ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 1, 1987 Математика

УДК 517.9

В. А. ЯВРЯН

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОДНОПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение. В пространстве $L^2(0, \infty)$ рассмотрим оператор L, задаваемый формулой

$$Ly = -y'' + q(x)\,y$$

и определенный на финитных функциях $y(x)$, удовлетворяющих в нуле условию $y'(0) - hy(0) = 0$, $\operatorname{Im} h = 0$. Предполагается, что $q(x)$—вещественная функция, интегрируемая в любом интервале $(0, b)$, $b < +\infty$.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — решения уравнения $-y'' + q(x)\,y = 0$ и $\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0)\,\psi(0) - \varphi(0)\,\psi'(0) = 1$. Тогда обратный оператор $L^{-1} = A$ будет интегральным оператором с ядром

$$K(x, s) = \begin{cases} \varphi(x)\,\psi(s), & x \leqslant s \\ \varphi(s)\,\psi(x), & x \geqslant s, \end{cases} \tag{1}$$

который определен на тех финитных функциях $f \in L^2(0, \infty)$, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0. \tag{2}$$

Мы будем изучать оператор A в пространстве $L^2(0, \infty)$ без его связи с оператором Штурма-Лиувилля, а только в предположении, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные локально квадратично интегрируемые вещественные функции и

$$\int_0^\infty (\varphi^2(x) + \psi^2(x))\,dx = \infty. \tag{3}$$

Для простоты предположим также, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на множестве положительной меры не обращаются одновременно в нуль. В противном случае надо было бы рассматривать оператор A в пространстве $L^2(E)$, где E получается из $(0, \infty)$ отбрасыванием этого множества.

Можно сказать, что A^{-1}, если он существует, есть обобщенный оператор Штурма-Лиувилля. Условие (3) означает, что мы рассматриваем аналог случая точки Вейля. Отметим, что если (3) не выполняется, то A будет вполне непрерывным оператором (более того, оператором Гильберта-Шмидта) и, следовательно, для него применима теория Гильберта-Шмидта.

В настоящей работе для оператора A строится теория, аналогичная спектральной теории операторов Штурма-Лиувилля. В случае конечного интервала интегральные операторы с ядрами (1) рассматривались в монографии Гантмахера и Крейна [1] и назывались однопарными интегральными операторами.

§ 1. Спектральное разложение однопарного интегрального оператора

Оператор A симметричен. Если $\varphi \in L^2(0, \infty)$, то его область определения будет неплотной и, между прочим, возможен случай, когда оператор A не имеет замыкания.

Для получения спектрального разложения оператора A мы применим метод направляющего функционала М. Г. Крейна к оператору, обратному к A. Поэтому мы сначала выделим множество нулей оператора A.

Следуя [2], интервал (α, β) мы будем называть исключительным, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ линейно зависимы в этом интервале. Мы скажем, что (α, β) есть максимальный исключительный интервал, если он не содержится ни в одном другом исключительном интервале. Пусть $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ — множество максимальных исключительных интервалов. Будем считать, что $\varphi(x) \not\equiv 0$ в интервале вида $(0, \beta)$ и что интервал вида $(\alpha, +\infty)$ не есть исключительный (в противном случае надо рассматривать пространства $L^2(\beta, \infty)$ и $L^2(0, \alpha)$).

Теорема 1. *Ортогональное дополнение $K(A)$ области значений оператора A состоит из всех функций $g \in L^2(0, \infty)$, удовлетворяющих условиям:*

1) $\quad g(x) = 0 \quad$ *почти всюду на* $F = (0, \infty) \setminus \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$,

2) $$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} g(s)\varphi(s)\, ds = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} g(s)\psi(s)\, ds = 0.$$

Доказательство. Пусть $g \in K(A)$, т. е.

$$(Af, g) = 0 \quad \text{для любого } f \in D(A),$$

где $D(A)$ область определения оператора A.

Так как f удовлетворяет условию (2), то

$$(Af)(x) = \psi(x)\int_0^x f(s)\varphi(s)\, ds + \varphi(x)\int_x^\infty f(s)\psi(s)\, ds = \int_x^\infty V(x, s) f(s)\, ds,$$

где

$$V(x, s) = \varphi(x)\psi(s) - \varphi(s)\psi(x).$$

Имеем

$$(Af, g) = \int_0^\infty \overline{g(x)}\, dx \int_x^\infty V(x, s) f(s)\, ds = \int_0^\infty f(x)\, dx \int_0^x V(s, x)\, \overline{g(s)}\, ds = 0$$

для любой функции f, удовлетворяющей условию (2).

Отсюда следует, что существует такая постоянная $c = c(g)$, что

$$\int_0^x V(s, x)\overline{g(s)}\,ds = -\bar{c}\,\varphi(x).$$

Подставляя значение $V(x, s)$, получаем

$$\left(c - \int_0^x g(s)\,\psi(s)\,ds\right)\varphi(x) + \psi(x)\int_0^x g(s)\,\varphi(s)\,ds = 0. \qquad (4)$$

а) Пусть x_0 такая точка, что

$$\Phi_1(x_0) \neq 0, \ \Phi_1(x) = \int_0^x g(s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Тогда существует такая окрестность (α, β) этой точки, что $\Phi_1(x) \neq 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$. На этом интервале рассмотрим функцию

$$F(x) = \left(c - \int_0^x g(s)\,\psi(s)\,ds\right) \Big/ \Phi_1(x).$$

Из (4) следует, что $F'(x) = 0$ для любого $x \in (\alpha, \beta)$. Следовательно, $F(x) = a = \text{const}$ при $x \in (\alpha, \beta)$. Это соотношение вместе с (4) показывает, что

$$\psi(x) + a\varphi(x) = 0 \text{ при } x \in (\alpha, \beta),$$

т. е. интервал (α, β) есть исключительный.

б) Пусть x_0 такая точка, что

$$\Phi_2(x_0) \neq 0, \ \Phi_2(x) = c - \int_0^x g(s)\,\psi(s)\,ds.$$

Тогда по аналогии с а) можно показать, что производная функции $\Phi_1(x)/\Phi_2(x)$ тождественно равна нулю в интервале (α, β). Отсюда следует, что $\varphi(x) + b\psi(x) = 0$ при $x \in (\alpha, \beta)$, где b некоторая постоянная.

Таким образом, снова получаем, что (α, β) — исключительный интервал.

Пусть (α, β) — максимальный исключительный интервал. Покажем, что

$$\int_\alpha^\beta g(s)\,\varphi(s)\,ds = \int_\alpha^\beta g(s)\,\psi(s)\,ds = 0.$$

Если один из интегралов $\int_0^\alpha g(s)\,\varphi(s)\,ds$ и $\int_0^\beta g(s)\,\varphi(s)\,ds$, скажем второй, не равен нулю, то согласно а) найдется такой интервал, содержащий точку β, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будут линейно зависимыми. Так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не обращаются в нуль одновременно, то последнее означает, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ линейно зависимы в более широком интервале, чем (α, β), что противоречит максимальности (α, β). Отсюда следует, что первое из условий 2) выполняется.

Точно таким же образом получаем, что при $\alpha > 0$

$$c - \int_0^{\alpha} g(s)\psi(s)\,ds = c - \int_0^{\beta} g(s)\psi(s)\,ds = 0,$$

т. е. выполняется второе из условий 2).

Если же $\alpha = 0$, т. е. интервал вида $(0, \beta)$ есть исключительный, то учитывая, что $\varphi(x) \not\equiv 0$, получаем, что $\psi(x) = c\varphi(x)$ для $x \in (0, \beta)$. Это означает, что второе из условий 2) следует из уже доказанного первого.

Из а) и б) следует, что если $x \in F$, то

$$\int_0^{x} g(s)\varphi(s)\,ds = c - \int_0^{x} g(s)\psi(s)\,ds = 0.$$

Отсюда вытекает, что $g(x)\varphi(x) = g(x)\psi(x) = 0$ для $x \in F$ и, учитывая, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ одновременно не обращаются в нуль, получаем, что $g(x) = 0$ для любого $x \in F$.

Теперь покажем, что если g удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1, то $g \in K(A)$, т. е. g удовлетворяет соотношению (4).

Пусть x принадлежит некоторому исключительному интервалу (α, β). Тогда

$$(0, x) = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k) \cup (\alpha, x) \cup (F \cap (0, x)),$$

где суммирование берется по всем k, для которых $\beta_k < x$.

Следовательно

$$-\varphi(x)\int_0^{x} g(s)\psi(s)\,ds + \psi(x)\int_0^{x} g(s)\varphi(s)\,ds =$$

$$= \sum_k \left(-\varphi(x)\int_{\alpha_k}^{\beta_k} g(s)\psi(s)\,ds + \psi(x)\int_{\alpha_k}^{\beta_k} g(s)\varphi(s)\,ds\right) -$$

$$-\varphi(x)\int_{\alpha}^{x} g(s)\psi(s)\,ds + \psi(x)\int_{\alpha}^{x} g(s)\varphi(s)\,ds = 0.$$

Если же $x \in F$, то

$$(0, x) = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k) \cup ((0, x) \cap F)$$

и, как и выше, (4) легко проверяется.

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Из этой теоремы следует, что если g — финитная функция и $g \in K(A)$, то g принадлежит области определения $\mathrm{D}(A)$ оператора A и $Ag = 0$. Таким образом, ядро оператора A плотно в $K(A)$.

Следствие 1. *Для того, чтобы существовал обратный оператор A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы отсутствовали исключительные интервалы.*

Следствие 2. *Замыкание H_0 области значений оператора A состоит из функций g, произвольных на F и*

$$g(x) = \begin{cases} c_k \varphi(x), & x \in (\alpha_k, \beta_k), \text{ если } \varphi(x) \not\equiv 0 \text{ на } (\alpha_k, \beta_k), \\ c_k \psi(x), & x \in (\alpha_k, \beta_k), \text{ если } \varphi(x) \equiv 0 \text{ на } (\alpha_k, \beta_k). \end{cases}$$

Легко проверить, что подпространство H_0 приводит оператор A. Обозначим через A_0 часть оператора A в пространстве $H_0 : A_0 f = Af$, $f \in \mathrm{D}(A) \cap H_0$. Очевидно, что обратный оператор A_0^{-1} существует, определен на плотном в H_0 множестве и, следовательно, имеет замыкание. Это замыкание $\overline{A_0^{-1}}$ естественно назвать обобщенным оператором Штурма—Лиувилля.

Обозначим через L множество финитных функций, принадлежащих $\mathrm{L}^2(0, \infty)$. Оператор A переводит $\mathrm{D}(A)$ в L.

Рассмотрим уравнение

$$f - Af = g, \qquad \text{где } g \in \mathrm{L}. \tag{5}$$

Уравнение (5) равносильно уравнению

$$f(x) - \lambda \int_x^\infty V(x, s) f(s)\, ds = g(x), \quad f \in \mathrm{D}(A). \tag{6}$$

Решением (6) будет $f = (I - \lambda V_1)^{-1} g$, где

$$V_1 f(x) = \int_x^\infty V(x, s) f(s)\, ds.$$

Для того, чтобы $f \in \mathrm{D}(A)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \varphi) = (g, (I - \lambda V_1^*)^{-1} \varphi) = 0.$$

Учитывая, что

$$V(x, s) = -V(s, x),$$

получаем следующее условие разрешимости (5):

$$\Phi(g, \lambda) = \int_0^\infty g(x) \varphi_\lambda(x) dx = 0, \tag{7}$$

где

$$\varphi_\lambda = (I + \lambda V)^{-1} \varphi, \quad Vf(x) = \int_0^x V(x, s) f(s)\, ds.$$

Таким образом, $\varphi_\lambda(x)$ есть решение интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi_\lambda(x) - \lambda \int_0^x V(x, s)\, \varphi_\lambda(s)\, ds = \varphi(x). \tag{8}$$

Легко видеть, что если $g \in H_0$, то решение f уравнения (5) тоже будет принадлежать H_0. Для этого надо обе части (5) скалярно умножить на произвольную финитную функцию $f \in K(A) = \mathrm{L}^2(0, \infty) \ominus H_0$ и учесть, что $f_0 \in \mathrm{D}(A)$ и $(Af, f_0) = (f, Af_0) = 0$. Отсюда, имея в виду, что такие функции f_0 плотны в $K(A)$, получаем, что $f \in H_0$. Отсюда следует, что уравнение

$$A_0^{-1} f - \lambda f = g, \text{ где } g \in H_0 \cap \mathrm{L} = \mathrm{L}_0,$$

имеет решение в том и только том случае, когда выполняется (7).

Таким образом, функционал $\Phi(g, \lambda)$ является направляющим функционалом для оператора A_0^{-1}. Теперь применяя метод направляющих функционалов М. Г. Крейна (см. [3], [4]) и учитывая теорему 3 (в части единственности спектральной функции), получаем спектральное разложение оператора A_0.

Теорема 2. *Существует единственная неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ такая, что отображение*

$$U: g \to \Phi(g, \lambda),\ g \in \mathrm{L}_0$$

есть изометрия из L_0 в L^2_σ. Более того, продолжение U по непрерывности отображает H_0 на все пространство $\mathrm{L}^2_\sigma(-\infty, \infty)$. При этом оператор A_0 переходит в оператор умножения $1/\lambda$ в пространстве $\mathrm{L}^2_\sigma(-\infty, \infty)$.

Эта теорема в случае отсутствия исключительных интервалов и без указания единственности спектральной функции $\sigma(\lambda)$ другим путем установлена де Бранжем (см. [2], стр. 49).

Обозначим через P оператор ортогонального проектирования пространства $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ на подпространство $K(A)$. Легко видеть, что если $f(x)$ — финитная функция, то $Pf(x)$ тоже будет финитной. С другой стороны, $Pf \in \mathrm{D}(A)$, $APf = 0$ и $\Phi(Pf, \lambda) = \lambda^{-1}\Phi(APf, \lambda) = 0$. Отсюда следует, что $\Phi(f - Pf, \lambda) = \varphi(f, \lambda)$ и так как $f - Pf \in \mathrm{L}_0$, то для любой финитной $f(x)$ получаем

$$\int_0^\infty |f(x) - Pf(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f, \lambda)|^2 d\sigma(\lambda).$$

Это соотношение показывает, что H_0 — максимальное подпространство в $\mathrm{L}^2(0, \infty)$, где U есть изометрический оператор из $\mathrm{L}^2(0, \infty)$ в $(\mathrm{L}^\sigma_2 - \infty, \infty)$ при некотором $\sigma(\lambda)$.

§ 2. Резольвента обобщенного оператора Штурма—Лиувилля

1. Резольвента однопарного оператора в конечном интервале. Круги Вейля. В пространстве $L^2(0, b)$ рассмотрим интегральный оператор с однопарным ядром (1):

$$(A(b)f)(x) = \psi(x)\int\limits_0^x f(s)\varphi(s)\,ds + \varphi(x)\int\limits_x^b f(s)\psi(s)\,ds \quad (0 \leqslant x \leqslant b).$$

Найдем фредгольмову резольвенту $A_\lambda(b) = A(b)\,(I - \lambda A(b))^{-1}$ оператора $A(b)$. Из $(I - \lambda A(b))f = g$ следует, что

$$(I + \lambda V)f = g + \lambda(f, \psi)\varphi$$

или

$$f = (I + \lambda V)^{-1} g + \lambda(f, \psi)\varphi_\lambda. \tag{9}$$

Здесь и дальше обозначено

$$(u, v) = \int\limits_0^b u(x)v(x)\,dx.$$

Умножим обе части равенства (9) скалярно на ψ и определим (f, ψ). Получаем

$$(f, \psi) = \frac{((I+\lambda V)^{-1} g, \psi)}{1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)}.$$

Пусть $\chi_\lambda = (I + \lambda V^*)^{-1}\psi$, т. е. $\chi_\lambda(x)$ есть решение интегрального уравнения

$$\chi_\lambda(x) - \lambda\int\limits_x^b V(x, s)\chi_\lambda(s)\,ds = \psi(x). \tag{10}$$

Тогда из (9) имеем

$$f = (I + \lambda V)^{-1} g + \frac{\lambda(g, \chi_\lambda)}{1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)}\varphi_\lambda. \tag{11}$$

Обозначим через $A_\lambda(x, s)$ и $V_\lambda(x, s)$, соответственно, фредгольмовы резольвенты операторов A и V. Так как оператор $A(b)$ симметричен, то $A_\lambda(x, s) = A_\lambda(s, x)$. Учитывая это, из (11) получим, что

$$V_\lambda(x, s) = \frac{1}{1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)}(\varphi_\lambda(x)\chi_\lambda(s) - \varphi_\lambda(s)\chi_\lambda(x)), \tag{12}$$

где $V_\lambda(x, s)$ — ядро фредгольмовой резольвенты V_λ оператора V:

$$(I + \lambda V)^{-1} = I - \lambda V_\lambda.$$

Подставляя это значение $(I + \lambda V)^{-1}$ в (11), получаем

$$A_\lambda(x, s) = \frac{1}{1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)}\varphi_\lambda(x)\chi_\lambda(s) \quad (x \leqslant s). \tag{13}$$

Ядро фредгольмовой резольвенты оператора $A(b)$ в такой форме приведено в монографии Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна [1]. Мы хотим переписать (13) в такой форме, которая аналогична случаю операторов Штурма-Лиувилля. Из (10) следует, что

$$(I+\lambda V)\chi_\lambda=(1-\lambda(\varphi,\chi_\lambda))\psi+\lambda(\psi,\chi_\lambda)\varphi.$$

Отсюда получаем, что

$$\chi_\lambda=\lambda(\psi,\chi_\lambda)\varphi_\lambda+(1-\lambda(\varphi,\chi_\lambda))\psi_\lambda,$$

где, по аналогии с φ_λ, обозначено

$$\psi_\lambda=(I+\lambda V)^{-1}\psi.$$

Имеем

$$(\varphi,\chi_\lambda)=((I+\lambda V^*)^{-1}\psi,\varphi)=(\psi,(I+\lambda V)^{-1}\varphi)=(\psi,\varphi_\lambda),$$

$$(\psi,\chi_\lambda)=(\psi,\psi_\lambda).$$

Таким образом

$$\chi_\lambda=\lambda(\psi_\lambda,\psi)\varphi_\lambda+(1-\lambda(\varphi_\lambda,\psi))\psi_\lambda. \tag{14}$$

Подставим это значение в (13). Получаем

$$A_\lambda(x,s)=\varphi_\lambda(x)(\psi_\lambda(s)+m_b(\lambda)\varphi_\lambda(s))\quad(x\leqslant s), \tag{15}$$

где

$$m_b(\lambda)=\frac{\lambda(\psi_\lambda,\psi)}{1-\lambda(\varphi_\lambda,\psi)}. \tag{16}$$

Замечание. Из (12) и (14) имеем следующее выражение для $V_\lambda(x,s)$, которое будет полезным в дальнейшем:

$$V_\lambda(x,s)=\varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(s)-\varphi_\lambda(s)\psi_\lambda(x). \tag{17}$$

Теперь построим аналог кругов Вейля для однопарного интегрального оператора. С этой целью рассмотрим интегральный оператор $A_0(b)$ с ядром (1) в интервале $(0,b)$ при дополнительном условии

$$\int_0^b f(x)\varphi(x)\,dx=0.$$

Его самосопряженные расширения $A(b,\tau)$ в $\mathbf{L}^2(0,b)$ будут интегральными операторами с ядрами

$$A(x,s,\tau)=\begin{cases}\varphi(x)(\psi(s)+\tau\varphi(s)), & (x\leqslant s)\\ \varphi(s)(\psi(x)+\tau\varphi(x)), & (x>s),\end{cases}$$

где τ — произвольное вещественное число.

Из (15) и (16) легко видеть, что ядро $A_\lambda(x,s,\tau)$ фредгольмовой резольвенты этого оператора имеет вид

$$A_\lambda(x,s,\lambda)=\begin{cases}\varphi_\lambda(x)(\psi_\lambda(s)+m_b(\lambda,\tau)\varphi_\lambda(s)), & (x\leqslant s)\\ \varphi_\lambda(s)(\psi_\lambda(x)+m_b(\lambda,\tau)\varphi_\lambda(x)), & (x>s),\end{cases} \tag{18}$$

где

$$m_b(\lambda, \tau) = \frac{(1+\lambda(\psi_\lambda, \varphi))\tau + \lambda(\psi_\lambda, \psi)}{-\lambda(\varphi_\lambda, \varphi)\tau + 1 - \lambda(\varphi_\lambda, \psi)} \quad (-\infty < \tau < \infty). \tag{19}$$

Это есть дробно-линейное преобразование от τ и, следовательно, переводит вещественную ось $\operatorname{Im}\tau = 0$ на некоторую окружность $C(b)$. Эту окружность мы назовем окружностью Вейля. В случае оператора Штурма-Лиувилля окружность Вейля в виде (19) приведена в [5] М. Г. Крейном.

Теперь напишем уравнение (19) в другой форме, которая необходима для получения выражения резольвенты оператора A. Из (19) выразим τ через m и учтем, что если $m \in C(b)$, то τ будет вещественным, $\tau = \bar{\tau}$. Отсюда следует, что при $m \in C(b)$

$$D|m|^2 + Bm - \overline{B}\,\overline{m} + C = 0, \tag{20}$$

где

$$D = \bar{\lambda}(1-\lambda(\varphi_\lambda, \psi))\overline{(\varphi_\lambda, \varphi)} - \lambda(\varphi_\lambda, \varphi)(1 - \bar{\lambda}\overline{(\varphi_\lambda, \psi)}),$$

$$B = (1-\lambda(\varphi_\lambda, \psi))(1 + \bar{\lambda}\overline{(\psi_\lambda, \varphi)}) + |\lambda|^2\overline{(\psi_\lambda, \psi)}(\varphi_\lambda, \varphi),$$

$$C = \bar{\lambda}\overline{(\psi_\lambda, \psi)}(1 + \lambda(\psi_\lambda, \varphi)) - \lambda(\psi_\lambda, \psi)(1 + \bar{\lambda}\overline{(\psi_\lambda, \varphi)}).$$

Мы должны вычислить выражения интегралов $(\varphi_\lambda, \bar{\varphi}_\lambda)$, $(\psi_\lambda, \bar{\psi}_\lambda)$ и $(\varphi_\lambda, \bar{\psi}_\lambda)$ через коэффициенты D, B и C. Имеем

$$\mu\varphi_\lambda(x) = \mu\varphi(x) - \int_0^x (\varphi(x)\psi(s) - \varphi(s)\psi(x))\varphi_\lambda(s)\,ds,$$

$$\bar{\mu}\bar{\varphi}_\lambda(x) = \bar{\mu}\varphi(x) = \int_0^x (\varphi(x)\psi(s) - \varphi(s)\psi(x))\overline{\varphi_\lambda(s)}\,ds, \quad \mu = \lambda^{-1}.$$

Умножим первое уравнение на $\overline{\varphi_\lambda(x)}$, второе — на $-\varphi_\lambda(x)$ и сложим. Теперь проинтегрируем обе части полученного равенства от 0 до b и в одном из двух интегралов в правой части изменим порядок интегрирования. После простых преобразований получим

$$\int_0^b |\varphi_\lambda(x)|^2\,dx = \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} D. \tag{21}$$

Аналогичными преобразованиями получаем

$$\int_0^b |\psi_\lambda(x)|^2\,dx = \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda} C,$$

$$\int_0^b \varphi_\lambda(x)\overline{\psi_\lambda(x)}\,dx = \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda}(B - 1).$$

Из этих соотношений следует, что

$$\int_0^b |\psi_\lambda(x) + m\varphi_\lambda(x)|^2\,dx = -\frac{1}{2i\,\mathrm{Im}\,\lambda}(|m|^2 + Bm - \overline{B}\overline{m} + C - m + \overline{m}).$$

Так как m удовлетворяет уравнению (20), то отсюда придем к обычному уравнению окружности $C(b)$:

$$\int_0^b |\psi_\lambda(x) + m\varphi_\lambda(x)|^2\,dx = \frac{\mathrm{Im}\,m}{\mathrm{Im}\,\lambda}. \tag{22}$$

Отсюда следует, что окружность $C(b)$ при любом b и $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ лежит в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,m \geqslant 0$.

Так как коэффициенты дробно-линейного отображения (19) зависят непрерывно от b и $m_0(\lambda, 0) = \tau$, то оно при любом $b > 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ переводит верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ во внутренность круга $K(b)$, ограниченного окружностью $C(b)$. Круг $K(b)$ задается неравенством

$$\int_0^b |\psi_\lambda(x) + m\varphi_\lambda(x)|^2\,dx \leqslant \frac{\mathrm{Im}\,m}{\mathrm{Im}\,\lambda}. \tag{23}$$

Отсюда следует, что если $b < b'$, то $K(b) \supset K(b')$, т. е. круги $K(b)$ вложены друг в друга.

Найдем радиус круга $K(b)$. Сначала заметим, что если дробно-линейное преобразование $m = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ отображает верхнюю полуплоскость на некоторый круг, то, как легко проверить, радиус этого круга вычисляется по формуле: $r = \dfrac{|\alpha\delta - \beta\gamma|}{|\overline{\gamma}\delta - \gamma\overline{\delta}|}$.

В нашем случае (19), с учетом (20) и (21), будем иметь

$$\overline{\gamma}\delta - \gamma\overline{\delta} = 2\,\mathrm{Im}\,\lambda \int_0^b |\varphi_\lambda(x)|^2\,dx.$$

Вычислим теперь

$$\overline{\gamma}\delta - \gamma\overline{\delta} = \lambda^2((\psi_\lambda, \psi)(\varphi_\lambda, \varphi) - (\psi_\lambda, \varphi)(\varphi_\lambda, \psi)) + \lambda((\psi_\lambda, \varphi) - (\varphi_\lambda, \psi)) + 1. \tag{24}$$

Из интегрального уравнения $(I + \lambda V)\,\psi_\lambda = \psi$ следует, что

$$\psi_\lambda(x) - \lambda\int_x^b V(x, s)\,\psi_\lambda(s)\,ds + \lambda(\psi_\lambda, \psi)\,\varphi(x) - \lambda(\psi_\lambda, \varphi)\,\psi(x) = \psi(x)$$

или

$$\psi_\lambda = (I - \lambda V^*)^{-1}(\psi - \lambda(\psi_\lambda, \psi)\,\varphi + \lambda(\psi_\lambda, \varphi)\,\psi).$$

Умножим скалярно обе части на φ. Учитывая, что $V(x, s) = -V(s, x)$, получаем

$$(\psi_\lambda, \varphi) = (\varphi_\lambda, \psi) - \lambda(\psi_\lambda, \psi)(\varphi_\lambda, \varphi) + \lambda(\psi_\lambda, \varphi)(\varphi_\lambda, \psi).$$

Подставим это значение во второе слагаемое (24). Получаем $|\gamma\bar{\delta}-\bar{\gamma}\delta|=1$. Таким образом, радиус круга $K(b)$ вычисляется по формуле

$$r_b = 1/2\,\mathrm{Im}\,\lambda \cdot \int\limits_0^b |\varphi_\lambda(x)|^2\,dx \quad (\mathrm{Im}\,\lambda > 0). \tag{25}$$

Формулы (22) и (25) обобщают известные формулы из теории операторов Штурма-Лиувилля.

Теорема 3. *Обобщенный оператор Штурма-Лиувилля $\overline{A_0^{-1}}$ есть самосопряженный оператор.*

Доказательство. Найдем $(A_0^{-1})^*$. Пусть функция $g\in H_0$ такая, что существует $g^*\in H_0$ и $(A_0^{-1}f,\ g)=(f,\ g^*)$ для любой функции $f\in \mathrm{D}(A_0^{-1})$. Это равносильно тому, что

$$(f_1,\ g)=(Af_1,\ g^*)$$

для любой функции $f_1\in H_0$.

Из последнего равенства после изменения порядка интегрирования следует, что существует такая постоянная c и функция f_2, ортогональная H_0, что

$$g(x)=c\varphi(x)-\int\limits_0^x V(x,\ s)\,g^*(s)\,ds+f_2(x).$$

Умножим обе части на произвольную функцию $\tilde{f}(x)$, $\tilde{A}\tilde{f}=0$ и проинтегрируем от 0 до $+\infty$. Тогда легко видеть, что $(f_2,\ \tilde{f})=0$. Так как функции $\tilde{f}(x)$ плотны в ортогональном дополнении к H_0, то отсюда следует, что $\tilde{f}_2=0$.

Таким образом, $g\in \mathrm{D}((A_0^{-1})^*)$ означает, что существует такая постоянная c и такая функция $g^*(x)\in H_0$, что

$$g(x)=c\varphi(x)-\int\limits_0^x V(x,\ s)\,g^*(s)\,ds.$$

При этом

$$(A_0^{-1})^*g=g^*.$$

Для доказательства самосопряженности A_0^{-1} достаточно убедиться, что уравнение

$$(A_0^{-1})^*g-\lambda g=0$$

имеет только нулевое решение при любом λ, $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$. Последнее означает, что уравнение

$$g^*(x)-\lambda\Big(c\varphi(x)-\int\limits_0^x V(x,\ s)\,g^*(s)\,ds\Big)=0 \tag{26}$$

ни при каком постоянном c не имеет решения $g^*(x) \in L^2(0, \infty)$. Если $g^*(x)$ удовлетворяет (9), то $g^*(x) = \lambda c \varphi_\lambda(x)$.

Покажем, что $\varphi_\lambda(x) \overline{\in} L^2(0, \infty)$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вещественны, то $\overline{\varphi_\lambda(x)} = \varphi_{\bar{\lambda}}(x)$ и, следовательно, дефектные числа оператора A_0^{-1} равны. Отсюда следует, что уравнение $(A_0^{-1})^* f - \lambda f = g$, т. е.

$$f^*(x) - \lambda \left(c\varphi(x) - \int_0^x V(x, s) f^*(s)\, ds\right) = g(x),$$

для любой функции $g(x) \in L^2(0, \infty)$ при некотором $c = c(g)$ имеет решение $f^*(x) \in L^2(0, \infty)$. Теперь, с учетом (7), получаем

$$f^*(x) = g(x) - \lambda \int_0^x (\varphi_\lambda(x) \psi_\lambda(s) - \varphi_\lambda(s) \psi_\lambda(x))\, g(s)\, ds + \lambda c \varphi_\lambda(x).$$

Пусть $g(x)$ — финитная функция. Тогда, начиная с некоторого места, будем иметь

$$f^*(x) = \lambda \left(c - \int_0^x g(x) \psi_\lambda(x)\, dx\right) \varphi_\lambda(x) + \lambda \psi_\lambda(x) \int_0^x g(x) \varphi_\lambda(x)\, dx. \qquad (27)$$

Предположим, что $\varphi_\lambda \in L^2(0, \infty)$. Выберем $g(x)$ так, чтобы

$$\int_0^\infty g(x) \varphi(x)\, dx \neq 0.$$

Тогда из (27) следует, что также $\psi_\lambda \in L^2(0, \infty)$. Нетрудно показать, что если φ_λ, $\psi_\lambda \in L^2(0, \infty)$, то вольтерров оператор V_λ, порожденный ядром $V_\lambda(x, s)$ в $L^2(0, \infty)$, будет вполне непрерывным оператором (даже класса Гильберта—Шмидта). Так как очевидно, что оператор $I - \lambda V_\lambda$ не обращается в нуль ни на какой функции, то

$$(I - \lambda V_\lambda)^{-1} = I + \lambda V$$

будет ограниченным оператором в $L^2(0, \infty)$. Следовательно

$$\varphi = (I - \lambda V_\lambda)^{-1} \varphi_\lambda \in L^2(0, \infty), \quad \psi = (I - \lambda V_\lambda)^{-1} \psi_\lambda \in L^2(0, \infty),$$

что противоречит условию (3). Теорема 3 доказана.

Лемма 1. *Для любого* λ, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ *существует число* $m(\lambda)$, *притом единственное, такое, что*

$$\psi_\lambda(x) + m(\lambda) \varphi_\lambda(x) \in L^2(0, \infty) \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \qquad (28)$$

Доказательство. Как мы уже видели, $\varphi_\lambda \in L^2(0, \infty)$ при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Следовательно, из (25) следует, что $r_b(\lambda) \to 0$ при $b \to \infty$. Тогда из (23) заключаем, что последовательность функций $m_b(\lambda, \tau)$ фундаментальна при $b \to \infty$. Таким образом, существует предел

$$\lim_{b \to \infty} m_b(\lambda, \tau) = m(\lambda). \qquad (29)$$

Так как $m_b(\lambda, \tau) \in K_{b_1}(\lambda)$ при $b > b_1$, то $m(\lambda) \in K_{b_1}$ при любом b_1. Если учесть также, что $r_b(\lambda) \to 0$ при $b \to \infty$, то получим

$$\int_0^\infty |\psi_\lambda(x) + m\varphi_\lambda(x)|^2\, dx = \frac{\operatorname{Im} m}{\operatorname{Im} \lambda} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0).$$

Теорема 4. *Ядро $R(x, s, \lambda)$ резольвенты обобщенного оператора Штурма—Лиувилля A_0^{-1} при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ задается формулой*

$$R(x, s, \lambda) = \begin{cases} \varphi(x, \lambda)(\psi(s, \lambda) + m(\lambda)\varphi(s, \lambda)), & x \leqslant s \\ \varphi(s, \lambda)(\psi(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi(x, \lambda)), & x > s. \end{cases} \tag{30}$$

При этом спектральная функция $\sigma(\lambda)$ оператора A (или A_0^{-1}) связана с функцией $m(\lambda)$ формулой

$$m(\lambda) = \alpha + \beta\lambda + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\sigma(t), \tag{31}$$

где $\beta \geqslant 0$, α вещественно.

Доказательство. Мы должны доказать, что

$$(A_0^{-1} - \lambda I)^{-1} g = R_\lambda g, \quad (R_\lambda g)(x) = \int_0^\infty R_\lambda(x, s) g(s)\, ds \tag{32}$$

для любой финитной функции $g(x) \in H_0$.

Сначала предположим, что $g(x) \in H_0$ — финитная функция с носителем $(0, b)$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty g(s)\varphi_\lambda(s)\, ds = 0. \tag{33}$$

Тогда, как мы уже видели в § 1, для таких g определен $(I - \lambda A_0)_0^{-1}$ и

$$(I - \lambda A_0)^{-1} g = (I - \lambda V_1)^{-1} g.$$

Отсюда нетрудно получить, что (32) справедливо для g, удовлетворяющих (33). Пусть теперь $g(x)$ — любая финитная функция. Так как $\varphi_\lambda \overline{\in} L^2(0, \infty)$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то множество финитных функций, удовлетворяющих (33), плотно в $L^2(0, \infty)$. Следовательно, найдется последовательность таких функций $g_n(x)$, стремящаяся в $L^2(0, \infty)$ к $g(x)$. Имеем

$$(A_0^{-1} - \lambda I)^{-1} g_n = R_\lambda g_n.$$

Так как $(A_0^{-1} - \lambda I)^{-1}$ — ограниченный оператор, то

$$(A_0^{-1} - \lambda I)^{-1} g_n \to \overline{(A_0^{-1} - \lambda I)}^{-1} g.$$

С другой стороны, поскольку $\psi_\lambda(x) + m(\lambda)\varphi_\lambda(x) \in L^2(0, \infty)$, то $R_\lambda g_n(x) \to R_\lambda g(x)$ поточечно. Отсюда следует, что (32) имеет место для любой финитной функции. Формула (30) доказана.

Соотношение (31), а следовательно, и теорему 2 можно получить из (30) обычным путем (см. [6], Дополнение II).

§ 3. Критерий неотрицательности и оценка спектральной функции

Лемма 2. *Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны, $\varphi(0)\neq 0$ и оператор $A(b)$, $b\leqslant\infty$ неотрицателен, то его спектральная функция $\sigma_b(\lambda)$ удовлетворяет оценке*

$$\int_1^\infty \frac{d\sigma_b(\lambda)}{\lambda}<\infty.$$

Доказательство. Из неотрицательности $A(b)$ следует, что его фредгольмова резольвента $A(b)\,(I-\lambda A(b))^{-1}$ неотрицательна при $\lambda<0$. Его ядро выражается формулой (18) при некоторой $m(\lambda)$. Следовательно

$$\varphi_\lambda(0)\,(\psi_\lambda(0)+m(\lambda)\,\varphi_\lambda(0))\geqslant 0 \text{ при } \lambda<0.$$

Отсюда следует, что

$$m(\lambda)>-\frac{\psi_\lambda(0)}{\varphi_\lambda(0)}=-\frac{\psi(0)}{\varphi(0)}.$$

Таким образом, $m(\lambda)+\psi(0)/\varphi(0)$ есть S-функция (см. [6], Дополнение I) и, следовательно, существует такое $\alpha>0$, что

$$m(\lambda)=\alpha+\int_0^\infty\frac{d\sigma_b(t)}{t-\lambda},\quad \lambda\overline{\in}(0,\infty).$$

Приведем следующий критерий неотрицательности однопарного оператора в конечном интервале.

Теорема. *Для того, чтобы однопарный оператор $A(b)$ с непрерывными функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ был неотрицательным, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

1) $\varphi(x)\psi(x)\geqslant 0$ *при* $0\leqslant x\leqslant b$;

2) *на множестве* $\{x:\varphi(x)\psi(x)\neq 0\}$ *отношение* $\varphi(x)/\psi(x)$ *не убывает.*

Эта теорема в случае $\varphi(x)\,\psi(x)\neq 0$ (как признак осцилляционности однопарного ядра) установлена в монографии [1], стр. 260. Доказательство общего случая отличается лишь некоторыми несущественными подробностями и поэтому мы его опускаем. Заметим, что из условий 1) и 2) следует, что либо нули функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ совпадают, либо из $\varphi(x_0)=0$, $\psi(x_0)\neq 0$ или $\varphi(x_0)\neq 0$, $\psi(x_0)=0$ следует, что $\varphi(x_0)=0$ при $x\in[0,x_0]$ или, соответственно, $\psi(x)=0$ при $x\in[x_0,b]$.

Теперь установим признак неотрицательности более узкого оператора $A_0(b)$, а именно однопарного оператора $A(b)$, определенного только на тех функциях $f\in L^2(0,b)$, которые ортогональны $\varphi(x)$:

$$\int_0^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Теорема 5. *Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные функции на $[0, b]$ и интервал вида $[\alpha, b]$ не является исключительным. Для того, чтобы оператор $A_0(b)$ был неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы отношение $\psi(x)/\varphi(x)$ не возрастало на множестве $\{x : \varphi(x) \neq 0\}$.*

Доказательство. Необходиомсть. Пусть $A_0(b) \geqslant 0$. Оператор $A(b)|_{H_0(b)}$, где $H_0(b)$, по аналогии с H_0, есть замыкание области значений $A_0(b)$, имеет обратный и $B = (A_0(b)|_{H_0(b)})^{-1} > 0$. Этот оператор определен на плотном в $H_0(b)$ множестве и, следовательно, по теореме Фридрихса, имеет неотрицательное расширение (возможно, только одно) $\bar{B}$. Резольвенты всех самосопряженных расширений оператора B описываются формулой (18). Эта формула, очевидно, сохраняется и при $\lambda < 0$. Следовательно, существует такая функция $m(\lambda)$, что ядро $B_\lambda(x, s)$ резольвенты $(\bar{B} - \lambda I)^{-1}$ будет иметь вид

$$B_\lambda(x, s) = \begin{cases} \varphi_\lambda(x)(\psi_\lambda(s) + m(\lambda)\varphi_\lambda(s)), & (x \leqslant s < b) \\ \varphi_\lambda(s)(\psi_\lambda(x) + m(\lambda)\varphi_\lambda(x)), & (s \leqslant x < b) \end{cases} \quad \lambda < 0.$$

Этот оператор определен в $H_0(b)$. Расширим его на все пространство $\mathbf{L}^2(0, b)$ по формуле

$$B_\lambda f(x) = \int_0^b B_\lambda(x, s) f(s)\,ds.$$

Легко видеть, что если (α, β) — исключительный интервал для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то он будет таким и для $\varphi_\lambda(x)$ и $\psi_\lambda(x)$. Более того, как легко видеть, $\varphi_\lambda(x)$ и $\psi_\lambda(x)$ будут линейными комбинациями на (α, β) функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Следовательно, из теоремы 1 вытекает, что $K(A) = \mathbf{L}^2(0, b) \ominus H_0(b)$ будет ядром оператора B_λ, т. е. $B_\lambda K(A) = 0$. Отсюда следует, что однопарный оператор B_λ неотрицателен и согласно предыдущей теореме отношение $(\psi_\lambda(x) + m(\lambda)\varphi_\lambda(x))/\varphi_\lambda(x)$ неотрицательно и не возрастает на множестве $\{x : \varphi_\lambda(x)(\psi_\lambda(x) + m(\lambda)\varphi_\lambda(x)) \neq 0\} = \{x : \varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(x) \neq 0\}$. Значит, будет невозрастающим и отношение $\psi_\lambda(x)/\varphi_\lambda(x)$. После предельного перехода при $\lambda \to 0$ получаем, что на множестве $\{x : \varphi(x) \neq 0\}$ отношение $\varphi(x)/\psi(x)$ не возрастает.

Достаточность. Для любого β, $\beta < b$ существует такое число t, что

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \geqslant t \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \beta, \ \varphi(x) \neq 0.$$

Отсюда, с учетом предыдущей теоремы, следует, что оператор $A(\beta)$ с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x) + t\varphi(x)$ неотрицателен и, следовательно, неотрицателен также более узкий оператор $A_0(\beta)$. Так как β любое, то будет неотрицательным и $A_0(\beta)$.

Отметим, что если

$$\lim_{x\to b}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=-\infty,$$

то в этом и только этом случае ограниченный неотрицательный оператор $A_0(b)$ не имеет неотрицательного расширения в $L^2(0, b)$. Это как раз тот случай, когда оператор $\bar{B}$ не имеет обратного. Заметим также, что достаточность теоремы справедлива и в том случае, когда интервал вида (β, b) есть исключительный. В этом случае $A(b)f(x)=0$ при $\beta\leq x<b$ и надо рассматривать $L^2(0, \beta)$.

Теорема 6. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в некотором интервале* $[0, \delta]$, $\delta>0$, $\varphi(0)\neq 0$ *и отношение* $\psi(x)/\varphi(x)$ *на этом интервале монотонно. Тогда спектральная функция* $\sigma(\lambda)$ *оператора* A *удовлетворяет неравенству*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{1+|\lambda|}<\infty.$$

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 3. *Если $\varphi(b)$ и $\psi(b)$ одновременно не равны 0, то нули целой функции $\varphi_\lambda(b)$ вещественны.*

Доказательство. Покажем, что множество корней $\varphi_\lambda(b)=0$ совпадает со спектром некоторого самосопряженного оператора. Имеем

$$\varphi_\lambda(b)=(1-\lambda\int_0^b\varphi(x)\,\varphi_\lambda(x)\,dx)\,\varphi(b)+\lambda\psi(b)\int_0^b\varphi(x)\,\varphi_\lambda(x)\,dx.$$

Пусть $\varphi(b)\neq 0$. Возьмем то самосопряженное расширение оператора $A_0(b)$, ядро резольвенты которого получается при $\tau=-\psi(b)/\varphi(b)$ в формулах (18) и (19). Тогда знаменатель в (19) будет равняться $\varphi_\lambda(b)/\psi_\lambda(b)$. Отсюда следует, что нули $\varphi_\lambda(b)$ совпадают с полюсами мероморфной функции $m_b(\lambda, \tau)$. Последние, очевидно, совпадают со спектром этого расширения и поэтому вещественны.

Если же $\varphi(b)=0$, $\psi(b)\neq 0$, то в (19) возьмем $\tau=\infty$, т. е. в (18) положим

$$m_b(\lambda)=-(1+\lambda\int_0^{\infty}\varphi(x)\,\varphi_\lambda(x)\,dx)\Big/(\lambda\int_0^b\varphi(x)\,\varphi_\lambda(x)\,dx).$$

Тогда (18) дает резольвенту того самосопряженного расширения оператора $A_0^{-1}|_{H_0}$, спектр которого совпадает с нулями

$$\lambda\int_0^b\varphi_\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx=\frac{\varphi_\lambda(b)}{\psi(b)}.$$

Заметим, что в обоих случаях $m_b(\lambda)=-\psi_\lambda(b)/\varphi_\lambda(b)$.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 6.

Для определенности предположим, что $\psi(x)/\varphi(x)$ не возрастает. Возьмем t таким, чтобы

$$\varphi(x)(\psi(x)+t\varphi(x))>0 \text{ при } x\in[0,\ \delta].$$

Отсюда, учитывая, что при замене $\psi(x)$ на $\psi(x)+t\varphi(x)$, где t любое вещественное число, опаратор A не меняется, без ограничения общности, можно считать, что $\varphi(x)\psi(x)>0$ при $x\in[0,\ \delta]$. Так как по условию $\psi(x)/\varphi(x)$ не возрастает, то, согласно теореме 5, оператор $A(\delta)$ будет неотрицательным. Следовательно, из леммы 2 следует, что

$$m_\delta(\lambda)=\alpha+\int_0^\infty\frac{d\sigma_\delta(t)}{t-\lambda},\quad \lambda\overline{\in}[0,\ \infty). \tag{34}$$

Так как $m(\lambda)\in K_\delta(\lambda)$, где $m(\lambda)$ определяется по формулам (30) и (31), то из (25) имеем, что

$$|m_\delta(\lambda)-m(\lambda)|\leqslant 1/(\operatorname{Im}\lambda\int_0^\delta|\varphi(x,\ \lambda)|^2\,dx),\quad \operatorname{Im}\lambda>0. \tag{35}$$

Оценим правую часть (35). Покажем, что $\varphi_\lambda(x)$ при каждом фиксированном x есть целая функция не более половинного порядка. Из (8) имеем

$$\varphi_\lambda(x)=\varphi(x)-\lambda\int_0^x V(x,\ s)\varphi(s)\,ds+\cdots+$$

$$+(-1)^n\lambda^n\int_0^x V_n(x,\ s)\varphi(s)\,ds+\cdots, \tag{36}$$

где

$$V_n(x,\ s)=\int\limits_{s<s_{n-1}<\cdots<s_1<x}\int V(x,\ s_1)\,V(s_1,\ s_2)\cdots V(s_{n-1},\ s)\,ds_1\cdots ds_{n-1}. \tag{37}$$

Подынтегральное выражение перепишем в виде

$$\varphi(x)\psi(s_1)\left(\frac{\psi(s_1)}{\varphi(s_1)}-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right)\cdots\varphi(s_{n-1})\varphi(s)\left(\frac{\psi(s)}{\varphi(s)}-\frac{\psi(s_{n-1})}{\varphi(s_{n-1})}\right).$$

По условию все скобки неотрицательны. Пусть $|\varphi(x)|\leqslant M$, $|\psi(x)|\leqslant M$ при $x\in[0,\ \delta]$. Тогда учитывая, что среднее геометрическое не больше среднего арифметического, получаем, что подынтегральное выражение в (37) не превосходит

$$\left(\frac{M^2}{n}\right)^n\left(\frac{\psi(s)}{\varphi(s)}-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right)\leqslant\left(\frac{M^2}{n}\right)^n\frac{\psi(0)}{\varphi(0)}.$$

Из этого неравенства и из (36) после несложных выкладок получаем, что

$$|\varphi_\lambda(x)|\leqslant\operatorname{ch}\sqrt{2|\lambda|M^2x\frac{\psi(0)}{\psi(0)}},$$

т. е. порядок $\varphi_\lambda(x)$ не превосходит 1/2.

Отсюда, с учетом того, что $\varphi_0(x) = \varphi(x) \neq 0$, получаем

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi(x) \prod_j (1 - \lambda/\lambda_j(x)) \quad (0 \leqslant x \leqslant \delta). \tag{38}$$

Согласно лемме, нули $\lambda_j(x)$ функции $\varphi_\lambda(x)$ вещественны. Следовательно, из (38) следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|\varphi_{i\eta}(x)| \geqslant |\varphi(x)| > \varepsilon, \quad \eta > 0, \quad x \in [0, \delta].$$

Тогда из (35) следует, что

$$m_\delta(i\eta) - m(i\eta) = O\left(\frac{1}{\eta}\right) \text{ при } \eta \to \infty$$

и, тем более

$$\operatorname{Im} m_\delta(i\eta) - \operatorname{Im} m(i\eta) = O\left(\frac{1}{\eta}\right) \text{ при } \eta \to \infty. \tag{39}$$

Как известно (см. [6], теорема Д 1.3.1), если $f(z)$, отображающая верхнюю полуплоскость в себя,— аналитическая функция, то для того, чтобы она имела представление

$$f(z) = \gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(i\eta)}{\eta} d\eta < \infty. \tag{40}$$

Так как $m_\delta(\lambda)$ имеет представление (34), то $m_\delta(i\eta)$ удовлетворяет (40). Тогда из (39) следует, что $m(i\eta)$ также удовлетворяет (40) и, следовательно, $m(\lambda)$ имеет представление

$$m(\lambda) = \gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - \lambda} \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0),$$

что и требовалось доказать.

Автор выражает благодарность М. Г. Крейну за обсуждения и советы.

Армянский сельскохозяйственный
институт

Поступила 3.III. 1986

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ. Միագույգ կորիզով ինտեգրալ օպերատորների սպեկտրալ տեսության մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է ինտեգրալ օպերատորների մի դաս $L^2(0, \infty)$ տարածության մեջ, որոնց հակադարձ օպերատորները կարելի է դիտել որպես Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորների ընդհանրացում։ Այդպիսի օպերատորների համար կառուցվում է Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորների համար գոյություն ունեցող սպեկտրալ տեսությանը անալոգ տեսություն։

V. A. YAVRIAN. *On spectral theory of one-paired integral operators* (summary)

In the paper the classical spectral theory of the Sturm—Liouville operators is extended to some integral operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
2. L. *de Branges.* Some Hilbert spaces of entire functions IV, Trans. Amer. Math Soc., 105, 1962, 43—83.
3. *М. Г. Крейн.* Про ермітові оператори з напрямними функціоналами, Сб. трудов Ин-та математики АН УССР, т. 10, 1948, 83—106.
4. *М. Г. Крейн.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения, ДАН СССР, 53, № 1, 1946, 3—6.
5. *М. Г. Крейн.* О неопределенном случае краевой задачи Штурма-Лиувилля в интервале (0, ∞), Изв. АН СССР, сер. матем., 16, 1952, 293—324.
6. *Ф. Аткинсон.* Дискретные и непрерывные граничные задачи, Изд. «Мир», М., 1968.