) = \overline{h_1(z)}\, f(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\,\overline{h_2(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta, \ z \in \mathrm{D}.$$

По условию $\overline{h_1} \in X$, поскольку оператор умножения на $\overline{h_1}$ ограничен в пространстве X, то оператор T_{h_2} действует в пространстве X. Имеем

$$\mathrm{T}_{h_2}(f)(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{h_2(e^{i\theta})} \, e^{-ik\theta} \, d\theta \right) z^k. \tag{6}$$

Пусть $f(z) = f_r(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{C(r,\ n)}{1 - rz}$, $z \in \mathrm{D}$, $r \in (0,\ 1)$, а постоянная $C(r,\ n)$ подобрана таким образом, чтобы $\|f_r\|_X = 1$, при всех $r \in (0,\ 1)$. Вычислим коэффициенты разложения функции $g_r(z) = \mathrm{T}_{h_2}(f_r)(z)$, $z \in \mathrm{D}$. Используя (6), найдем

$$a_k(g_r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_r(e^{i\theta}) \overline{h_2(e^{i\theta})} \, e^{-ik\theta} \, d\theta =$$

$$= C(r,\ n) \overline{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h_2(\zeta)\,\zeta^k}{\zeta - r} \, d\zeta} = C(r,\ n) \overline{h_2(r)} \, r^k,$$

$$k = 0,\ 1,\ 2, \cdots.$$

Следовательно, $g_r(z) = \overline{h_2(r)} f_r(z)$, $z \in \mathrm{D}$. В то же время

$$\|\mathrm{T}_{h_2}(f_r)\|_X = |h_2(r)| \, \|f_r\|_X = |h_2(r)| \leqslant \|\mathrm{T}_{h_2}\| \, \|f_r\|_X = \|\mathrm{T}_{h_2}\|.$$

Подбирая вместо функции $f_r(z)$ функцию $f_r(e^{i\theta} z)$, таким же образом получим

$$|h_2(r e^{i\theta})| \leqslant \|\mathrm{T}_h\|, \ \theta \in]-\pi,\ \pi], \ r \in (0,\ 1),$$

т. е. $\|h_2\|_\infty \leqslant \|\mathrm{T}_h\|$. Таким образом, импликация а) $\Rightarrow$ б) и одновременно оценка (5) установлены.

Для доказательства б) $\Rightarrow$ а), не умаляя общности, можно предположить, что $h_1 \equiv 0$, т. е. $h = h_2 \in H^\infty$. Пусть сначала $X = H^1_n$ $(n \geqslant 1)$ и $f \in H^1_n$, $F = \mathrm{T}_h(f)$. Прежде всего заметим, что достаточно доказать оценку (4) в том случае, когда f голоморфна в круге радиуса больше единицы.

Дейтвительно, пусть $f_k(z) = f\left(\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) z\right)$, $k = 1,\ 2, \cdots$. Очевидно, что последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ приближает функцию f в пространстве H^1_n. Положим

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_k(\zeta)\, h(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \ z \in \mathrm{D}.$$

Если мы докажем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_k^{(n)}(e^{i\theta})| \, d\theta \leqslant C(n) \, \|h\|_\infty \, \|f\|_{H^1_n},$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_k^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant C(n) \|h\|_\infty \|f_k\|_{H_n^1},\ 0 < r < 1.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, $k \to +\infty$ получим нужное нам утверждение. Итак, будем предполагать, что f голоморфна в $\overline{D}$. Пусть $\psi \in L^\infty$ и такова, что $\|\psi\|_\infty = 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} F^{(n)}(re^{i\theta})\, \overline{\psi(e^{i\theta})}\, d\theta, \tag{7}$$

где, как и прежде, $F = T_h(f)$.

Используя вид F получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^{(n)}(re^{i\varphi})\, \psi(e^{i\varphi})\, d\varphi =$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, \overline{h(e^{i\theta})\, e^{in\theta}} \, \overline{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\varphi})\, e^{i(n+1)\varphi}\, d\varphi}{(e^{i\varphi} - re^{i\theta})^{n+1}}}\,.$$

Положим

$$G(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\varphi})\, e^{i(n+1)\varphi}}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi,\ z \in D.$$

Теперь равенство (7) можно записать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, \overline{e^{in\theta} h(e^{i\theta})\, G^{(n)}(re^{i\theta})\, d\theta}.$$

Проинтегрировав по частям, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(e^{i\theta})\, e^{in\theta})^{(n)}\, e^{in\theta}\, \overline{g_r(e^{i\theta})}\, d\theta,$$

где

$$g_r(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^z (z-t)^{n-1} h(t)\, t^n\, G^{(n)}(rt)\, dt.$$

Учитывая, что $g_r \in H^2$ и $g_r \to g_1 \overset{\mathrm{def}}{=} g$ при $r \to 1-0$ в пространстве H^2, приходим к равенству

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F^{(n)}(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(e^{i\theta})\, \overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta,$$

где

$$f_n(z) = (z^n f(z))^{(n)} z^n.$$

При условии теоремы

$$f_n \in H^1 \text{ и } \|f_n\|_{H_1} \leqslant C(n)\|f\|_{H^1_n}.$$

Далее, воспользовавшись условием $f_n^{(k)}(0)=0$, $k=0, 1,\cdots, n-1$, $g^{(k)}_{(0)}=0$, $k=0, 1,\cdots, 2n$, легко установить равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\,d\theta =$$

$$=\frac{2}{(2n-1)!}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(f_n(re^{i\theta})(re^{i\theta})^n)^{(n)}\overline{g^{(n)}(re^{i\theta})e^{in\theta}}\overline{r^{-n}}(1-r^2)^{2n-1}\,rd\theta\,dr. \quad (8)$$

Учитывая вид функций f_n и g, а также равенство (8), окончательно получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F^{(n)}(e^{i\theta})|\,d\theta < C(n)\|h\|_\infty \times$$

$$\times\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}|f_n^{(n)}(re^{i\theta})|G^{(n)}(re^{i\theta})|(1-r)^{2n-1}\,rdrd\theta.$$

По теореме 2 последний интеграл не превосходит const$\|f\|_{H^1_n}$. Таким образом, когда $X=H^1_n$, оценка (4) установлена.

Случай пространства $BMOA_n$. Пусть снова $F=T_h(f)$, $f\in BMOA_n$, $h\in H^\infty$. Тогда, как и выше, для произвольного $\psi\in H^1$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}F^{(n)}(re^{i\theta})\overline{\psi(e^{i\theta})}\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}f_n(e^{i\theta})\overline{G_r(e^{i\theta})\,d\theta},\ r\in(0,1),$$

где

$$G_r(z)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^z(z-t)^{n-1}h(t)\,t^n(\zeta^n\psi(\zeta))^{(n)}_{\zeta=rt}\,dt,$$

$$f_n(z)=(f(z)z^n)^{(n)}z^n,\ z\in\mathrm{D}.$$

Снова используя равенство (8), получаем

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}F^{(n)}(re^{i\theta})\overline{\psi(e^{i\theta})}\,d\theta\right|\leqslant C_1(n)\|h\|_\infty\int_{\mathrm{D}}|f^{(2n)}(\zeta)\|\psi^{(n)}(\zeta)|(1-|\zeta|)^{2n-1}\,d\sigma(\zeta).$$

Здесь $d\sigma$—плоская мера Лебега на D. По теореме 2

$$\int_{\mathrm{D}}|f^{(2n)}_{(\zeta)}|\,|\psi^{(n)}_{(\zeta)}|\,(1-|\zeta|)^{2n-1}\,d\sigma(\zeta)\leqslant C_2(n)\|f^n\|_{BMOA}\|\psi\|_{H^1}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\overline{F^{(n)}(re^{i\theta})}\,\psi(e^{i\theta})\,d\theta\right|\leqslant C_3\|h\|_\infty\|\psi\|_{H^1}\|f\|_{BMOA_n}.$$

По теореме Стейна-Феффермана [10] $F^{(n)} \in BMOA$ и

$$\|F^{(n)}\|_{BMOA} \leqslant \tilde{C}(n)\, \|h\|_\infty\, \|f\|_{BMOA_n}.$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

Замечание. Рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, показывают, что если X—некоторая банахова алгебра голоморфных в круге D функций, гладких вплоть до его границы, то описание тех функций $h \in L^1(\Gamma)$, для которых T_h действует в пространстве X, фактически сводится к доказательству ограниченности T_h в X при условии, что $h \in H^\infty$.

Приведем одно приложение теоремы 1. Пусть $W_n^p(\Gamma)$, $(1 \leqslant p < +\infty)$ класс Соболева на единичной окружности Г, $BMO_n = \{f : f^{(n)} \in BMO\}$. Пусть, далее, X означает один из вышеуказанных классов функций. Для $f \in X$ положим

$$\inf_{g \in H^1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - g_f(e^{i\theta})|\, d\theta,$$

g_f является метрической проекцией функции f на подпространство H^1. Будем ее обозначать через $P_0(f)$. Пусть $f \in X$. Естественным образом возникает следующая задача; можно ли утверждать, что $P_0(f)$ также принадлежит классу X? Аналогичная задача в других классах функций рассматривалась в работах [6], [7], [16].

Теорема 3. *Пусть $f \in X$ и $P(f) \in X$, где P—проектор М. Рисса, тогда $P_0(f) \in X$.*

Доказательство. Положим

$$\psi = f - P_0(f). \tag{9}$$

По известной теореме (см. [9]) существует функция $h \in H^\infty$, $\|h\|_\infty = 1$ такая, что $h(e^{i\theta})\,\psi(e^{i\theta}) = |\psi(e^{i\theta})|$ почти всюду на Г. Следовательно

$$\overline{h}^2(e^{i\theta})\,\overline{\psi}(e^{i\theta}) = \psi(e^{i\theta}) \tag{10}$$

почти всюду. Положим $P_- = I - P$, где I—единичный оператор. Ясно, что для доказательства теоремы достаточно установить, что $\psi \in X$. С этой целью заметим, что $P_-\psi \in X$. Действительно, из равенства (9) имеем $P_-\psi = P_- f$, а по условию теоремы $P_- f$ принадлежит классу X. Теперь установим принадлежность функции $P\psi$ классу X. Для этого используем равенство (10) и положим

$$\psi_1 = P\overline{\psi},\quad \psi_2 = P_-\overline{\psi}.$$

Из (9) вытекает, что $\psi_1 \in X \cap H^1$. В то же время, в силу теоремы 1 и результатов работы [2] получаем $P\psi = P\overline{h}^2\psi_1 \in X$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $X = BMO_n$ или $X = W_n^p(\Gamma)$, $(1 < p < +\infty)$. Тогда оператор наилучшего приближения действует в X, т. е. $P_0 X \subset X$.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Доказательство 2) ⟹ 1). Не умаляя общности можно считать, что $G^{(k)}(0)=0$, $k=0, 1, \cdots, n-1$. Пусть $r\in(0, 1)$ и F регулярна на $D\cup\Gamma$. Тогда, используя равенство (8) и 2), получаем

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta})\overline{G(re^{i\theta})}\,d\theta\right|=\left|\int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\theta})\overline{G(e^{i\theta})}\,d\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant C(n)\int_{\mathbf{D}}|F^{(n)}(rz)||G^{(n)}(z)|(1-|z|)^{2n-1}\,d\sigma(z)\leqslant$$

$$\leqslant C(n, G)\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant C(n, G)\|F\|_{H^1}.$$

Из теоремы Стейна-Феффермана о двойственности пространств BMO и H^1 легко вывести теперь, что

$$G(rz)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi_r(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}\,d\theta,\quad z\in\mathbf{D},$$

где $\psi_r\in L^\infty(\Gamma)$, $\|\psi_r\|_\infty\leqslant AC(n, G)$, A—некоторое положительное число. Выбирая $r_j\uparrow 1$ так, что ψ_{r_j} * слабо сходится в $L^\infty(\Gamma)$ к некоторой функции из $\psi\in L^\infty(\Gamma)$, мы убедимся в том, что $G\in BMOA$. Для дальнейшего нам будет нужна

Лемма. *Пусть H—такая неотрицательная и измеримая по Лебегу в $\mathbf{D}$ функция, что мера $H^2(z)(1-|z|)\,d\sigma(z)$ карлесонова, т. е.*

$$\int_{\Delta_l(\varphi)} H^2(\zeta)(1-|\zeta|)\,d\sigma(\zeta)<C(H)\,l,\quad 0<l<1,\quad \varphi\in[-\pi, \pi],$$

где $\Delta_l(\varphi)=\left\{\zeta: 1-l<|\zeta|<1,\ |\arg\zeta-\varphi|<\frac{l}{2}\right\}$.

Тогда при любом натуральном p

$$\int_{\mathbf{D}}|F^{(p)}(\zeta)|\,H(\zeta)(1-|\zeta|)^p\,d\sigma(\zeta)\leqslant C(H, p)\|F\|_{H^1}$$

какова бы ни была функция $F\in H^1$.

Доказательство. Как известно, $F=f\cdot g$, где $f, g\in H^2$ и $\|F\|_{H^1}=\|f\|_{H^2}\|g\|_{H^2}$ (см. [1]). Из формулы Лейбница для производных произведения следует, что достаточно оценить

$$J=\int_{\mathbf{D}}|f^{(j)}(\zeta)\,g^{(p-j)}(\zeta)|\,H(\zeta)(1-|\zeta|)^p\,d\sigma(\zeta),\quad 0\leqslant j\leqslant p.$$

Ясно, что $p=\left(j+\frac{1}{2}\right)+\left(p-j-\frac{1}{2}\right)$ и

$$J^2 \leqslant \int\limits_D |f^{(j)}(\zeta)|^2 H^2(\zeta)(1-|\zeta|)^{2j+1} d\sigma(\zeta) \cdot \int\limits_D |g^{p-j}(\zeta)|^2 (1-|\zeta|)^{2(p-j)-1} d\sigma(\zeta) \overset{def}{=} J_1^2 \cdot J_2^2.$$

Рассмотрим меру $d\mu(\zeta) = (1-|\zeta|)^{2j+1} H^2(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$. Имеем

$$\mu(\Delta_l(\varphi)) \leqslant l^{2j} \int\limits_{\Delta_l(\varphi)} (1-|\zeta|)\, H^2(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \leqslant C(H)\, l^{2j+1}.$$

Из результатов работы [13]

$$J_1^2 \leqslant C_1(H) \|f\|^2_{H^2}.$$

В то же время очевидно, что

$$J_2^2 \leqslant C_2(p) \|g\|^2_{H^2}.$$

Следовательно, имеем

$$J \leqslant J_1 J_2 \leqslant C_1(p)\, C_2(p) \|f\|_{H^2} \|g\|_{H^2} = C(H, p) \|F\|_{H^1}.$$

Доказательство леммы закончено.

Завершим теперь доказательство теоремы 2. Проверим $1) \Rightarrow 2)$. С каждой точкой $\tau \in D$ и с числом $\delta \in (0, 1)$ свяжем круг $d_\delta(\tau) = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta - \tau| \leqslant \delta(1-|\tau|)\}$, его границу обозначим через $\gamma(\tau, \delta)$. Если $F \in H^1$, то

$$F^{(n)}(\tau) G^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma(\tau,\delta)} \frac{F^{(n)}(\zeta)\, G^{(n)}(\zeta)}{\zeta - \tau} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\tau,\delta)} K(\zeta, \tau)\, G'(\zeta)\, d\zeta, \quad (11)$$

где $K(\zeta, \tau) = \dfrac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left(\dfrac{F^{(n)}(\zeta)}{\zeta - \tau} \right)$.

Проинтегрируем равенство (11) по δ в пределах от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$. Переставив интегралы, получим

$$\frac{1}{4} F^{(n)}(\tau) G^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_D K(\zeta, \tau)\, G'(\zeta)\, \chi_\tau(\zeta) \frac{\zeta - \tau}{|\zeta - \tau|} d\sigma(\zeta),$$

где $\chi_\tau = \chi_{R(\tau)} (1-|\tau|)^{-1}$, $R(\tau) = d\left(\tau, \frac{1}{2}\right) \setminus d\left(\tau, \frac{1}{4}\right)$

(χ_E—характеристическая функция множества E). Далее

$$L = \int\limits_D F^{(n)}(\tau)| |G^{(n)}(\tau)| (1-|\tau|)^{2n-1} d\sigma(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_D |G'(\zeta)| \int\limits_D |K(\zeta, \tau)|\, \chi_\tau(\zeta) (1-|\tau|)^{2n-1} d\sigma(\tau)\, d\sigma(\zeta).$$

Из формулы Лейбница и определения L теперь видно, что достаточно оценить интегралы

$$L_j=\int\limits_{D}|G'(\zeta)\,F^{(n+j)}(\zeta)|\int\limits_{D}\frac{(1-|\tau|)^{2n-2}}{|\tau-\zeta|^{n-j}}\,\chi_{R(\tau)}(\zeta)\,d\sigma(\tau)\,d\sigma(\zeta),\ 0\leqslant j\leqslant n-1.$$

Но если $\zeta\in R(\tau)$, то $|\zeta-\tau|>\dfrac{(1-|\tau|)}{4}$, а $1-|\tau|\leqslant 2(1-|\zeta|)\leqslant$ $\leqslant 3(1-|\tau|)$ (следствие неравенства $||\zeta|-|\tau||\leqslant\dfrac{1}{2}(1-|\tau|)$). Поэтому

$$L_j\leqslant C(n)\int\limits_{D}|G'(\zeta)\,F^{(n+j)}(\zeta)|\Bigg(\int\limits_{\frac{1-|\zeta|}{6}<|\tau-\zeta|<1-|\zeta|}(1-|\tau|)^{n+j-2}\,d\sigma(\tau)\Bigg)d\sigma(\zeta)\leqslant$$

$$\leqslant\widetilde{C}(n)\int\limits_{D}|F^{(n+j)}(\zeta)\,G'(\zeta)|(1-|\zeta|)^{n+j}\,d\sigma(\zeta).$$

Из леммы следует, что $L_j\leqslant C(n,G)\|F\|_{H^1}$, так как мера $|G'(\zeta)|^2\cdot(1-|\zeta|)\,d\sigma(\zeta)$ карлесонова (см. [10]). Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Поступила 10. IX. 1985

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. *Տյոպլիցյան օպերատորներ անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի* տարածություններում և BMO դասի նոր խարակտերիստիկան *(ամփոփում)*

Հոդվածում տրվում է միավոր շրջանագծի վրա որոշված այն h հանրագումարելի ֆունկցիաների լրիվ խարակտերիստիկան, որոնց համար h սիմվոլին ունեցող տյոպլիցյան օպերատորները գործում են շրջանում անալիտիկ և փակ շրջանում ողորկ ֆունկցիաների մի քանի տարածություններում։ Տրվում է նաև BMO *դասերի բնութագրումը այդ դասին պատկանող ֆունկցիաների Կոշու տիպի ինտեգրալների ածանցյալների տերմիններով։*

F. A. SHAMOJAN. *The Teoplitz operators in some spaces of analytic functions and a new characterization of the classes BMO* (summary)

In the paper we give a description of all function $h\in L^1$, for which the Toeplitz operator with symbols h acts in the some space of analytic functions in the disc. A new characterization of the class *BMO* is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
2. *Ф. А. Шамоян*. Об ограниченности одного класса операторов, связанных с делимостью аналитических функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем. 8, 1973, 474—490.
3. *N. A. Shirokov*. Division and multiplication by inner functions in spaces of analytic functions smooth up to boundary. Complex analysis and spectral theory, Lecture Notes in Math., v. 864, Springer-Verlag, 1981, 413—439.
4. *В. П. Хавин*. О факторизации аналитических функций, гладких вплоть до границы, Записки научн. семинаров ЛОМИ, т. 22, 1971, 202—204.
5. *Ф. А. Шамоян*. Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге, Записки научн. семинаров ЛОМИ, т. 22, 1971, 206—209.
6. *J. P. Kahane*. Best approximation in $L^1(T)$, Bull. Amer. Math. Soc., 80:5, 1974, 788—804.
7. *В. В. Пеллер, С. В. Хрущев*. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы, УМН, 37, вып. 1 (223), 1982, 53—124.

8. *Ф. А. Шамоян*. Об одном классе теплицевых операторов, связанных с делимостью аналитических функций, Функц. анализ и прил., 13:1, 1979.

9. *Дж. Гарнет*. Ограниченные аналитические функции, М., «Мир», 1984.

10. *Ch. Fefferman, E. M. Stein*. H^p spaces of several variables, Acta Math., 129, 1972. 137—193.

11. *F. John*, Nirenberg. On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math., 14, 1961, 415—426.

12. *D. A. Stegenga*. Bounded Teoplitz operators on H^1 and application of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscilation, Amer. Math. J., v, 98, №. 3, 1976, 573—583.

13. *Ф. А. Шамоян*. Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$, $(0 < p < +\infty)$, Мат. сб., 107 (149), № 3, 1978, 446, 462.

14. *S. V. Hruscev, S. A. Vinogradov*. Inner functions and multipliers of Cauchy type integrals, LOMI, Preprint E-1-80, Leningrad, 1980.

15. *С. А. Виноградов, Н. А. Широков*. О факторизации аналитических функций с производной из H^p, Записки научн. семинаров ЛОМИ, т. 22, 1971, 8—27.

16. *L. Carleson and S. Jacobs*. Best uniform approximation by analytic functions Ark. Mat., v. 10, 1972, 219—229.

17. *П. Кусис*. Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Вольфа теоремы о короне, М., «Мир», 1984.