ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 1, 1987 Математика

УДК 517.538.5

Р. Ш. СААКЯН

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Пусть $\overline{C}$ — расширенная комплексная плоскость, D — область в $\overline{C}$, $\partial D \neq \varnothing$ граница D. Рассмотрим множество $E \subset D$, замкнутое относительно D, и пусть E^0 — множество внутренних точек E. Мы будем рассматривать следующие классы функций:

$A(E)$ — класс функций непрерывных на E и аналитических в E^0,

$H(D)$ — класс функций, аналитических в D,

$A_D(E)$ — равномерное замыкание множества сужений функций из $H(D)$ на E.

Пусть D^* — одноточечное компактное расширение области D. В работе [1] Н. У. Аракеляном была решена задача о возможности равномерного приближения на E аналитическими в D функциями. Точнее доказана

Теорема А. $A_D(E) = A(E)$ *тогда и только тогда, когда* $E \in K_D$, *т. е.* $D^* \setminus E$ *связано и локально связано.*

Далее, в работе [2] ставится вопрос об описании класса $A_D(E)$ в случае $E \overline{\in} K_D$. В [2] сформулировано, в частности, следующее предложение: при $D = C$ некоторым обобщением принципа максимума удается установить, что функции из $A_D(E)$ аналитически продолжаются на те компоненты множества $D \setminus E$, для которых бесконечность не является достижимой граничной точкой.

Отметим также, что А. Страем предложено [3] некоторое описание класса $A_D(E), E \overline{\in} K_D$, которое не будучи „внутренним", тем не менее содержит указанное утверждение об аналитическом продолжении функций из $A_D(E)$.

Основной целью данной работы является формулировка и доказательство некоторого общего варианта принципа максимума, возможно представляющего самостоятельный интерес. Из него непосредственно следует утверждение об аналитическом продолжении функций из $A_D(E)$ в случае произвольных областей D, а также описание оболочки множества E относительно области D, данное в [4].

Так как функции из $A_D(E)$, вообще говоря, не ограничены, то интерес представляет вопрос о том, является ли этот класс алгеброй. В связи с этим, будет доказано, что в общем случае класс $A_D(E)$ не является алгеброй.

Работа состоит из четырех пунктов. Первый из них содержит формулировки полученных результатов и следствия. Второй посвящен доказательству вспомогательных лемм, а третий и четвертый — доказательству сформулированных результатов.

1°. Необходимые понятия и формулировка результатов. Для произвольных множеств A, $B\subset\overline{\mathbf{C}}$ обозначим через $\rho(A, B)$ их сферическое расстояние

$$\rho(A,\ B)=\inf_{\substack{z\in A\\ \xi\in B}}\frac{|z-\xi|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|\xi|^2)}}\,.$$

Обозначим через $\delta(A)$ диаметр множества A в метрике $\mathbf{R}^2$:

$$\delta(A)=\sup_{z_1,z_2\in A}|z_1-z_2|,$$

и через $d(z_0,\ A)$ обозначим расстояние от точки z_0 до множества A в метрике $\mathbf{R}^2$:

$$d(z_0,\ A)=\inf_{z\in A}|z-z_0|.$$

Далее, для любого $\varepsilon>0$ через $V_\varepsilon(\partial D)$ обозначим ε-окрестность границы ∂D области D

$$V_\varepsilon=\{z\in\overline{\mathbf{C}}:\rho(z,\ \partial D)<\varepsilon\}.$$

Определение 1: Пусть F— компакт в $\overline{\mathbf{C}}$, $z\in\overline{\mathbf{C}}\setminus F$, γ— непрерывное отображение полуинтервала $[0, 1)$ в $\overline{\mathbf{C}}$ такое, что

$$\gamma(0)=z,\ \lim_{t\to 1}\rho(\gamma(t),\ F)=0.$$

Тогда мы скажем, что γ *соединяет* z с F.

В соответствии с этим, для открытого множества $\Omega\subset\overline{\mathbf{C}}$ множество $e\subset\overline{\mathbf{C}}\setminus\Omega$ назовем *достижимым* из Ω, если существует точка $z\in\Omega$ и непрерывное отображение $\gamma_z:[0,\ 1)\to\Omega$, соединяющее z с e. Естественно полагать, что пустое подмножество $e=\varnothing$ недостижимо из Ω.

Сформулируем, придерживаясь выше изложенного, наши результаты.

Теорема 1. (обобщение принципа максимума). *Пусть B—область в $\overline{\mathbf{C}}$, $e\subset\partial B$, e — замкнуто. Пусть, кроме того, h — непрерывная субгармоническая функция в B. Тогда*

1. *Если множество e недостижимо из B, то из того, что*

$$\sup_{\xi\in\partial B\setminus e}h(\xi)\leqslant M<\infty \tag{1.1}$$

следует, что $h(z)\leqslant M$ для всех $z\in B$.

2. *Если множество e достижимо из B, то существует субгармоническая в B функция $h=|f|$, где $f\in H(\overline{\mathbf{C}}\setminus e)$ такая, что для всех $z\in\partial B\setminus e$ имеем $h(z)<1$, однако h не ограничена сверху в B.*

Пункт 1 этой теоремы в случае $e=\varnothing$ совпадает с классическим принципом максимума. Отметим также, что в пункте 1 этой теоремы ограниченность сверху функции h формально не постулируется. Отметим, что для функции h значение $-\infty$ вполне допустимо.

Для множества $E \subset D$, замкнутого относительно D, и функции $f \in H(D)$ через $\hat{E}_D$ обозначим оболочку множества E относительно области D

$$\hat{E}_D = \mathrm{Hull}\,(E, D) = \{z \in D : |f(z)| \leqslant \|f\|_E\},$$

где $\|f\|_E = \sup\limits_E |f(z)|$.

Пользуясь понятием оболочки множества, укажем на некоторые следствия из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть $E \subset D$ и E замкнуто относительно D. Оболочка $\hat{E}_D$ множества E состоит из E и всех компонент множества $D \setminus E$, для которых ∂D недостижимо, и только из них.*

Действительно, очевидно, что $E \subset \hat{E}_D$. Далее, из первого пункта теоремы 1 следует, что если Ω — некоторая компонента $D \setminus E$, для которого ∂D недостижимо, то $\Omega \subset \hat{E}_D$. А если для компоненты Ω, ∂D достижимо, то из второго пункта теоремы 1 следует, что $\Omega \overline{\in} \hat{E}_D$.

Следствие 2. $A_D(E) \subset A(\hat{E}_D)$.

В самом деле, пусть $f \in A_D(E)$, тогда существует последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций из $H(D)$, которая равномерно на E сходится к f. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует не зависящий от z номер N такой, что для всех $n > N$ и $m = 1, 2, 3, \cdots$ при $z \in E$

$$|g_{n+m}(z) - g_n(z)| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Тогда в силу следствия 1 неравенство (1.2) верно для всех $z \in \hat{E}_D$. Следовательно, последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно на $\hat{E}_D$ сходится, определяя там аналитическую функцию f_1 такую, что для всех $z \in E$, $f_1(z) = f(z)$. Следовательно $f \in A(\hat{E}_D)$.

Обозначим далее через $h(E)$ — класс функций, непрерывных на E и гармонических в E^0, а через $h_D(E)$ — равномерное замыкание множества сужений на E функций, гармонических в D, можно точно так же доказать

Следствие 2′. $h_D(E) \subset h(\hat{E}_D)$.

Пользуясь следствием 2 легко показать, что если $\hat{E}_D \in K_D$, то класс $A_D(E)$ является алгеброй. Однако следующий пример показывает, что в общем случае $A_D(E)$ не является алгеброй.

Теорема 2. *Пусть E — относительно замкнутое подмножество области D и $\hat{E}_D \overline{\in} K_D$. Тогда существуют функции f, $g \in A_D(E)$, причем f ограничена, однако $fg \overline{\in} A_D(E)$. Более того, можно считать, что f мероморфна, а g голоморфна в D.*

2°. Вспомогательные леммы. Для доказательства первой леммы нам понадобится следующее

Предложение. *Пусть D — область в $\overline{\mathbf{C}}$, ∂D — граница D. Пусть также γ — непрерывное отображение полуинтервала $[0, 1)$ в D, соединяющее точку z_0 области D с ∂D. Тогда $\overline{\gamma([0, 1))} \setminus \gamma$ связно.*

Действительно, рассмотрим систему непрерывных отображений $\gamma_t : [t, 1) \to D$. Тогда $\{\overline{\gamma_t}\}$ — монотонно убывающее по t семейство связных компактных множеств и множество $\Gamma = \bigcap\limits_t \overline{\gamma_t}$ связано (см. [5], стр. 179) и $\Gamma = \overline{\gamma} \setminus \gamma$.

Прежде, чем приступить к доказательству лемм, дадим два необходимых нам определения.

Определение 2. Функция $f \in H(B)$, которая может быть представлена в виде $f = f_1/f_2$, где f_1, f_2 — ограниченные функции из $H(B)$, называется функцией ограниченного вида в B.

Пусть B — область в $\overline{\mathbf{C}}$ и B^∞ — универсальная поверхность наложения для области B. Тогда существует (см. [6], стр. 255) функция $x = x(z)$, которая отображает поверхность B^∞ взаимно однозначно и конформно на единичный круг $|x| < 1$. Пусть $z = z(x)$ — функция, обратная к $x = x(z)$.

Определение 3. Область B из $\overline{\mathbf{C}}$ называется ограниченного или неограниченного вида в зависимости от того, будет ли функция $z = z(x)$ ограниченного вида или нет.

Лемма 1. *Пусть B — область в $\overline{\mathbf{C}}$, $e \subset \partial B$, e — замкнуто и недостижимо из B. Тогда гармоническая мера множества e относительно области B равна нулю.*

Доказательство. Пусть B^∞ — универсальная поверхность наложения для области B. Тогда существует [6] взаимно однозначное и конформное отображение $x = x(z)$ поверхности B^∞ на единичный круг $|x| < 1$.

Покажем сначала, что B — область ограниченного вида. Пусть для этого, ζ_0 — некоторая точка на e, и $\{\zeta_n\}$ — последовательность точек области B, сходящаяся к ζ_0. Построим непрерывную кривую Γ, проходящую через точки ζ_n, и соединяющую некоторую точку области B с ∂B.

Рассмотрим множество $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$. В силу выше доказанного предложения возможны два случая:

а) $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ состоит из единственной точки ζ',

б) $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ — континуум.

В первом случае $\zeta' = \zeta_0$ и следовательно e достижимо из B. Следовательно, $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ — континуум и по теореме Р. Неванлинны (см. [7], стр. 214), B есть область ограниченного вида. Отсюда имеем, что функция $z = z(x)$, обратная к функции $x = x(z)$, ограниченного вида т. е. $z = z_1/z_2$, где z_1, z_2 — ограниченные аналитические функции в круге $|x| < 1$. Важно заметить, что функции z_1 и z_2, в силу теоремы Рисса (см. [7], стр. 210), обращаются в нуль лишь на множестве гармонической меры нуль. Для функций ограниченного вида имеет место теорема Фату (см. [7], стр. 208), согласно которой функция $z = z(x)$ на подмножестве F_x окружности $|x| = 1$, которое имеет меру 2π, имеет радиальные граничные значения. Обозначим через F_z множество радиальных граничных значений, которое принимает функция $z = z(x)$ на множестве F_x. Заметим, что точки множества F_z достижимы из B. Обозначим, далее, через E_z множество иррегулярных точек границы области B. Не ограничивая общности, можно считать, что $\infty \in \partial B$. Тогда по теореме Келлога (см. [8], стр. 80), емкость множества E_z равна нулю. Отсюда имеем, что прообраз E_x множества E_z гармонически нульмерен, так как, в противном случае, в силу теоремы Р. Неванлинны (см. [7], стр. 211) имели бы, что E_z положительной гармонической меры.

Рассмотрим теперь разность

$$u(x) = \omega(x,\ F_x \setminus E_x,\ |x| < 1) - \omega(z(x),\ F_z \setminus E_z,\ B).$$

Это — ограниченная и гармоническая в единичном круге функция. Для любого $x \in F_x \setminus E_x$ имеем, что $u(x) = 0$. Таким образом, ограниченная гармоническая в единичном круге функции u равна нулю всюду на $|x| = 1$ за исключением множества гармонической меры нуль. Поэтому в силу обобщенного принципа максимума (см. [7], стр. 143), имеем $u(x) = 0$ для всех точек круга $|x| < 1$. И, наконец, так как $\omega(x, F_x \setminus E_x, |x| < 1) = 1$ получаем, что $\omega(z(x), F_z \setminus E_z, B) = 1$, следовательно, $\omega(z, e, B) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть E — относительно замкнутое подмножество D и $D \setminus E$ связано. Тогда, фиксируя $a \in D \setminus E$ и полагая $f(z) = 1/(z - a)$ для всех $z \in E$ имеем, что $f \in A_D(E)$.*

Доказательство. Пусть γ — непрерывная кривая, соединяющая точку $a = a_1$ с ∂D и $\gamma \subset D \setminus E$. Возьмем последовательность точек $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \gamma$ такую, что $\rho(a_n, \partial D) \to 0$ при $n \to \infty$ и последовательность $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ жордановых областей таких, что $\Omega_n \subset D \setminus E$ и дуга $\widehat{a_n a_{n+1}}$ лежит в Ω_n. Пусть, кроме того

$$\delta(\Omega_n) \to 0 \text{ и } \rho(\Omega_n,\ \partial D) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

и $f(z) = Q_1(z)$. Так как $Q_1(z) \in H(D \setminus \Omega_1)$, то по теореме Рунге, существует рациональная функция Q_2, с единственным полюсом в a_2 такая, что для любого $\varepsilon > 0$, при $z \in D \setminus \Omega_1$ имеем

$$|Q_1(z) - Q_2(z)| < \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Если рациональная функция Q_n с единственным полюсом в a_n построена для $n = 1, 2, 3, \cdots k$, то функцию Q_{k+1} с единственным полюсом в a_{k+1} строим так, чтобы при $z \in D \setminus \Omega_k$ имели

$$|Q_{k+1}(z) - Q_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Докажем, что последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно, на любом компакте в D, сходится к функции $\varphi \in H(D)$. В самом деле, пусть F— компакт в D. Возьмем число N так, чтобы $F \subset D \setminus \Omega_n$ при $n > N$. Тогда при $n > N$ и $m = 1, 2, 3, \cdots$, для $z \in F$ имеем

$$|Q_{n+m}(z) - Q_n(z)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+m-1} |Q_{k+1}(z) - Q_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Это означает, что последовательность $\{Q_n\}$ равномерно на компакте F сходится к аналитической в D функции

$$\varphi(z) = Q_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (Q_{n+1}(z) - Q_n(z)).$$

Далее, так как $E \subset D \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, то при $z \in E$ имеем

$$|\varphi(z) - f(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |Q_{n+1}(z) - Q_n(z)| < \varepsilon,$$

т. е. $f \in A_D(E)$. Лемма доказана.

3°. Доказательство теоремы 1. Отметим, что доказательство пункта 1 этой теоремы основано на лемме 1 и некоторой модификации рассуждений (см. [9], стр. 205) доказательства известной теоремы Иверсена.

1. Для $\alpha \geqslant M$ рассмотрим открытое множество

$$B_\alpha = h^{-1}((\alpha, +\infty)).$$

Если утверждение пункта 1 не выполнено, то $B_M \neq \varnothing$. Докажем, что если $B_{\alpha_0} \neq \varnothing$, при $\alpha_0 > M$ и Ω_{α_0} — какая-либо компонента связности B_{α_0}, то $e_{\alpha_0} = \partial\Omega_{\alpha_0} \cap e \neq \varnothing$ и функция h не ограничена сверху в Ω_{α_0}. Это означает, что для любого $\alpha > \alpha_0$ множество Ω_{α_0} содержит некоторую компоненту Ω_α множества B_α такую, что $e_\alpha = \partial\Omega_\alpha \cap e \neq \varnothing$.

В самом деле, если $e_{\alpha_0} = \varnothing$, то тогда $\partial\Omega_{\alpha_0} \subset B \cup (\partial B \setminus e)$, и применяя к Ω_{α_0}, с учетом (1.1), классический принцип максимума, мы получили бы, что $h(z) \leqslant \alpha_0$ для $z \in \Omega_{\alpha_0}$, а это противоречит определению Ω_{α_0}. Таким образом, $e_{\alpha_0} \neq \varnothing$. Заметим, далее, что из условия, что e недостижимо из B следует, что e_{α_0} недостижимо из Ω_{α_0}. Из леммы 1 имеем, что гармоническая мера множества e_{α_0} относительно области Ω_{α_0} равна нулю. Тогда, если бы функция h была ограничена сверху в Ω_{α_0}, то по обобщенному принципу максимума (см. [10], стр. 70) мы опять имели бы, что $h(z) \leqslant \alpha_0$ в Ω_{α_0}.

Итак, поскольку $B_M \neq \varnothing$, мы можем фиксировать некоторую последовательность $\{\Omega_n\}_{n=m}^{\infty}$ $(m > M)$ компонент множеств B_n, так, чтобы $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ и последовательность точек $\{z_n\}_{n=m}^{\infty}$, $z_n \in \Omega_n$.

Пусть V — произвольная окрестность множества e. Тогда существует такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ имеем $\Omega_n \subset V$. Так как $z_n, z_{n+1} \subset \Omega_n$, то пусть γ_n—жорданова дуга, соединяющая z_n с z_{n+1} в Ω_n. Полагая $\Gamma = \bigcup_{n=N}^{\infty} \gamma_n$, имеем, что $\Gamma \subset V$. Следовательно, Γ соединяет z_N с e. Полученное противоречие доказывает пункт 1 теоремы 1.

2. Пусть непрерывная кривая Γ соединяет некоторую точку области B с множеством e. Пусть, далее, $\{K_\xi\}_{\xi\in\Gamma}$ — система кругов с центрами в точках ξ и радиусами r_ξ, где $r_\xi\to 0$ при $\xi\to e$ вдоль Γ такая, что $\Gamma\subset\bigcup\limits_{\xi\in\Gamma}K_\xi\subset B$. Тогда, полагая $D=\mathbf{C}\setminus e$ и $E=\Gamma\cup(D\setminus\bigcup\limits_{\xi\in\Gamma}K_\xi)$, легко проверить, что $E\in K_D$.

Пусть g — непрерывная на E функция, равная нулю на $D\setminus\bigcup\limits_{\xi\in\Gamma}K_\xi$ и такая, что $g(z)\to\infty$ при $z\to e$ вдоль Γ. Тогда по теореме А существует функция $f\in H(D)$ такая, что для всех $z\in E$

$$|f(z)-g(z)|<1.$$

Отсюда для функции $h=|f|$ имеем, что $h(z)<1$ при $z\in\partial B\setminus e$, в то время как функция h не ограничена сверху на Γ.

4°. Доказательство теоремы 2. Пусть $\hat{E}_D\in K_D$. Тогда существует число $\lambda>0$ и последовательность попарно непересекающихся областей $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что

$$\Omega_n\subset D\setminus E,\ \partial\Omega_n\in\bigcup\,[D\setminus V_\lambda(\partial D)],\ 0<\rho(\Omega_n,\ \partial D)\to 0.$$

Так как ∂D — компакт в $\overline{\mathbf{C}}$, то существует точка $\xi\in\partial D$ такая, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\rho(\Omega_n,\ \xi)=0.$$

Не ограничивая общности можно считать, что $\xi=\infty$ и что области Ω_n ограничены, пересекаются с кругом

$$V=\left\{z\in\overline{\mathbf{C}}:|z|<\frac{1}{\lambda}\right\}\ \text{и}\ \lim_{n\to\infty}\rho(\Omega_n,\ \infty)=0.$$

Пусть $z_n\in\Omega_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ и $\rho(z_n,\ \partial D)\to 0$. Рассмотрим последовательность чисел $\{b_n/d_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $d_n=d(z_n,\ E)$, такую, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n/d_n<\infty$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z-z_n}\tag{4.1}$$

определяет мероморфную в $\overline{\mathbf{C}}$ функцию f, и при этом равномерно на E сходится. В силу леммы 2 каждый член этого ряда принадлежит $A_D(E)$, следовательно $f\in A_D(E)$.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность чисел, таких, что

$$\frac{a_n}{\delta_n}\to\infty\ \text{при}\ n\to\infty,\ \text{где}\ \delta_n=\delta(\Omega_n).\tag{4.2}$$

Построим (см. [11], стр. 298) функцию g, голоморфную в D такую, что $g(z_n)=a_n/b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$, и рассмотрим функцию $F=fg$. Это—мероморфная в D функция, имеющая простые полюсы в точках z_n $(n=1,2,3\cdots)$ и главные части

$$\frac{a_n}{z-z_n}\ (n=1,2,3,\cdots).$$

Из приведенного в [12] доказательства необходимой части теоремы A следует, что такая функция с условием (4.2) на последовательность $\{a_n\}$ не принадлежит классу $A_p(E)$. Теорема 2 доказана.

В заключение выражаю благодарность члену-корреспонденту АН Арм.ССР Н. У. Аракеляну за постановку задач и руководство.

Ереванский государственный
университет Поступила 3. VII. 1985

Ռ. Շ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ. Մաքսիմումի սկզբունքի մի ընդհանրացման մասին (*ամփոփում*)

Տվյալ աշխատանքի հիմնական արդյունքը հետևյալ թեորեմն է։

Թեորեմ. Դիցուք B-ն տիրույթ է ընդլայնված կոմպլեքս հարթությունից, $e \subset \partial B$, e-ն փակ է։ Բացի դրանից, դիցուք h-ը B տիրույթում անընդհատ և սուբհարմոնիկ ֆունկցիա է։ Այդ դեպքում.

1. Եթե e-ն անհասանելի է B տիրույթից և

$$\sup_{\xi \in \partial B \setminus e} h(\xi) \leqslant M < \infty,$$

ապա $h(z) \leqslant M$, B տիրույթում.

2. Եթե e-ն հասանելի է B տիրույթից, ապա գոյություն ունի B տիրույթում սուբհարմոնիկ ֆունկցիա $h = |f|$, որտեղ $f \in H(C \setminus e)$ այնպիսի, որ $h(z) < 1$ եթե $z \in \partial B \setminus e$, սակայն h-ը անսահմանափակ է վերից B տիրույթում։

R. Sh. SAHAKIAN. *On a generalization of the maximum principle* (summary)

The main result of this paper is the following:

Theorem. Let B be a domain in the extended complex plane $\overline{\mathbb{C}}$, $e \subset \partial B$, e is closed. Let h be a continuous subharmonic function in B. Then

(1) If the set e is inaccessible from B and

$$\sup_{\xi \in \partial B \setminus e} h(\xi) \leqslant M < \infty,$$

then $h(z) \leqslant M$ for all $z \in B$.

(2) If the set e is accessible from B' there exists a function $h = |f|$, subharmonic in B, with $f \in H(\mathbb{C} \setminus e)$ such that $h(z) < 1$ for all $z \in \partial B \setminus e$, but h is unbounded in B from above.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. У. Аракелян.* Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями, Изв. АН Арм.ССР, серия матем., 3, №№ 4—5, 1968, 273—286.
2. *N. U. Arakelian,* Approximaton complexe et proprietes des fonctions analytiques Actes, Congres igtern. Math., 1970, tome 2, 595—600
3. *A. Straw,* Decomprostion of approximable functions, Lect, Notes in Math,. 1943 Linear and Cemplex Analysis, Problem Book, tome 2, 2, 1984, 225—238.
4. *L. Brown.* A. L. Shields, Approximation by analytions functions uniformly continuous on a set, Dukd Dath. Journal, 1975, 42, 71—81.
5. *К. Куратовский.* Топология, том 2, «Мир», М., 1966.
6. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.
7. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
8. *M. Tsuji.* Potential Thery in Modern Function Theory, Maruzen Co., Tokyo, 1959
9. *У. Хейман, П. Кеннеди.* Субгармонические функции, «Мир», М., 1980.
10. *W. T. J. Fuchs.* Topies in the Theory of function one complexe variable. F. Vav Hostand Compeny, INC, Prinston N. J., t. 2.
11. *W, Rudin.* Real and Comlex Analysis, Mc Graw—Hill Company, New York, 1966
12. *W. H. J. Fuchs.* Thenrie der Papproximation des fonciions d'une variable comlesxe, Vniversitet de Montreal, 1968.