ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 2, 1987 Математика

УДК 517. 53

А. Е. АВЕТИСЯН

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК

§ 1. Введение

В 1931 г. Пойя [1] предложил теорему.

Теорема А. Пусть $f(z)$—целая функция первого порядка и нулевого типа, пусть далее она ограничена при целочисленных значениях аргумента $z=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Тогда $f(z)$ сводится к постоянной.

Картрайт [2] доказала более сильную теорему.

Теорема В. Пусть $f(z)$—целая функция порядка 1 и типа σ $(\sigma<\pi)$ и $|f(\pm n)|<A$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, тогда на всей действительной оси

$$|f(x)|<kA,$$

где k зависит только от σ.

Условие $\sigma<\pi$ можно заменить более слабым условием $h\left(\frac{\pi}{2}\right)+h\left(-\frac{\pi}{2}\right)<2\pi$. Аналогичную теорему Картрайт доказала для функций, аналитических в полуплоскости. Из теоремы Картрайт теорема A следует применением принципа Фрагмена-Линделефа.

Различным обобщениям теоремы Картрайт посвящены работы Ийера [3], Дуффина и Шеффера [4], Агмона [5], Б. Я. Левина [6] и других. Результаты, аналогичные теореме М. Картрайт, получены для функций, растущих на последовательности точек $\{a_k\}$. В частности связь между величинами

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|F(r)|}{r^{\rho}},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln|F(a_k)|}{|a_k|^{\rho}} \tag{1.1}$$

исследована в работах В. Бернштейна [7], А. Пфлюгера [8], Н. Левинсона [9], Боаса [10], Б. Я. Левина [11] и других.

В настоящей работе мы получаем результаты указанных типов для некоторых классов целых функций порядка $\rho(1<\rho<2)$. При этом мы существенно опираемся на свойства целой функции

$$S_{\rho}(z;\mu)=\frac{E_{\rho}(iz;\mu)-E_{\rho}(-iz;\mu)}{2i}\left(E_{\rho}(z;\mu)=\sum_{0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma\left(\mu+\frac{n}{\rho}\right)}\right), \tag{1.2}$$

изученные впервые М. М. Джрбашяном и С. Г. Рафаеляном ([12], [13]). Эта функция является естественным обобщением функции $\sin z$. Легко видеть, что $S_1(z;\ 1) = \sin z$.

В первой части работы приводятся известные результаты относительно асимптотических свойств функции $S_\rho(z;\ \mu)$ и распределения ее нулей. Далее, совершенно так, как это сделано в [13], по нулям $\{\lambda_k\}$ функции $z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$ строится система целых функций $\{\Omega_{\rho,k}(z;\ \mu)\}_0^\infty$. С помощью этой системы доказывается интерполяционная формула для целых функций порядка $\rho\,(1<\rho<2)$, ограниченных на последовательности $\{\lambda_k\}$. Предварительно для аналитических в угловых областях функций порядка ρ доказывается теорема о связи между величинами типа (1.1). В заключение, на основании полученной интерполяционной формулы, доказываются аналоги приведенных выше теорем Пойя и Картрайт.

§ 2. Вспомогательные результаты

1°. Относительно роста функции $S_\rho(z;\ \mu)$ и распределения ее нулей известны следующие результаты (см. [13]).

Лемма А. Пусть $\rho>1$, $\mu\in(-\infty,\ \infty)$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2\rho},\ \frac{\pi}{\rho}\right)$.

Тогда справедливы следующие оценки.

а) Если $\left|\,|\arg z|\pm\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\alpha$, то соответственно

$$|S_\rho(z;\ \mu)|\leqslant M_1(1+|z|^{\rho(1-\mu)}\, e^{\mathrm{Re}\,(\pm iz)^\rho}+\frac{M_2}{1+|z|}.$$

б) Если $\left|\,|\arg z|-\frac{\pi}{2}\right|\geqslant\alpha$, то

$$|S_\rho(z;\ \mu)|<\frac{M_2}{1+|z|},$$

где $M_1>0$ и $M_2>0$ не зависят от z.

Лемма В. Все достаточно большие по модулю нули функции $S_\rho(z;\ \mu)\,(\rho>1)$ простые. Справедливы асимптотические формулы

а) $\lambda_k^{(j)}=e^{i\theta_j}(2\pi k)^{1/\rho}\left\{1+O\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right\}\ (1\leqslant j\leqslant 4)$,

где

$$\theta_1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right),\ \theta_2=-\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right),\ \theta_3=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right),\ \theta_4=-\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right).$$

б) $\arg\lambda_k^{(j)}=\theta_j+(1+\rho(1-\mu))\frac{\ln|\lambda_k|}{\rho|\lambda_k|^\rho}+O\left(\frac{\ln^3|\lambda_k|}{|\lambda_k|^{3\rho}}\right)$.

Отметим также, что нули функции $S_\rho(z;\ \mu)$ симметричны относительно действительной и мнимой осей.

Лемма С. Если $1<\rho<2$ и $\mu>0$, то

а) При $\operatorname{Im}\lambda_k>0$

$$\lim_{k\to\infty}\left|(i\lambda_k)^{2-\rho}S_\rho'(\lambda_k;\mu)\right|=\frac{-\rho}{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{\rho}\right)}.$$

б) При $\operatorname{Im}\lambda_k<0$

$$\lim_{k\to\infty}\left\{(-i\lambda_k)^{2-\rho}S_\rho'(\lambda_k;\mu)\right\}=\frac{-\rho}{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{\rho}\right)}.$$

Следствие. Существуют постоянные $C_\rho(\mu)$ и $N_\rho(\mu)>0$, не зависящие от k, такие, что если $1<\rho<2$, то

$$|S_\rho'(\lambda_k;\mu)|\geqslant C_\rho(\mu)\,k^{1-\frac{2}{\rho}},\quad k\geqslant N_\rho(\mu).$$

2°. Пусть $\{\lambda_k\}_0^\infty$ — последовательность всех нулей функции $z^2S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\,1+\frac{1}{\rho}\right)$ $(0=\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2)$. При этом каждый нуль записывается столько раз, какова его кратность. Для данного натурального $k\geqslant 0$ обозначим через $p_k\geqslant 1$ кратность появления числа λ_k в последовательности $\{\lambda_k\}_0^\infty$, а через $s_k\geqslant 1$—кратность появления числа λ_k в совокупности $\{\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$. Очевидно, что $1\leqslant s_k\leqslant p_k<\infty$. Точно так же, как в [13], обозначим

$$\omega_k(z)=\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{z^2S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\,1+\frac{1}{\rho}\right)}\quad(|z-\lambda_k|<\delta_k),$$

$$\omega_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)^\nu,\quad a_\nu(\lambda_k)=\frac{\omega_k^{(\nu)}(\lambda_k)}{\nu!}.$$

Обозначим далее

$$q_k(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\lambda_k)(z-\lambda_k)^\nu$$

и составим функции

$$\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\,1+\frac{1}{\rho}\right)=\frac{(z-\lambda_k)^{s_k-1}q_k(z)}{(s_k-1)!\,\omega_k(z)}=\frac{z^2S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\,1+\frac{1}{\rho}\right)q_k(z)}{(s_k-1)!\,(z-\lambda_k)^{p_k-s_k+1}}.$$

В частности, не трудно проверить, что

$$\Omega_{\rho,0}\left(\sigma^{1/\rho}z;\,1+\frac{1}{\rho}\right)=\frac{S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\,1+\frac{1}{\rho}\right)}{z}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{S_\rho'\left(0;\,1+\frac{1}{\rho}\right)}-\frac{S_\rho''\left(0;\,1+\frac{1}{\rho}\right)z^2}{3!\left[S_\rho'\left(0;1+\frac{1}{\rho}\right)\right]^2}\right],$$

$$\Omega_{\rho,1}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)=S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\cdot\frac{1}{S_\rho'\left(0;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)},$$

$$\Omega_{\rho,2}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)=\frac{z\,S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}{2}\,\frac{1}{S_\rho'\left(0;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}.$$

Легко видеть, что если λ_k—простой нуль, то $s_k=p_k=1$,

$$q_k(z)=\frac{1}{\lambda_k^2\,S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)} \text{ и значит}$$

$$\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)=\frac{z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}{\lambda_k^2\,S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z-\lambda_k)}. \tag{2.1}$$

И, наконец, как и в [13] легко проверяется, что целые функции $\Omega_{k,\rho}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$ обладают интерполяционными свойствами

$$\Omega_{\rho,k}^{(r)}\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_\nu;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)=\begin{cases}0, & \lambda_\nu\neq\lambda_k,\ 0\leqslant r<p_\nu-1\\ 1, & \lambda_\nu=\lambda_k,\ r=s_k-1\\ 0, & \lambda_\nu=\lambda_k,\ r\neq s_k-1.\end{cases} \tag{2.2}$$

3°. Пусть $\{c_k\}_0^\infty$—произвольная ограниченная последовательность комплексных чисел

$$|c_k|\leqslant M,\ k=0,\ 1,\ 2\cdots.$$

Рассмотрим ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right). \tag{2.3}$$

Справедливо утверждение.

Лемма 1. *Ряд* (2.3) *сходится равномерно на любом компакте* (k) *комплексной плоскости и представляет целую функцию, удовлетворяющую условиям*

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=c_k\quad(k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть сначала компакт (k) не содержит точек λ_k. Так как при больших $k\geqslant k_0$ λ_k—простые, то при больших m

$$\left|\sum_{k=m}^{n}c_k\,\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\right|\leqslant M_1\max\left\{\left|z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\right|\right\}\times$$
$$\times\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{|\lambda_k|^2\,|\lambda_k|^{\rho-2}\,|z-\lambda_k|}\leqslant M_2\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{\rho}}}. \tag{2.5}$$

Здесь мы воспользовались леммами B и C и следствием после леммы C.

Используя принцип максимума можно доказать, что оценка такого типа имеет место в любом круге $|z| \leqslant R$. Отсюда следует, что ряд (2.3) равномерно сходится в любом круге и значит его сумма представляет целую функцию. Утверждение (2.4) сразу следует из (2.2). Лемма доказана.

§ 3. Определение индикатора аналитической в угловой области функции по ее росту на последовательносях точек

Пусть $\{\nu_k\}_1^\infty$ — последовательность нулей функции $S_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ \mu)$, лежащих в первом квадранте. По лемме B

$$|\nu_k| \sim \left(\frac{2\pi k}{\sigma}\right)^{1/\rho}, \ \arg \nu_k \to \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < \rho < 2$ *и* $F(z)$ — *голоморфная функция в угловой области* $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$. *Предположим далее, что*

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\ln|F(z)|}{|z|^\rho} < \infty$$

и

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2\rho}\right) < \sigma \sin\frac{\pi\rho}{2}. \tag{3.1}$$

Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln F(\nu_k)|}{|\nu_k|^\rho} = h_F\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right) \tag{3.2}$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|F(\bar\nu_k)|}{|\bar\nu_k|^\rho} = h_F\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}\right), \tag{3.3}$$

если левые части (3.2), (3.3) *неотрицательны.*

Доказательство этой теоремы ведется по схеме, предложенной в работе [11] (стр. 272, теорема 16). Из асимптотических свойств функции $S_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ \mu)$ (см. [13]) следует, что ее индикатор выражается формулой

$$h_{S_\rho}(\theta) = \begin{cases} \sigma\cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \text{ при} \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} \\ \sigma\cos\rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \text{ при} \left|\theta + \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} \\ 0, \text{ при } |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Деля функцию $S_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ \mu)$ на соответствующий полином, мы получим целую функцию $S_\rho^*(z)$, нули которой совпадают с нулями функции $S_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ \mu)$ и все они простые. Очевидно $S_\rho^*(z)$ имеет тот же самый индикатор.

Обозначим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|F(\nu_n)|}{|\nu_n|^\rho} = c. \tag{3.5}$$

Выберем последовательность $\{\mu_n\}$

$$|\mu_1| < |\mu_2| < \cdots < |\mu_n| < \cdots, \ \arg\mu_n = \frac{\pi}{2\rho}, \ k = 1, 2 \cdots$$

с плотностью $\Delta > \dfrac{c}{2\pi\sin\dfrac{\pi\rho}{2}}$ при показателе ρ и построим функцию

$$V(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\overline{\mu}_n^2}\right).$$

Это-целая функция порядка ρ и вполне регулярного роста. Из известных результатов Б. Я. Левина и А. Пфлюгера легко следует, что ее индикатор выражается формулой:

$$h_V(\theta) = \begin{cases} 2\pi\Delta\cos\rho\theta, \text{ при } |\theta| \leqslant \dfrac{\pi}{2\rho} \\ 2\pi\Delta\cos\rho(\theta - \pi), \text{ при } |\theta - \pi| < \dfrac{\pi}{2\rho} \\ 0, \text{ при } \left|\theta \pm \dfrac{\pi}{2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2\rho}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Выберем положительное число ε из условия

$$\varepsilon < 2\pi\Delta\sin\frac{\pi\rho}{2} - c. \tag{3.7}$$

Из (3.5) для достаточно больших n имеем

$$\ln|F(\nu_n)| < \left(c + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\nu_n|^\rho. \tag{3.8}$$

С другой стороны, целая функция $V(z)$—вполне регулярного роста и не имеет нулей на луче $\arg z = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2\rho}$, поэтому при достаточно больших n

$$\ln|V(\nu_n)| > \left[h_V\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\right]|\nu_n|^\rho = \left[2\pi\Delta\sin\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right]|\nu_n|^\rho. \tag{3.9}$$

Из (3.7), (3.8), (3.9) следует, что для больших n

$$\ln\left|\frac{F(\nu_n)}{V(\nu_n)}\right| < -\eta|\nu_n|^\rho \quad (\eta > 0). \tag{3.10}$$

Из леммы C имеем также

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|S_\rho^{**}(\nu_n)|}{|\nu_n|^\rho} = 0. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) вытекает, что ряд

$$\psi(z) = \sum_1^{\infty} \frac{F(\nu_n)}{V(\nu_n)\, S_\rho^{*\prime}(\nu_n)(z-\nu_n)}$$

равномерно сходится вне некоторых кружков, содержащих точки ν_n, и вне этих кружков при $z \to \infty$ функция $\psi(z)$ равномерно стремится к нулю.

Нетрудно убедиться, что функция

$$B(z) = \frac{F(z)}{V(z)\; S_\rho^*(z)} - \psi(z) \tag{3.12}$$

голоморфна в угловой области $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$ и внутри этого угла имеет нормальный тип при порядке ρ. Мы докажем, что функция $B(z)$ ограничена внутри угловой области $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho} - \delta$ $\left(0 < \delta < \frac{\pi}{2\rho}\right)$. Для этого заметим, что $V(z)$ и $S_\rho^*(z)$—целые функции вполне регулярного роста и поэтому индикатор функции

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{V(z)\, S_\rho^*(z)}$$

в угловой области $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} < \arg z < \frac{\pi}{2\rho}$ равен

$$h_\Phi(\theta) = h_F(\theta) - 2\pi\Delta\cos\rho\theta - \sigma\cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.13}$$

В указанной угловой области $\Phi(z)$, вообще говоря, не голоморфна ($S_\rho^*(z)$ может иметь нули), но можно говорить о ее индикаторе, так как для любого φ, $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} < \varphi < \frac{\pi}{2\rho}$ $\Phi(z)$ голоморфна в области $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} < \arg z \leqslant \varphi$, $|z| \geqslant r_0$ (r_0—достаточно большое число).

Из (3.1) и (3.13) следует, что для достаточно малого положительного δ $h_\Phi\left(\frac{\pi}{2\rho} - \delta\right) < 0$. Значит $\Phi\left(re^{i\left(\frac{\pi}{2\rho} - \delta\right)}\right) \to 0$ при $r \to \infty$. Аналогично $\Phi\left(re^{-i\left(\frac{\pi}{2\rho} - \delta\right)}\right) \to 0$ при $r \to \infty$. На лучах $\arg z = \pm\left(\frac{\pi}{2\rho} - \delta\right)$ $\psi(z)$ также стремится к нулю. Поэтому в угловой области $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} - \delta$ $|B(z)| \leqslant M$.

Из (3.12) имеем

$$F(z) = [B(z) + \psi(z)]V(z) \cdot S_\rho^*(z).$$

Отсюда при $|\theta| < \frac{\pi}{2\rho}$ получаем $h_F(\theta) \leqslant h_V(\theta) + h_{S_\rho^*}(\theta)$. Полагая $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}$, получим

$$h_F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\leqslant 2\pi\Delta\sin\frac{\pi\rho}{2}.$$

Но Δ можно взять сколь угодно близко к числу $\dfrac{c}{2\pi\sin\frac{\pi\rho}{2}}$, так что

$$h_F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\leqslant c. \tag{3.14}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$h_F\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\rho}\right)\leqslant c. \tag{3.15}$$

Для завершения доказательства теоремы остается установить обратные к (3.14) и (3.15) неравенства. Докажем, например, что $h_F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)>c$. Допустим противное:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|F(\nu_n)|}{|\nu_n|^\rho}=c>h_F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right),$$

$$c=h_F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)+k\quad(k>0).$$

Из непрерывности $h_F(\theta)$ следует, что существует $\delta_1>0$ такое, что при $\left|\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\rho}\right|<\delta_1$

$$c>h_F(\theta)+\frac{k}{2}. \tag{3.16}$$

Отсюда следует, что при $n>n_0$, $\arg\nu_k\in\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}-\delta_1,\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}+\delta_1\right)$ существует последовательность $n_l\to\infty$ такая, что при $\left|\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right|<\delta_1$

$$|F(\nu_{n_l})|>e^{\left[h_F(\theta)+\frac{k}{4}\right]|\nu_{n_l}|^\rho}. \tag{3.17}$$

Если теперь $0<\varepsilon<\frac{k}{4}$, то по известным свойствам индикатора, существует r_0 такое, что при $r>r_0$

$$|F(re^{i\theta})|<e^{[h(\theta)+\varepsilon]r^\rho},\ \left|\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right|<\delta_1.$$

Это противоречит (3.17). Теорема полностью доказана.

§ 4. Интерполяционная формула

Теорема 2. *Если $f(z)$—целая функция порядка ρ, $1<\rho<2$ и конечного типа*

$$h_f\left(\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)<\sigma\sin\frac{\pi\rho}{2},\quad h_f\left(\pi\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)<\sigma\sin\frac{\pi\rho}{2}\tag{4.1}$$

и

$$|f^{(S_k-1)}(\lambda_k)|\leqslant M,\tag{4.2}$$

то $f(z)$ разлагается в равномерно сходящийся на любом компакте интерполяционный ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(S_k-1)}(\lambda_k)\,\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right).\tag{4.3}$$

Отметим, что для класса $W_{\rho,\sigma}^{p,\infty}$ аналогичная теорема ранее была доказана С. Г. Рафаеляном [13].

Доказательство. Из теоремы 1 и из (4.2) следует, что

$$h_f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\rho}\right)\leqslant 0\ \text{ и }\ h_f\left(-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)\leqslant 0.$$

Но имея в виду известное свойство индикатора $h(\theta)+h\left(\theta+\frac{\pi}{\rho}\right)\geqslant 0$, заключаем, что

$$h_f\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)=0,\quad h_f\left(-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)=0.\tag{4.4}$$

Отметим также, что при $|\theta|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}$ и $|\theta-\pi|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}$ $h_f(\theta)\leqslant 0$. Кроме того, из (4.1), (4.4) и из основного соотношения для индикатора (свойство тригонометрической ρ-выпуклости) следует, что при $\left|\theta\pm\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2\rho}$

$$h_f(\theta)<h_{S_\rho}(\theta).\tag{4.5}$$

Функция

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f^{(S_k-1)}(\lambda_k)\,\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$$

по лемме 1—целая, порядка ρ, конечного типа и очевидно с индикатором, не превышающим индикатор функции $S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$. При этом

$$F^{(S_k-1)}(\lambda_k)=f^{(S_k-1)}(\lambda_k)\ \ (k=0,1\cdots).\tag{4.6}$$

Составим разность

$$\varphi(z)=f(z)-F(z),\tag{4.7}$$

$\varphi(z)$—целая функция не выше порядка ρ и типа σ, имеющая нули в точках λ_k одинаковой кратности с функцией $z^2S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$. Поэтому функция

$$\Phi(z)=\frac{\varphi(z)}{z^2S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}=\frac{f(z)-F(z)}{z^2S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}\tag{4.8}$$

также целая и не выше порядка ρ и типа σ. Для краткости обозначим

$$\varphi_1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}+\delta \qquad \left(0<\delta<\frac{\pi}{2\rho}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\varphi_2=\pi-\varphi_1,\ \varphi_3=\pi+\varphi_1,\ \varphi_4=-\varphi_1$$

и докажем, что $|\Phi(re^{i\varphi_k})|\leqslant L\ (k=1,2,3,4)$. Достаточно доказать такое неравенство для $r\geqslant r_0>0$. Для функции

$$\frac{f(z)}{z^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)} \tag{4.9}$$

такое неравенство сразу следует из (4.5). Более того, из (4.5) следует, что на лучах φ_k эта функция стремится к нулю. Докажем, что на лучах φ_k стремится к нулю также функция

$$\frac{F(z)}{z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\frac{q_k(z)}{(s_k-1)!\,(z-\lambda_k)^{p_k-s_k-1}}. \tag{4.10}$$

Так как $q_k(z)$—полином степени p_k-s_k, то каждый член ряда (4.10) стремится к нулю на лучах φ_k. С другой стороны, при $k\geqslant k_0$ нули λ_k—простые и достаточно доказать утверждение для функции

$$A(z)=\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{f(\lambda_k)}{\lambda_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z-\lambda_k)}. \tag{4.11}$$

Но по условию $|f(\lambda_k)|\leqslant M$. Имеем также

$$S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\sim c_1\lambda_k^{\rho-2} \text{ (лемма } C\text{), так что}$$

$$|A(z)|\leqslant c_2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k|^\rho\ |z-\lambda_k|}. \tag{4.12}$$

Как было отмечено выше, нули λ_k симметричны относительно координатных осей, поэтому ряд (4.11) можно представить в виде четырех рядов, каждый из которых содержит нули только из одного квадранта. Пусть, как и в § 3, $\{\nu_k\}_1^\infty$—те λ_k, которые лежат в первом квадранте: $|\nu_k|\sim\left(\frac{2\pi k}{\sigma}\right)^{1/\rho}$, $\arg\nu_k\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}$. Докажем, что на лучах φ_k стремится к нулю функция

$$|A_1(z)|=\sum_{k_0+1}^{\infty}\frac{1}{|\nu_k|^\rho\ |z-\nu_k|}.$$

Можно считать, что при $k>k_0$ $\left|\arg\nu_k-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right|<\frac{\delta}{2}$.

Тогда при $\arg z=\varphi_1$, т. е. на луче φ_1

$$|z-\nu_k|\geqslant|z|^{1/2}\,|\nu_k|^{1/2}\sin\frac{\delta}{2}$$

и для $|A_1(z)|$ на луче φ_1 получаем оценку

$$|A_1(z)| \leqslant \sum_{k_0+1}^{\infty} \frac{1}{|\nu_k|^\rho |\nu_k|^{1/2} |z|^{1/2} \sin\frac{\delta}{2}} \leqslant$$

$$< \frac{c_3}{|z|^{1/2}} \sum_{k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{2\rho}}} < \frac{c_4}{|z|^{1/2}}.$$

Аналогичная оценка, очевидно, справедлива и для лучей φ_2, φ_3, φ_4. Совершенно так же можно получить оценки и для трех других рядов.

Таким образом, целая функция $\Phi(z)$ порядка ρ ограничена на лучах φ_k $(k=1, 2, 3, 4)$. При этом лучи φ_k разделяют всю плоскость на угловые области раствора, меньше чем $\frac{\pi}{\rho}$. По теореме Фрагмена-Линделефа $\Phi(z)$ ограничена на всей плоскости, и значит она постоянная. Но $\Phi(z)$ стремится к нулю на лучах $\varphi_k (k=1, 2, 3, 4)$. Отсюда следует, что $\Phi(z) \equiv 0$. Это равносильно утверждению теоремы (4.3).

§ 5. Целые функции, ограниченные на последовательности $\{\lambda_k\}$

1°. Докажем теорему, которая является аналогом теоремы А. Пойя.

Теорема 3. *Если $f(z)$—целая функция порядка $\rho(1<\rho<2)$ и нулевого типа и*

$$|f(\lambda_k)| \leqslant M, \tag{5.1}$$

то

$$f(z) = \text{const}.$$

Доказательство. Ясно, что функция $[f(z)]^m$ при любом натуральном m также целая функция порядка ρ и нулевого типа. Далее заметим, что точек λ_k, в которых функция $z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/2} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$ имеет кратные нули, конечное число. При этом кратности p_k нулей в этих точках ограничены одним и тем же числом $p_k \leqslant p$. Поэтому справедлива оценка

$$|\{[f(\lambda_k)]^m\}^{(S_k-1)}| < c_1 m^p M^m, \tag{5.2}$$

где постоянная c_1 зависит только от функции $f(z)$. Функция $[f(z)]^m$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и поэтому допускает разложение

$$[f(z)]^m = \sum_{k=0}^{\infty} \{[f(\lambda_k)]^m\}^{(s_k-1)} \Omega_{\rho, k}\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right).$$

Отсюда, имея в виду (5.2), для любой фиксированной точки z получим

$$|f(z)]^m \leqslant c_1 m^p M^m \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Omega_{\rho, k}\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\right|$$

или

$$|f(z)|\leqslant c_1^{\frac{1}{m}} m^{\frac{\rho}{m}} M\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\right|^{\frac{1}{m}}.$$

Устремляя m к бесконечности, имеем

$$|f(z)|\leqslant M. \tag{5.3}$$

и значит $f(z)=\mathrm{const}$.

Следствие. Если $f(z)$—целая функция порядка $\rho\,(1<\rho<2)$ нулевого типа и $f(\lambda_n)=o\,(n^{1/\rho})$ при $n\to\infty$, то $f(z)$—постоянная. Более общо, если $f(\lambda_n)=O(n^{m/\rho})$, то $f(z)$—полином степени не выше $[m]$.

Действительно, пусть $f(\lambda_n)=O(n^{m/\rho})$. По лемме В это означает, что $f(\lambda_n)=O(|\lambda_n|^m)$. Обозначим отрезок ряда Тейлора функции $f(z)$ степени $[m]$ через $p(z)$ и рассмотрим функцию

$$\Phi(z)=\frac{f(z)-p(z)}{z^{[m]+1}}.$$

Ясно, что $\Phi(z)$—целая функция порядка ρ нулевого типа и

$$|\Phi(\lambda_n)|\leqslant L.$$

По теореме 3 $\Phi(z)=c$. Но очевидно $\Phi(\lambda_n)\to 0$ при $n\to\infty$, значит $c=0$, т. е. $f(z)=p(z)$.

Если же $f(\lambda_n)=o(n^{1/\rho})$ (т. е. $f(\lambda_n)=o(|\lambda_k|)$), то в предыдущих рассуждениях, взяв $m=1$, получим, что $f(z)$—линейная функция. Но тогда соотношение $f(\lambda_n)=o(|\lambda_n|)$ возможно лишь тогда, когда $f(z)=\mathrm{const}$.

2°. В этом пункте мы докажем теорему, аналогичную теореме В. Картрайт. Введем некоторые обозначения. При $0<\delta<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}$ обозначим через $D_1^{(\rho)}(\delta)$ и $D_2^{(\rho)}(\delta)$ угловые области, определяющиеся, соответственно, из условий

$$|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}-\delta \text{ и } |\arg z-\pi|\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}-\delta$$

и пусть $D^{(\rho)}(\delta)=D_1^{(\rho)}(\delta)+D_2^{(\rho)}(\delta)$. Положим также $D^{(\rho)}=D^{(\rho)}(0)$.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$—нечетная целая функция порядка $\rho\,(1<\rho<2)$, нормального типа и удовлетворяет условиям*

$$h_f\left(\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)<\sigma\sin\frac{\pi\rho}{2},\quad h_f\left(\pi\pm\frac{\pi}{2\rho}\right)<\sigma\sin\frac{\pi\rho}{2}, \tag{5.4}$$

$$|f(\lambda_k)|\leqslant M. \tag{5.5}$$

Тогда для любого δ $\left(0<\delta<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)$, в области $D^{(\rho)}(\delta)$ имеет место

$$|f(z)|\leqslant M_{f,\delta}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Так как кратных точек λ_k—конечное число и кратности равномерно ограничены сверху, то

$$|f^{(S_k-1)}(\lambda_k)|\leqslant M_1,$$

$f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и значит представима рядом (4.3). Нули λ_k функции $z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$, начиная с некоторого номера $(k \geqslant m_0)$, простые, поэтому можно представить $f(z)$ в виде (см. § 2, 2.1))

$$f(z)=\sum_{k=0}^{m_0-1} f^{(S_k-1)}(\lambda_k)\,\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)+\sum_{k=m_0}^{\infty} f(\lambda_k)\,\Omega_{\rho,k}\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)=$$

$$=f_1(z)+\sum_{k=m_0}^{\infty} f(\lambda_k)\frac{z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z_k; 1+\frac{1}{\rho}\right)}{\lambda_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z-\lambda_k)}. \qquad (5.7)$$

Ясно, что $|f_1(z)|$ ограничена в области $D^{(\rho)}(\delta)$ (она ограничена даже в области $D^{(\rho)}$, так как в этой области ограничена каждая из функций $\Omega_{\rho,k}$, $k=0,\ 1,\cdots,(m-1)$). Остается доказать ограниченность (в области $D^{(\rho)}(\delta)$) функции

$$f_2(z)=\sum_{m_0}^{\infty} f(\lambda_k)\frac{z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}{\lambda_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\lambda_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z-\lambda_k)}. \qquad (5.8)$$

Для этого вспомним, что точки λ_k расположены симметрично относительно координатных осей. Как и раньше, пусть ν_k—те из точек λ_k, которые лежат в первом квадранте. Тогда множество $\{\lambda_k\}$ очевидно, распадается на четере множества: $\{\nu_k\}$, $\{-\nu_k\}$, $\{\bar{\nu}_k\}$, $\{-\bar{\nu}_k\}$. Ряд (5.8) распадается на четыре ряда. Имея в виду нечетность функции $f(z)$ (а также четность функци $S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$), будем иметь

$$f_2(z)=z^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)\left\{\sum_{m_0}^{\infty}\frac{f(\nu_k)}{\nu_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\nu_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)}\left(\frac{1}{z-\nu_k}+\frac{1}{z+\nu_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{m_0}^{\infty}\frac{f(\bar{\nu}_k)}{\bar{\nu}_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\bar{\nu}_k;1+\frac{1}{\rho}\right)}\left(\frac{1}{z-\bar{\nu}_k}-\frac{1}{z+\bar{\nu}_k}\right)\right\}$$

или

$$f_2(z)=z S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;1+\frac{1}{\rho}\right)\left\{\sum_{m_0}^{\infty}\frac{2f(\nu_k)\nu_k\cdot z}{\nu_k^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}\nu_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z^2-\nu_k^2)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m_0}^{\infty}\frac{2f(\bar{\nu}_k)\bar{\nu}_k\cdot z}{\bar{\nu}_k^2 S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}\bar{\nu}_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z^2-\bar{\nu}_k^2)}\right\}= \qquad (5.9)$$

$$=z S_\rho\left(\sigma^{1/\rho} z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)[\Phi_1(z)+\Phi_2(z)].$$

Множитель $z\,S_\rho\left(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)$ ограничен в области $D^{(\rho)}$ (δ) по лемме А. Докажем ограниченность в этой области функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$.

Можно считать, что при $k>m_0$ выполняется неравенство $\left(\text{ведь } \arg\nu_k\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)$

$$\left|\arg\nu_k-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right|<\frac{\delta}{2}. \tag{5.10}$$

Предположим, что $N>m_0$—достаточно большое натуральное число и z принадлежит области Δ_N:

$$\Delta_N=\left|\begin{matrix} a(N-1)^{1/\rho}\leqslant|z|\leqslant aN^{1/\rho} \\ |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}-\delta \end{matrix}\quad,\ a=\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^{1/\rho}\right|. \tag{5,11}$$

Оценим в этой области функцию $\Phi_1(z)$. Для этого запишем ее в форме

$$\Phi_1(z)=\sum_{m_0}^{2N}\frac{2f(\nu_k)\,\nu_k z}{\nu_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\nu_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z^2-\nu_k^2)}+$$

$$+\sum_{2N+1}^{\infty}\frac{2f(\nu_k)\,\nu_k z}{\nu_k^2 S_\rho'\left(\sigma^{1/\rho}\nu_k;\ 1+\frac{1}{\rho}\right)(z^2-\nu_k^2)}=v_1(z)+v_2(z).$$

Имея в виду (5.5), (5.11) и леммы B и C, для функции $v_2(z)$ получим оценку

$$|v_2(z)|<A_1N^{1/\rho}\sum_{2N+1}^{\infty}\frac{k^{1/\rho}}{k\,|k^{2/\rho}-N^{2/\rho}|}\leqslant$$
$$\leqslant A_2N^{1/\rho}\sum_{2N+1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{\rho}}}\leqslant A_3\frac{N^{1/\rho}}{(2N+1)^{1/\rho}}\leqslant B_1. \tag{5.12}$$

Для оценки $v_1(z)$ заметим, что из (5.10) и (5.11) следует $|z-\nu_k|\geqslant|z|\sin\frac{\delta}{2}$. Имеем также неравенство $\frac{|z|}{|z+\nu_k|}<1$, и поэтому

$$|v_1(z)|\leqslant A_4\sum_{m_0}^{2N}\frac{k^{1/\rho}|z|}{k\,|z-\nu_k|\,|z+\nu_k|}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{A_5}{(N-1)^{1/\rho}}\sum_{m_0}^{2N}\frac{1}{k^{1-\frac{1}{\rho}}}\leqslant A_6\frac{(2N)^{1/\rho}}{(N-1)^{1/\rho}}\leqslant B_2. \tag{5.13}$$

Таким образом, в области Δ_N имеем $|\Phi_1(z)|\leqslant B_1+B_2$. Но так как B_1 и B_2 не зависят от N, то функция ограничена в области $D_1^{(\rho)}$ (δ). Очевидно, оценка такого типа имеет место и в области $D_2^{(\rho)}$ (δ).

Таким образом

$$|\Phi_1(z)| \leqslant B_3$$

в области $D^{(\rho)}(\delta)$. Совершенно аналогично доказывается, что в этой области $|\Phi_2(z)| \leqslant B_4$. Отсюда и из (5.9) следует ограниченность в $D^{(\rho)}(\delta)$ функции $f_2(z)$. Вместе с ограниченностью $f_1(z)$ это равносильно утверждению (5.6) теоремы. Теорема 4 доказана.

Замечание. Еще не доказано, но нам представляется вероятным, что можно в теореме 4 опускать условие нечетности функции $f(z)$ и что $f(z)$ ограничена во всей области $D^{(\rho)}$.

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 1. X. 1985

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Կետերի մի հաջորդականության վրա սահմանափակ վերջավոր կարգի ամբողջ ֆունկցիաների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ապացուցված է ինտերպոլյացիոն բանաձև ρ (1< ρ <2) կարգի ամբողջ ֆունկցիաների համար, որոնք սահմանափակ են կետերի որոշակի հաջորդականության վրա։ Այդ բանաձևի հիման վրա ստացված են Պոլյայի և Կարտրայտի հայտնի թեորեմների տիպի թեորեմներ ρ կարգի ամբողջ ֆունկցիաների համար։

A. E. AVETISIAN. *On entire functions of finite order bounded on a sequence of points* (summary)

An interpolation formula is proved for entire functions of order ρ $(1 < \rho < 2)$ which are bounded on a certain sequence of points. Basing upon this formula, Polya and Cartwrite type theorems are obtained for entire functions of order ρ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polya. Jahresbericht der Deutscher Mathematiker Vereinigung, Bd 40, (1931), стр. 80, проблема 105.
2. *M. Cartwright.* On certain integral functions of order 1. Quarterly J. of Math. (Oxford ser.) 7, 1936, 46—55.
3. *V. G. Iyer.* On the order and type of integral functions bounded at a sequence of points, Annals of Math. v. 38, N. 2, 1937.
4. *R. J. Duffin and A. C. Schaeffer.* Power series wiht bounded coefficients, Amer J. Math., v. 67, 1945.
5. *S. Agmon.* Functions of exponential type in an angle and singularities of Taylor series, Trans Amer. Math. Soc., 70, 1951, 492—508.
6. *Б. Я. Левин.* Обобщение теоремы Картрайт, Изв. АН СССР, сер. мат., 21, 1957, 549—558.
7. *V. Bernstein.* Sur les proprietes caracteristiques des indicatrices de croissance, C. R., 202, 1936, 108—110.
8. *A. Pfluger.* Ueber das Anwachsen von Funktionen, die in einem Winkelraum regular und von Exponental typus sind, Compositio Math., 4, 1937, 367—372.
9. *N. Levinson.* Gap and density theorems, American Math. Soc. coll. Publications, New York, 1940.
10. *R. P. Boas.* Asymptotic properties of functions of exponential type, Duke Math. J., 20, 1953, 433—448.
11. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., 1956.
12. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
13. *С. Г. Рафаелян.* Канд. диссертация, Ереван, 1984.