ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXII, № 1, 1987 Математика

УДК 517.53

А. А. НЕРСЕСЯН

О ФУНКЦИЯХ, АППРОКСИМИРУЕМЫХ НА ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1°. **Введение.** Пусть E — замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $A(E)$ — класс всех функций $f: E \to \mathbf{C}$, непрерывных на E и аналитических на E° (E° — множество внутренних точек E; если $E^\circ = \varnothing$, то $A(E) = C(E)$); $I(E)$ — подкласс $A(E)$, состоящий из функций f, допускающих равномерную аппроксимацию на E посредством целых функций (другими словами, $f \in I(E)$, если существует последовательность целых функций, равномерно сходящаяся на E к f).

Хорошо известна следующая

Теорема А. (Н. У. Аракелян [1], [2]). *Для того, чтобы любая функция $f \in A(E)$ допускала равномерную аппроксимацию на E целыми функциями (т. е. чтобы имело место соотношение $I(E) = A(E)$), необходимо и достаточно, чтобы множество $E^c = \mathbf{C} \setminus E$ было связно и локально связно.*

Условие на множество E, фигурирующее в этой теореме, принято называть условием $\mathbf{K}$ (а множество — $\mathbf{K}$-множеством). Это условие восходит к работам А. Рот [3] и М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [4], посвященным задачам аппроксимации целыми функциями на неограниченных замкнутых множествах; по этому поводу см. также обзор С. Н. Мергеляна [5]. Отметим, что требование локальной связности относится, по существу, только к точке $z = \infty$ ($\in E^c$).

В обзоре [2] Н. У. Аракелян поставил задачу о характеризации функций $f \in I(E)$ в том случае, когда E не является $\mathbf{K}$-множеством. Там же он отметил, что аппроксимируемые функции аналитически продолжаются на те компоненты множества $\mathbf{C} \setminus E$, для которых бесконечно удаленная точка не является линейно достижимой. Этой задаче посвящены, в частности, интересные работы А. Страя [6], [7].

В этой работе мы выделим достаточно широкий класс множеств E (не удовлетворяющих условию $\mathbf{K}$), для которых функции $f \in I(E)$ могут быть охарактеризованы в терминах, связанных с полиномиальной аппроксимацией на компактах. Соответствующая теорема (теорема 2 ниже) несколько проясняет характер рассматриваемой задачи.

2°. **Обозначения. Формулировки теорем.** Всюду в дальнейшем мы рассматриваем множества E, удовлетворяющие следующим условиям: (i) $E^\circ = \varnothing$: (ii) E^c является линейно связным множеством (последнее условие связано с упомянутым замечанием Н. У. Аракеляна).

Примем обозначения: $B_r = \{z : |z| \leqslant r\}$, $E_r = E \cup B_r$, F_r — замыкание объединения компонент множества $\mathbf{C} \setminus E_r$, для которых бесконечно удаленная точка не является линейно достижимой. Отметим, что для рассматриваемых множеств E условие $\mathbf{K}$ эквивалентно требованию ограниченности множеств F_r при всех $r > 0$.

Пусть $\mathbf{E}_1$ обозначает класс множеств E, удовлетворяющих кроме (*i*), (*ii*) еще и следующему условию (*iii*): При любом $r > 0$ все компоненты дополнения к E_r, для которых бесконечно удаленная точка не является линейно достижимой, ограничены.

Теорема 1. *Пусть $E \in \mathbf{E}_1$ и $f \in C(E)$. Если при любом $r > 0$ функция f аппроксимируема на $F_r \cap E$ с любой точностью функциями из $A(F_r)$, то $f \in I(E)$.*

Эта теорема существенно упрощает анализ рассматриваемой задачи.

Для формулировки следующего утверждения нам понадобится еще ряд обозначений.

Обозначим через $\mathbf{E}_2$ класс множеств E, удовлетворяющих условиям (*i*), (*ii*), а также следующему условию (*iv*): При любом $r > 0$ каждая компонента множества F_r^0 ограничена.

Пусть $G_r(n)$, $n = 1, 2, \cdots$ — компоненты F_r^0 (перенумерованные произвольным образом) и для любого $\rho > r$,

$$E_{r,\rho}(n) = E_\rho \cap \overline{(G_r(n))}.$$

Для компакта $K \subset \mathbf{C}$ и функции $f \in C(K)$ положим

$$\alpha(f;\ K) = \inf\{\|f - p\|_K;\ p \in \mathbf{P}\},$$

где $\mathbf{P}$ — множество всех полиномов от z, $\|\cdot\|_K$ — sup-норма на K. По теореме Мергеляна, величина $\alpha(f;\ K)$ не изменяется, если inf в ее определении взять по всем функциям $p \in A(\hat{K})$, где $\hat{K}$ — полиномиальная оболочка компакта K.

Ниже нам будет удобно считать, что функция $f \in C(E)$ определена и непрерывна на всей плоскости $\mathbf{C}$; это относится, в частности, к формулировке теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть $E \in \mathbf{E}_2$ и $f \in C(E)$. Для того, чтобы $f \in I(E)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $r > 0$ и $\rho \geqslant r$ (таких, что $E_{r,\rho}(n)$ — бесконечная последовательность) имело место соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(f;\ E_{r,\rho}(n)) = 0. \tag{1}$$

Доказательство теоремы 2 и построение приводимого ниже примера получены совместно с А. А. Гончаром.

3°. Пример. Характерный пример множества, не являющегося $\mathbf{K}$-множеством — это график функции $y = s(x) = (1/x)\sin(\pi/x)$; $x \neq 0$, вместе с предельной прямой $i\mathbf{R}$: $\{x = 0\}$ $(z = x + iy)$. Другой пример — часть этого множества, лежащая в первом квадранте $x \geqslant 0$; $y > 0$ (последнее множество обозначим через E^+).

А. Страй [6] построил пример множества E и функции $f \in C(E)$ таких, что f и $1/f$ ограничены на E, $f \in I(E)$, но $1/f \overline{\in} I(E)$. Чтобы проиллюстрировать применение теоремы 2 в простейшей ситуации, построим функцию $f \in C(E^+)$ такую, что $|f| = 1$ на E^+, $f \in I(E^+)$, но $1/f \overline{\in} I(E^+)$.

Пусть D_n — область, ограниченная графиком функции $y=s(x)$; $x\in\Delta_n=[1/(2n+1);\ 1/2n]$, и отрезком Δ_n; a_n — середина Δ_n, z_n — середина отрезка $D_n\cap\{y=n\}$; $f_n:\overline{D}_n\to B_1$—гомеоморфизм, конформный в D_n, $f_n(z_n)=0$, $f_n(a_n)=1$. Нетрудно убедиться в том, что функция $\tilde{f}$, равная f_n на $\overline{D}_n$, $n=1, 2,\cdots$, и единице на $i\mathrm{R}^+$, принадлежит $A(\tilde{E})$, где $\tilde{E}$ — объединение всех $\overline{D}_n$ и $i\mathrm{R}^+$. Множество $\tilde{E}$ удовлетворяет условию K; по теореме А $\tilde{f}\in I(\tilde{E})$ и, тем самым, $f=\tilde{f}|_{E^+}\in I(E^+)$ (в этом случае $\alpha(f;\ E^+_{r,\rho}(n))=0$). Для доказательства $1/f\in I(E^+)$, нам понадобится следующая простая

Лемма 1. *Пусть D — ограниченная односвязная жорданова область и $z_0\in D$. Тогда*

$$\frac{1}{4d_0}\leqslant\alpha\left(\frac{1}{z-z_0};\ \partial D\right)\leqslant\frac{1}{d_0},$$

где $d_0=\operatorname{dist}(z_0;\ \partial D)$.

Доказательство. Верхняя оценка очевидна; перейдем к доказательству нижней.

Пусть φ — конформное отображение круга B_1^0 на область D, $\varphi(0)=z_0$. Имеем

$$\frac{1}{z-z_0}=\frac{1}{\varphi(\zeta)-\varphi(0)}=\frac{1}{\varphi'(0)\zeta}+\psi(\zeta);\ \psi\in A(B_1).$$

Тем самым

$$\alpha\left(\frac{1}{z-z_0};\ \partial D\right)=\alpha\left(\frac{1}{\varphi'(0)\zeta};\ \partial B_1\right)=\frac{1}{|\varphi'(0)|}.$$

Неравенство $|\varphi'(0)|\leqslant 4d_0$ следует из теоремы Кебе „об 1/4".

Вернемся к примеру. Полагая $\gamma_n=E^+_{1,1}(n)$, с помощью леммы 1 получаем

$$\alpha\left(\frac{1}{f};\ \gamma_n\right)=\alpha\left(\frac{1}{f'(z_n)(z-z_n)};\ \gamma_n\right)>\frac{1}{4d_n|f'(z_n)|}\geqslant\frac{1}{4}$$

($d_n=\operatorname{dist}(z_n;\ \gamma_n)$). По теореме 2 $1/f\overline{\in}I(E^+)$.

Можно построить пример, показывающий, что в условии (1) теоремы 2 нельзя ограничиться каким-либо фиксированным $\rho\geqslant r$. Существенно также и условие (*iv*) теоремы 2.

4°. Замечания. 1. В силу свойства (*ii*) множеств класса $\mathbf{E}_1$ дополнение в $\mathbf{C}$ к множеству $E_r\cup F$ линейно связно при любом $r>0$.

2. $\mathbf{E}_2\subset\mathbf{E}_1$.

3. При данном $r>0$ замыкания не более чем трех компонент $G_r(n)$ могут иметь общую точку. В самом деле, пусть $\alpha_i\beta_i$, $i=1, 2, 3, 4$, $\beta_i=\alpha_{i+1}$, $i=1, 2, 3$ — основания на $\{|z|=r\}$ четырех компонент $G_r(n)$. Согласно замечанию 1 в произвольной окрестности каждой из точек α_i, β_i существуют точки дополнения $E_r\cup F_r$, линейно соедини

мые вне $E, \cup F$, с бесконечно удаленной точкой. Если допустить, что замыкания компонент с основаниями $\widetilde{\alpha_1\beta_1}$ и $\widetilde{\alpha_4\beta_4}$ имеют общую точку, то точка $\beta_2 = \alpha_3$ принадлежит замыканиям упомянутых компонент, что приводит к существованию окрестностей точек $\beta_1 = \alpha_2$ и $\beta_3 = \alpha_4$, сплошь состоящих из точек, линейно несоединимых с бесконечностью.

В доказательстве теоремы 2 мы воспользуемся следующим утверждением работы [8].

Лемма 2. *Пусть компакт $F \subset \mathbf{C}$ имеет связное дополнение $G \subset F$, $\partial G \subset \partial F$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует полином π, удовлетворяющий условиям:*

a) $\|1 - \pi\|_{F \setminus (G)_\delta} < \delta$;

b) $\|\pi\|_{G \setminus (F \setminus (G))_\delta} < \delta$; c) $\|\pi\|_F < c$,

где $(e)_\delta$ — δ-окрестность множества e и $c \geqslant 1$ — абсолютная константа.

5°. Доказательство теоремы 1. Считаем, что множества F_n неограничены при всех $n \geqslant 1$. Существуют функции $q_n \in A(F_n)$ такие, что

$$\|f - q_n\|_{F_n \cap E} < \frac{\varepsilon}{2^n}; \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Для любого $n \geqslant 1$, непрерывно продолжая функцию q_n с множества F_n на $(B_n \cap E) \cup F_n$ надлежащим образом, построим функцию класса $A\{(B_n \cap E) \cup F_n)$ (также обозначаемую через q_n) такую, что

$$\|f - q_n\|_{(B_n \cup F_n) \cap E} < \frac{\varepsilon}{2^n}; \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

Легко установить, что множество $(B_n \cap E) \cup F_n$ удовлетворяет условиям теоремы автора о мероморфной аппроксимации [9]. Согласно этой теореме существуют мероморфные функции $\tilde{q}_n$ такие, что

$$\|q_n - \tilde{q}_n\|_{(B_n \cap E) \cup F_n} < \frac{\varepsilon}{2^n}; \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Отсюда, с учетом (2) получаем

$$\|f - \tilde{q}_n\|_{(B_n \cup F_n) \cap E} < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

При этом, сдвинув конечное число полюсов функций $\tilde{q}_n$, можем считать, что они не имеют полюсов на $B_n \cup F_n$.

Существует лишь конечное число компонент множестваа $F_n \setminus E$, на пересечении которых с окружностью $\{|z| = n + 1\}$ колебание $\tilde{q}_n$ или $\tilde{q}_{n+1}$ не меньше $\varepsilon/2^{n-1}$. Согласно свойству (*iii*) множеств класса $\mathbf{E}_1$, эти компоненты в совокупности ограничены. Поэтому, с учетом (3) и принципа максимума модуля, можно найти последовательность чисел $\{R_n\}_1^\infty$ таких, что $R_1 \geqslant 2$, $R_{n+1} > 2R_n$ и

$$\|\tilde{q}_n - \tilde{q}_{n+1}\|_{F_n \cap A_{R_n R_{n+1}}} < \frac{\varepsilon}{2^{n-3}}; \; n = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

$(A_{R_n R_{n+1}} = B_{R_{n+1}} \setminus B^0_{R_n})$.

Изменив (при необходимости) значения функций $\tilde{q}_n$ на $(E \cap A_{R_n R_{n+1}}) \setminus F_n$ надлежащим образом и аппроксимируя на множестве $B_{R_{n+1}} \cap (E_n \cup F_n)$ (имеющем связное дополнение согласно замечанию 1), получим полиномы λ_n, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &\text{i)} \; \|f - \lambda_n\|_{B_{R_{n+1}} \cap E} < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}; \; n = 1, 2, \cdots; \\ &\text{ii)} \; \|\lambda_n - \lambda_{n+1}\|_{(F_n \cup E) \cap A_{R_n R_{n+1}}} < \frac{\varepsilon}{2^{n-3}}; \; n = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{5}$$

Из известной леммы слияния А. Рот [10], с учетом неравенства $2R_n < R_{n+1}$, легко следует существование абсолютной константы $a \geq 1$ и рациональных функций μ_n, удовлетворяющих следующим оценкам:

$$\begin{aligned} &\text{i)} \; \|\lambda_n - \mu_n\|_{B_{R_{n+1}} \cap (E_n \cup F_n)} < \frac{a\varepsilon}{2^{n-3}}; \; n = 1, 2, \cdots; \\ &\text{ii)} \; \|\lambda_{n+1} - \mu_n\|_{(F_n \cup E \cup \overline{B}^c_{R_{n+1}}) \setminus B^0_{R_n}} < \frac{a\varepsilon}{2^{n-3}}; \; n = 1, 2, \cdots; \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$h = \lambda_1 + \sum_{m=1}^{\infty} (\mu_m - \lambda_m). \tag{7}$$

Согласно (6i), h является мероморфной функцией, причем n-ое слагаемое ряда (7) имеет конечное число полюсов, лежащих в $A_{R_n R_{n+1}} \setminus (E \cup F_n)$, По построению F_n каждый из этих полюсов может быть соединен с бесконечно удаленной точкой жордановым путем, лежащим вне $E_n \cup F_n$. Удалив из плоскости $\mathbf{C}$ указанные пути - вместе с надлежащими открытыми окрестностьями, не пересекающими множества $E_n \cup F_n$, для всех $n \geq 1$, в результате получим множество $\tilde{E}$, $E \subset \tilde{E}$, удовлетворяющее условию K, причем $h \in A(\tilde{E})$- С помощью теоремы A, примененной к $\tilde{E}$ и h, получим целую функцию H такую, что

$$\|h - H\|_{\tilde{E}} < \varepsilon. \tag{8}$$

Для произвольной точки $z \in E$ найдем число $n \geq 0$ такое, что $z \in A_{R_n R_{n+1}} \cap E$ (считаем, что $R_0 = 0$ и $A_{0R_1} = B_{R_1}$).

При $n = 0$, 1 имеем согласно (5i), (6i) и (8):

$$|f(z) - H(z)| \leq |f(z) - h(z)| + \varepsilon \leq |f(z) - \lambda_1(z)| +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\mu_m(z) - \lambda_m(z)| + \varepsilon \leq 3\varepsilon + a\varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-3}} \leq 11\, a\varepsilon.$$

Если же $n > 1$, то

$$|f(z) - H(z)| \leqslant |f(z) - h(z)| + \varepsilon \leqslant \sum_{m=1}^{n-1} |\mu_m(z) - \lambda_{m+1}(z)| +$$
$$+ |f(z) - \lambda_n(z)| + \sum_{m=n}^{\infty} |\mu_m(z) - \lambda_m(z)| + \varepsilon \leqslant 10\, a\varepsilon,$$

согласно (5i), (6) и (8). Теорема 1 доказана.

6°. Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, $r > 0$ и $\rho \geqslant r$ фиксированы, и целая функция g удовлетворяет неравенству

$$\|f - g\|_E < \varepsilon. \tag{9}$$

Обозначим через E_∞ подмножество точек E, являющихся предельными для последовательностей, содержащих не более одной точки в каждой компоненте $G_r(n)$, $n = 1, 2, \cdots$. Множество E_∞ замкнуто, и, так как функция $f - g$ непрерывна на C, то существует окрестность V множества E_∞, на которой выполняется неравенство

$$|f - g| < 2\varepsilon.$$

По определению E_∞ существует такое число N, что $n > N$, $B_\rho \cap \overline{(G_r(n))} \subset V$. Поэтому будем иметь из (9), (10) и определения $E_{r,\rho}(n)$,

$$\|f - g\|_{E_{r,\rho}(n)} < 2\varepsilon \tag{10}$$

при $n > N$, что эквивалентно $\alpha(f;\ E_{r,\rho}(n)) < 2\varepsilon$ при $n > N$.

Достаточность. Согласно теореме 1 и замечанию 2, достаточно проверить, что при произвольном фиксированном $r > 0$ функция f аппроксимируема на $F_r \cap E$ с любой точностью функциями класса $A(F_r)$.

Введем обозначение $E_{n,k} = E_{r,r+k}(n)$; $n, k = 1, 2, \cdots$.

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$, и пусть N_1— наименьшее число, для которого $\alpha(f;\ E_{n,1}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant N_1$.

Рассмотрим все компоненты $G_n = G_r(n)$, $n \geqslant N_1$, для которых либо

а) $\alpha(f; E_{n,2}) \geqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$, либо

б) $\overline{G}_n \cap \overline{G}_m \neq \varnothing$ при каком-нибудь m, удовлетворяющем а).

Согласно (1) и замечанию 3, число компонент G_n, удовлетворяющих а) или б) конечно. Если таких компонент нет, то примем $N_2 = N_1$. В противном случае, при необходимости перенумеровав $\{G_n\}_{N_1}^{\infty}$, будем считать, что а) или б) выполняются тогда и только тогда, когда $N_1 \leqslant n < N_2$.

Пусть при $k > 2$ уже выбраны числа $N_1 < N_2 \leqslant \cdots \leqslant N_k$.

Рассмотрим все G_n, $n \geqslant N_k$, для которых либо

б) $\alpha(f;\ E_{n,k+1}) < \dfrac{\varepsilon}{k+2}$, либо

б) $\overline{G}_n \cap \overline{G}_m \neq \varnothing$, где либо $N_{k-1} \leqslant m < N_k$, либо m удовлетворяет а).

Число N_{k+1} выберем аналогично N_2 так, чтобы а) или б) выполнялись тогда и только тогда, когда $N_k \leqslant n < N_{k+1}$ (или же примем $N_{k+1} = N_k$, если нет компонент, удовлетворяющих а) или б)).

Продолжая этот процесс, построим последовательность $\{N_k\}$, $N_k \nearrow \infty$.

Обозначим $H_k = \bigcup_{j=N_k}^{N_{k+1}-1} E_{j,k}$; $k = 1, 2, \cdots$.

Согласно выбору чисел N_k, имеют место оценки

$$\alpha(f;\ E_{j,k}) < \frac{\varepsilon}{k+1}$$

при $N_k \leqslant j < N_{k+1}$, $k = 1, 2, \cdots$.

Лемма 3. *Имеет место оценка*

$$\alpha(f;\ H_k) < \frac{b\varepsilon}{k+1};\ k = 1, 2, \cdots, \tag{11}$$

где b — абсолютная константа.

Доказательство. Пусть $\eta > 0$ — произвольное число. Полиномы p_j выберем из условий

$$\|f - p_j\|_{E_{j,k}} < \frac{\varepsilon}{k+1} + \frac{\eta}{N_{k+1}};\ N_k \leqslant j < N_{k+1}.$$

Обозначим $M = \max\{\|p_j\|_{H_k};\ N_k \leqslant j < N_{k+1}\}$. Согласно замечанию 3 существует $\delta > 0$ такое, что δ-окрестности произвольной пары множеств $\overline{G}_i$ и $\overline{G}_j$; $N_k \leqslant i,\ j < N_{k+1}$, имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда $\overline{G}_i \cap \overline{G}_j \neq \varnothing$. Тогда δ-окрестность каждой точки $z \in \partial G_j$ пересекается с не более чем двумя другими множествами G_j. При необходимости уменьшив δ, можем считать, что выполняюся также следующие условия

$$(1+\delta)^{N_{k+1}} < 1 + 2N_{k+1}\delta;\ 2\delta(1+c)^2 N_{k+1} M < \frac{\eta}{N_{k+1}},$$

где c — константа леммы 2, а также

$$\|p_j\|_{(H_k)_\delta} < 2M; \|f - p_j\|_{(E_{j,k})_\delta} < \frac{\varepsilon}{k+1} + \frac{\eta}{N_{k+1}};\ N_k \leqslant j < N_{k+1}.$$

При $z_0 \in \overline{G}_i \cap \overline{G}_j$, из последнего условия вытекает, что

$$\|p_i - p_j\|_{D_{z_0}} < 2\left(\frac{\varepsilon}{k+1} + \frac{\eta}{N_{k+1}}\right), \tag{a}$$

где $D_{z_0} = \{z : |z - z_0| < \delta\}$.

С учетом замечания 1 и свойства (ii) множества E, легко видеть, что компакты $\widetilde{G}_s = \bigcup_{j=N_k}^{s} \overline{G}_j$ и $F = \widehat{H}_k$ удовлетворяют условиям леммы 2 при любом $s = N_k, \cdots, N_{k+1} - 2$. Поэтому существует полиномы π_s такие, что

$$\|1 - \pi_s\|_{\widetilde{G}_s \setminus (F \setminus \widetilde{G}_s)_\delta} < \delta;\ \|\pi_s\|_{F \setminus (\widetilde{G}_s)_\delta} < \delta;\ \|\pi_s\|_F < c;\ N_k \leqslant s \leqslant N_{k+1} - 2. \tag{б}$$

Рассмотрим полином

$$p=(\cdots(\pi_{N_k}p_{N_k}+(1-\pi_{N_k})p_{N_{k+1}})\pi_{N_{k+1}}+\cdots+$$

$$+(1-\pi_{N_{k+1}-3})p_{N_{k+1}-2})\pi_{N_{k+1}-2}+(1-\pi_{N_{k+1}-1})p_{N_{k+1}-1}=$$

$$=\sum_{s=N_k}^{N_{k+1}-1}p_s(1-\pi_{s-1})\prod_{t=s}^{N_{k+1}-1}\pi_t$$

(здесь принято $\pi_{N_k-1}=0$ и $\pi_{N_{k+1}-1}=1$).

Пусть j — любое целое, $N_k\leqslant j<N_{k+1}$ и $z_0\in\overline{G}_j$ — произвольная точка. Заметим, что

$$p-p_j=\sum_{s=N_k}^{N_{k+1}-1}(p_s-p_j)(1-\pi_{s-1})\prod_{t=s}^{N_{k+1}-1}\pi_t$$

и оценим $\|q_s\|_{D_{z_0}\cap F}$, где q_s — s-ое слагаемое суммы.

С учетом (а), (б) и выбора числа δ находим, что кроме, возможно, двух значений s; $s\neq s_1,\ s_2$, имеет место оценка

$$\|q_s\|_{D_{z_0}\cap F}<\frac{\eta}{N_{k+1}}\cdot$$

а при $s=s_1,\ s_2$,—

$$\|q_s\|_{D_{z_0}\cap F}<2(c+1)^3\left(\frac{\varepsilon}{k+1}+\eta\right)\cdot$$

Складывая эти оценки, получаем

$$\|p-p_j\|_{D_{z_0}\cap F}<4(c+1)^3\left(\frac{\varepsilon}{k+1}+\eta\right)+\eta.$$

В силу произвольности числа η и точки z_0, отсюда получаем

$$\|f-p\|_{E_{j,k}}<5(c+1)^3\frac{\varepsilon}{k+1},$$

что влечет (11) с константной $b=5(c+1)^3$.

Из построения следует, что $H_n\cap H_m=\varnothing$ при $1\leqslant n<m-1$. Поэтому существуют такие открытые множества V_n, что $H_n\cap H_{n+1}\subset V_n$ и $\overline{V}_n\cap\overline{V}_m=\varnothing$, $n\neq m$. Легко видеть также, что множества $F=\bigcup_{i=1}^{n}\widehat{H}_i$ и $G=\widehat{H}_n$ удовлетворяют условиям леммы 2 при любом $n>2$.

Согласно (11) существует полином p_1 такой, что

$$\|f-p_1\|_{H_1}<\frac{b\varepsilon}{2}\cdot \tag{12}$$

Существует также полином q_2 такой, что

$$\|f-p_1-q_2\|_{H_2}<\frac{b\varepsilon}{3}\cdot \tag{13}$$

По непрерывности, соотношения (12) и (13) выполняются также и на некоторой окрестности V_1' множества $H_1\cap H_2$, причем $\overline{V_1'}\subset V_1$. Поэтому

$$\|q_2\|_{\overline{V_1}} < b\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right). \tag{14}$$

Выбирая число $\delta > 0$ достаточно малым, с помощью леммы 2, примененной к $\hat{H}_1 \cup \hat{H}_3$ и $\hat{H}_2$, построим такой полином π_1, чтобы для полинома $p_2 = \pi_1 q_2$ имели место соотношения:

$$\|f-p_1-p_2\|_{H_1\setminus V_1'} < \frac{b\varepsilon}{2};$$

$$\|f-p_1-p_2\|_{H_2\setminus V_1'} < \frac{b\varepsilon}{3};\ \|p_2\|_{H_1\setminus V_1'} < \frac{1}{2^2}.$$

Имеем из (14) и пункта c) леммы 2:

$$\|p_2\|_{\overline{V_1'}} < bc\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right),$$

и, так как оценка (12) выполняется и на V_1', то отсюда получаем

$$\|f-p_1-p_2\|_{H_1\cup\overline{V_1'}} < bc\varepsilon\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right).$$

Пусть теперь, для $m \geqslant 2$ уже выбраны полиномы $p_1, p_2, \dots, p_m$, удовлетворяющие неравенствам ($V_0' = \varnothing$):

$$\text{i)}\quad \|f-P_m\|_{(H_j\setminus V_{j-1}')\cup\overline{V_j'}} < bc\varepsilon\left(\frac{2}{j}+\frac{1}{j+1}\right);\ j=1,2,\cdots,m-1;$$

$$\text{ii)}\quad \|f-P_m\|_{H_m\setminus V_{m-1}'} < \frac{b\varepsilon}{m+1}; \tag{15}$$

$$\text{iii)}\quad \|p_j\|_{\cup_{l=1}^{j-1}H_l\setminus V_j'} < \frac{1}{2^j};\ j=2,3,\cdots,m,$$

где $P_m = \sum_{j=1}^m p_j$.

Согласно (11) существует полином q_{m+1} такой, что

$$\|f-P_m-q_{m+1}\|_{H_{m+1}} < \frac{b\varepsilon}{m+2}. \tag{16}$$

По непрерывности, соотношения (15) и (16) выполнены также и на некоторой окрестности V_m множества $H_m \cap H_{m+1}$, причем $\bar{V}_m' \subset V_m$. Поэтому

$$\|q_{m+1}\|_{\overline{V_m'}} < b\varepsilon\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}\right). \tag{17}$$

Выбирая число $\delta > 0$ достаточно малым, с помощью леммы 2, примененной к $\cup_{l=1}^{m+1}\hat{H}_l$ и $\hat{H}_{m+1}$, построим такой полином π_m, чтобы для полинома $p_{m+1} = \pi_m q_m$ выполнялись соотношения

$$\|f-P_m-p_{m+1}\|_{(H_j\setminus V_j')\cup\overline{V_j'}} < bc\varepsilon\left(\frac{2}{j}+\frac{1}{j+1}\right);\ j=1,2,\cdots,m,$$

$$
\begin{gathered}
\|f-P_m-p_{m+1}\|_{(H_m\setminus V'_{m-1})\cdot V_m}<\frac{b\varepsilon}{m+1};\\
\|f-P_m-p_{m+1}\|_{H_{m+1}\setminus V'_m}<\frac{b\varepsilon}{m+2};\ \|p_{m+1}\|_{\cup_{l=1}^m H_l\setminus V'_m}<\frac{1}{2^{m+1}}.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Будем иметь из (17) и оценки пункта c) леммы 2:

$$
\|p_{m+1}\|_{\overline{V'_m}}<bc\varepsilon\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}\right).
$$

Учитывая также, что (15 ii) выполнено и на $\overline{V'_m}$, получаем

$$
\|f-P_m-p_{m+1}\|_{\overline{V'_m}}<\frac{b\varepsilon}{m+1}+bc\varepsilon\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}\right)<
$$

$$
<bc\varepsilon\left(\frac{2}{m+1}+\frac{1}{m+2}\right).
$$

Совместно с (18), это неравенство показывает, что соотношения (15) имеют место с заменой m на $m+1$. По принципу индукции отсюда получаем существование последовательности полиномов $\{p_m\}$, удовлетворяющих соотношениям (15) при всех $m\geqslant 2$.

Из (15 iii) вытекает, что ряд $\sum_{m=1}^\infty p_m$ сходится равномерно на множестве $\cup_{l=1}^N \widehat{H}_l$ при любом $N\geqslant 1$. Следовательно, его сумма g непрерывна на $\cup_{l=1}^\infty \overline{G_l}=\cup_{l=1}^\infty \widehat{H}_l$ (см. свойство (i) множества класса $\mathbf{E}_2$) и аналитична на $\cup_{l=1}^\infty G_l$.

Для произвольной точки $z\in\cup_{l=1}^\infty H_l$ найдем такие числа j_0 и N, что $z_0\in(H_{j_0}\setminus V'_{j_0-1})\overline{\cup V'_{j_0}}$; $N>j_0+1$ и $\sum_{j=N+1}^\infty(1/2^j)<\varepsilon/(j_0+1)$. Тогда будем иметь согласно (15 i) при $m=N$, $j=j_0$ и (15 iii) при $j\geqslant N+1$:

$$
|f(z)-g(z)|\leqslant|f(z)-P_N(z)|+|\textstyle\sum_{N+1}^\infty p_j(z)|<
$$

$$
<bc\varepsilon\left(\frac{2}{j_0}+\frac{1}{j_0+1}\right)+\frac{\varepsilon}{j_0+1}<\frac{A\varepsilon}{j_0},
$$

где A — абсолютная константа.

Последняя оценка показывает, что g аппроксимирует функцию f на $\cup_{l=1}^\infty H_l$ с касанием на E_∞. Поэтому, доопределив g на E_∞ равной f, будем иметь $g\in A(\overline{\cup G_l})$ и

$$
\|f-g\|_{\overline{\cup H_l}}<A\varepsilon. \tag{19}
$$

Теперь продолжим функцию g непрерывно на множество $F_r\cap E\setminus\overline{\cup H_l}$ (которое содержится в $\cup_{l=1}^{N_r-1}\overline{G_l}$ и поэтому ограничено, в силу свойства (iv) класса $\mathbf{E}_2$), с сохранением оценки (19). Аппроксимируя полученную функцию на множестве $\cup H_l\cup(F_r\cap E)$ с помощью мероморфной функции (согласно упомянутой теореме работы [9]) с точностью ε и удаляя возможное конечное число полюсов полученной функции с множества $\bigcup_{j=1}^{N_1-1} G_j$, можем построить функцию класса $A(F_r)$, аппроксимирующую функцию f на $F_r \cap E$ с точностью $(A+1)\varepsilon$.

Теорема 2 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 24. IX. 1986

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Կոմպլեքս հարթության փակ ենթաբազմությունների վրա մոտարկվող ֆունկցիաների մասին *(ամփոփում)*

Ն. Հ. Առաքելյանը 1970 թ. խնդիր էր դրել նկարագրել այն ֆունկցիաները, որոնք կամայական ճշտությամբ հավասարաչափ մոտարկվում են ամբողջ ֆունկցիաներով կոմպլեքս հարթության փակ անսահմանափակ ենթաբազմությունների վրա այն դեպքում, երբ բազմության լրացումը ընդլայնված հարթությունում կապակցված և լոկալ կապակցված չէ (այս պայմանն անհրաժեշտ և բավարար է բազմության վրա անընդհատ ներսում անալիտիկ ֆունկցիաների մոտարկելիության համար)։ Այս աշխատանքում, բազմությունների բավականաչափ լայն դասի համար, մոտարկվող ֆունկցիաները նկարագրված են կոմպակտների վրա բազմանդամային լավագույն մոտավորության չափի տերմիններով։

A. H. NERSESIAN. *On functions which are approximable on closed subsets of the complex plane* (summary)

In 1970 N. H. Arakelian posed the problem of description of the class of functions, uniformly approximable by entire functions on closed unbounded subsets of the complex plane, whose complement is not connected and locally connected in the extended plane (this condition is necessary and sufficient for approximability of any function continuous on a set and analytical in its interior). For a large enough class of sets we give such a description in terms of the best polynomial approximation on compacts.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. У. Аракелян.* О равномерном приближении целыми функциями на замкнутых множествах, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, 5, 1964, 1187—1206.
2. *N. U. Arakeljan* Approximation complexe et propriétés des fonctions analytiques, Actes, Cong Math. intern., 1970, t. 2, 595—600.
3. *A. Roth.* Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen, Comment. Math, Helv., 11, 1, 1938, 77—125.
4. *М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев.* Sur un probléme de M. Carleman, ДАН СССР 23, 8, 1939, 746—748.
5. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, 7, 2 (48), 1952, 31—122.
6. *A. Stray.* Approximation by analytic functions which are uniformly continuous on a subset of their domain of definition, Amer. Journ. Math., 99, 4, 1977, 787–800.
7. *A. Stray.* Decomposition of approximable functions, Annals of Math., 120, 2, 1984, 225—235.
8. *А. А. Нерсесян.* О множествах Карлемана, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 6, 6, 1971, 465—471.
9. *А. А. Нерсесян.* О равномерной и касательной аппроксимации мероморфными функциями, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 7, 6, 1972, 405—412.
10. *A. Roth.* Uniform and tangential approximation by meromorphic functions on closed sets, Canad. Journ. Math., 28, 1, 1976, 104—111.