УДК 517.53

М. М. ДЖРБАШЯН, С. Г. РАФАЕЛЯН

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И ПОРОЖДАЕМЫЕ ИМИ БАЗИСЫ РИССА

§ 0. Введение

0.1. В давних исследованиях первым из авторов была развита теория гармонического анализа для системы лучей в комплексной области. Указанная теория, изложенная в монографии [1], опиралась на замечательные асимптотические свойства целых функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho}(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \left(\rho \geq \frac{1}{2}, \mu > 0\right). \quad (0.1)$$

В работах авторов ([2], [3], [4]) были установлены дискретные аналоги лишь некоторых специальных результатов указанной теории. В них были открыты нового рода базисы Рисса в пространствах $L_2(0, \sigma)$ вектор-функций, с числом компонент $n=2$ и $n=4$.

К этому циклу исследований непосредственно примыкает недавняя работа авторов [5, 6], где были построены базисы Рисса — обобщения $\sin$ и $\cos$ -рядов Фурье функций из $L_2(0, \sigma)$.

Во всех отмеченных исследованиях в построенных базисах Рисса участвует та же функция типа Миттаг-Леффлера $E_{\rho}(z; \mu)$, но лишь для значений $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$.

0.2. Отмеченные исследования авторов в общих чертах и по существу проводились единым методом, состоящим из четырех этапов.

Этап 1. Введение банаховых пространств $W_{\rho, \omega}^{\sigma}$ целых функций порядков $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$ и типа $\leq \sigma$ с нормами

$$\|f\|_{\rho, \omega} = \left(\int_{L_{\rho}} |f(z)|^{\rho} |z|^{\omega} |dz| \right)^{1/\rho} < +\infty \quad (0.2)$$

$$(1 < \rho < +\infty, -1 < \omega < \rho - 1),$$

где L_{ρ} — зависящая от значения ρ система лучей, исходящих из точки $z = 0$.

Затем установление весьма существенных для дальнейших этапов тонких оценок между нормами вида

$$\| \{f(\lambda_k)\} \|_{\rho, \omega} = \left(\sum_k (1 + |k|)^{\omega} |f(\lambda_k)|^{\rho} \right)^{1/\rho} \quad (0.3)$$

и нормой $\| \cdot \|_{p, \sigma}$.

Этап II. Установление базисных и интерполяционных разложений для классов $W_{p, \sigma}^{p, \infty}$ целых функций $f(z)$ порядков $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$ с узлами на последовательности $\{\lambda_k\}$.

Этап III. Построение ортогональных на $(0, \sigma)$ систем вектор-функций с числом компонент $n = 1, 2, 4$.

Доказательство теорем о том, что построенные биортогональные системы являются базисами Рисса в надлежащих пространствах вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$. Оно, как правило, достигается лишь методом перехода от интерполяционных теорем для классов $W_{p, \sigma}^{p, \infty}$ ($\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$) при $\rho = 2$ к их параметрическим представлениям — далеко идущим и существенно новым обобщениям классической теоремы Винера-Пэли о целых функциях экспоненциального типа. Эти и другие гораздо более общие результаты такого же рода были установлены в свое время первым из авторов данной статьи. Они наряду с отмеченной выше теорией гармонического анализа в комплексной области изложены в монографии [1].

Этап IV. Построение модельных интегро-дифференциальных операторов $A_{\rho, \mu}$ и $a_{\rho, \mu}$ для значений $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$ и надлежащих значений параметра $\mu = \mu(\rho) > 0$.

Рассмотрение нового рода задач типа Коши

$$\begin{aligned} A_{\rho, \mu} y(z) &= \lambda y(z), \quad z \in G_{\infty}, \\ a_{\rho, \mu} y(z) |_{z=0} &= 1, \end{aligned} \quad (0.4)$$

где G_{∞} — риманова поверхность функции $\text{Ln } z$. Это приводит к утверждению, что в надлежащих классах функций $y(z)$, определенных на G_{∞} задача (0.4) имеет единственное решение

$$y(z) = E_{\rho}(\lambda z^{1/\rho}; \mu) z^{\mu-1}. \quad (0.5)$$

Наконец, в зависимости от значений $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$ для задачи (0.4) в комплексной области ставятся особого рода краевые условия.

Эти условия в каждом из случаев $\rho = \frac{1}{2}, 1, 2$ порождают счетное множество собственных чисел $\{\lambda_k\}$ и собственных функций

$$y_k(z) = E_{\rho}(\lambda_k z^{1/\rho}; \mu) z^{\mu-1}, \quad (0.6)$$

которые после простой модификации сводятся к системам функций, базисность которых была установлена на этапе II.

0.3. Цель настоящей статьи — построение базисов Рисса в пространствах вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$ с числом компонент $n = 3$.

В этом случае приходится установить интерполяционные разложения особой природы для классов $W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ целых функций $f(z)$ порядка $\rho = \frac{3}{2}$ и типа σ , подчиненных условию

$$\|f\|_{p, \omega} = \left(\sum_{k=-1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f(re^{i\frac{2\pi k}{3}})|^p r^{\omega} dr \right)^{1/p} < +\infty. \quad (0.7)$$

Эти разложения получаются нами в §§ 1–3 статьи на основе интерполяционных разложений для классов

$$W_{1/2, \sigma}^{p, \omega} : \|f\|_{p, \omega} = \left(\int_0^{\infty} |f(z)|^p r^{\omega} dr \right)^{1/p} \quad (0.8)$$

$$(1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1)$$

целых функций порядка $\rho = 1/2$ и типа $\leq \sigma$, установленных в нашей работе [5, 6].

Дальше уже в §§ 4, 5 статьи осуществляется этап III исследования. А именно: а) Построение биортогональных систем вектор-функций с числом компонент $n = 3$ и их базисность в пространстве вектор-функций из $L_2(0, \sigma)$ с тем же числом компонент.

б) Здесь также базисность систем устанавливается путем перехода от интерполяционных разложений для классов $W_{3/2, \sigma}^{p, \omega}$ при $p = 2$ к их параметрическим представлениям, содержащихся, как частный случай, в общих результатах монографии [1].

Базисы, построенные в данной статье, также могут порождаться наложением краевых условий в комплексной области на решения (0.5) задачи типа Коши (0.4) при $\rho = \frac{3}{2}$. Но этому следует посвятить отдельную работу.

§ 1. Предварительные сведения

1.1 (а) Напомним несобходимое нам простейшее предложение теории целых функций конечного роста.

Если разложение

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (1.1)$$

определяет целую функцию конечного роста, то ее порядок ρ и тип σ (при $\rho > 0$) определяются из соотношений

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln 1/|c_n|} \quad \text{и} \quad e^{\rho\sigma} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n |c_n|^{1/n}. \quad (1.2)$$

Предположим теперь, что $\Phi(z)$ — целая функция порядка $3/2$ и типа σ ($0 < \sigma < +\infty$). Тогда соотношения (1.2) примут вид

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln 1/|c_n|} = \frac{3}{2}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n |c_n|^{3/2n} = \frac{3}{2} e^{\sigma}. \quad (1.2')$$

С функцией $\Phi(z)$ (порядка $\frac{3}{2}$ и типа σ) ассоциируем три целые функции $\varphi_j(\omega)$ ($j = -1, 0, 1$) посредством следующих разложений:

$$\begin{aligned}\varphi_{-1}(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n} w^n, \quad \varphi_0(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+1} w^n, \\ \varphi_1(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+2} w^n.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Если обозначить через ρ_j и σ_j ($j = -1, 0, 1$) порядок и тип функции $\varphi_j(w)$, то из соотношений (1.2) и (1.3) легко заключаем, что

$$0 \leq \rho_j \leq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq \sigma_j \leq \sigma/2\rho_j \quad (j = -1, 0, 1). \quad (1.4)$$

(6) Впредь, обозначая

$$\alpha = \exp\left\{i \frac{2\pi}{3}\right\}, \quad (1.5)$$

заметим, что справедливы формулы

$$1 + \alpha^k + \alpha^{-k} = \begin{cases} 3, & \text{при } k = 3n \\ 0, & \text{при } k = 3n + 1, 3n + 2. \quad (n \geq 0). \end{cases} \quad (1.6)$$

Тогда простая связь между введенными выше функциями дается в следующей лемме:

Лемма 1.1. 1°. Справедливы представления

$$\begin{aligned}\varphi_{-1}(z^3) &= \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 \Phi(\alpha^k z), \quad z \varphi_0(z^3) = \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 \alpha^{-k} \Phi(\alpha^{-k} z), \\ z^2 \varphi_1(z^3) &= \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 \alpha^k \Phi(\alpha^k z)\end{aligned}\quad (1.7)$$

и их обращение

$$\Phi(z) = \varphi_{-1}(z^3) + z \varphi_0(z^3) + z^2 \varphi_1(z^3). \quad (1.8)$$

2°. Хотя бы одна из целых функций $|\varphi_j(w)|_{-1}^1$ имеет порядок, равный $\frac{1}{2}$ и тип, равный σ .

Доказательство. 1°. Все представления (1.7) и (1.8) непосредственно следуют из определений (1.1) и (1.3) наших функций $\Phi(z)$ и $|\varphi_j(w)|_{-1}^1$, если воспользоваться формулами (1.6).

2°. Если вопреки утверждению предполагать, что $\rho_j < \frac{1}{2}$ или $\sigma_j < \sigma$ ($j = -1, 0, 1$), то из тождества (1.8) следовало бы противоречие—что порядок или тип функции $\Phi(z)$ будут соответственно меньше чисел $\frac{3}{2}$ или σ .

Отметим особо приложение представлений леммы 1.1 к целой функции типа Миттаг-Леффлера

$$\Phi(z) \equiv E_{3/2}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + 2k/3)}. \quad (1.9)$$

Легко видеть, что в этом случае будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi_{-1}(w) &\equiv E_{1/2}(w; \mu), \quad \varphi_0(w) \equiv E_{1/2}\left(w; \mu + \frac{2}{3}\right), \\ \varphi_1(w) &\equiv E_{1/2}(w; \mu + 4/3).\end{aligned}\tag{1.10}$$

Поэтому из леммы 1.1 следует

Лемма 1.2. Справедливы следующие формулы представления:

$$\begin{aligned}E_{1/2}(z^3; \mu) &\equiv \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 E_{3/2}(z^k; \mu), \\ z E_{1/2}(z^3; \mu + 2/3) &\equiv \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 z^{-k} E_{3/2}(z^k; \mu), \\ z^2 E_{1/2}\left(z^3; \mu + \frac{4}{3}\right) &\equiv \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 z^k E_{3/2}(z^k; \mu)\end{aligned}\tag{1.11}$$

и их обращение

$$E_{3/2}(z; \mu) \equiv E_{1/2}(z^3; \mu) + z E_{1/2}\left(z^3; \mu + \frac{2}{3}\right) + z^2 E_{1/2}\left(z^3; \mu + \frac{4}{3}\right).\tag{1.12}$$

1.2. (а) Введем в рассмотрение два банаховых пространства целых функций. Во-первых, определим класс $W_{1/2, \sigma}^p$ ($p > 1$, $-1 < \sigma < p-1$) — как множество целых функций $\varphi(z)$ порядка $1/2$ и типа $\leq \sigma$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{p, \sigma} \equiv \left(\int_0^{\infty} |\varphi(r)|^p r^{\sigma} dr \right)^{1/p}.\tag{1.13}$$

Во-вторых, обозначив через

$$L = \bigcup_{k=-1}^1 l_k\tag{1.14}$$

совокупность трех полупрямых

$$l_k = \{z; z = r e^{i\frac{2\pi}{3}k}, 0 \leq r < +\infty\} \quad (k = -1, 0, 1),\tag{1.15}$$

определим класс $W_{3/2, \sigma}^p$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \sigma < p-1$) как множество целых функций $\Phi(z)$ порядка $3/2$ и типа $\leq \sigma$, для которых конечна норма

$$\begin{aligned}\|\Phi; L\|_{p, \sigma} &\equiv \left(\int_L |\Phi(z)|^p |z|^{\sigma} |dz| \right)^{1/p} = \\ &= \left(\sum_{k=-1}^1 \int_0^{\infty} |\Phi(z^k r)|^p r^{\sigma} dr \right)^{1/p}.\end{aligned}\tag{1.16}$$

(в) Связь между введенными пространствами дается следующей леммой.

Лемма 1.3. 1°. Класс $W_{3/2, \infty}^p$ совпадает с множеством целых функций $\Phi(z)$, представимых в виде

$$\Phi(z) = \varphi_{-1}(z^3) + z\varphi_0(z^3) + z^2\varphi_1(z^3), \quad (1.17)$$

где функции

$$\varphi_j(\omega) \in W_{1/2, \infty}^p(z^j) \quad (j = -1, 0, 1), \quad (1.18)$$

причем

$$z_j = \tilde{\omega} + \frac{(1+j)p}{3} \quad (j = -1, 0, 1); \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega - 2}{3}. \quad (1.19)$$

2°. Справедливы двусторонние оценки

$$\|\Phi; L_{p, \omega}\| \asymp \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, z_j}; \quad \|\Phi; L_{p, \omega}^p\| \asymp \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, z_j}^p. \quad (1.20)$$

Доказательство. Во-первых, отметим, что заменой переменного интегрирования $r = u^{1/3}$, в силу обозначений (1.19), будем иметь

$$\int_0^{\infty} |\varphi_{-1}(r^3)|^p r^{\omega} dr = 3^{-1} \int_0^{\infty} |\varphi_{-1}(u)|^p u^{z_1} du = 3^{-1} \|\varphi_{-1}\|_{p, z_1}^p$$

и аналогично

$$\int_0^{\infty} |r\varphi_0(r^3)|^p r^{\omega} dr = 3^{-1} \|\varphi_0\|_{p, z_0}^p, \quad \int_0^{\infty} |r^2\varphi_1(r^3)|^p r^{\omega} dr = 3^{-1} \|\varphi_1\|_{p, z_{-1}}^p.$$

Во-вторых, поскольку при $z \in L$, т. е. при $z = re^{i\frac{2\pi k}{3}}$ ($k = -1, 0, 1$) $z^3 = r^3$, то из приведенных формул следует равенство

$$\int_L |\varphi_{-1}(z^3)|^p |z|^{\omega} |dz| = 3 \int_0^{\infty} |\varphi_{-1}(r^3)|^p r^{\omega} dr = \|\varphi_{-1}\|_{p, z_{-1}}^p,$$

и аналогично, равенства

$$\int_L |z\varphi_0(z^3)|^p |z|^{\omega} |dz| = \|\varphi_0\|_{p, z_0}^p, \quad \int_L |z^2\varphi_1(z^3)|^p |z|^{\omega} |dz| = \|\varphi_1\|_{p, z_1}^p.$$

Предполагая теперь, что функция $\Phi(z)$ представима в виде суммы (1.17), при условии (1.18)—(1.19) из последних трех неравенств на основе неравенства Минковского, а также в силу простого неравенства

$$(a + b + c)^p \leq 3^{p-1} (a^p + b^p + c^p) \quad (0 < a, b, c < +\infty, p \geq 1).$$

* Символ $\asymp$ принято употреблять во всех случаях, когда отношение величин между которыми он ставится, лежит между двумя положительными и конечными постоянными $0 < c_1 < c_2 < +\infty$, не зависящими от этих величин.

мы приходим к оценкам вида

$$\|\Phi; L\|_{p, \omega} \leq \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \kappa_j} \|\Phi; L\|_{p, \omega}^p \leq c_p \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \kappa_j}^p. \quad (1.20')$$

Это значит, что не только $\Phi(z) \in W_{3/2, \omega}^{p, \infty}$, но и справедлива также правая из двусторонних оценок (1.20) леммы.

Обратно, если $\Phi(z) \in W_{3/2, \omega}^{p, \infty}$, то определив три функции $\{\varphi_j(u)\}_{j=-1}^1$ согласно формулам (1.7) леммы 1.1, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\varphi_{-1}\|_{p, \kappa_{-1}} &= \left(\int_L |\varphi_{-1}(z^3)|^p |z|^\omega |dz| \right)^{1/p} = \\ &= 3^{-1} \left(\int_L \left| \sum_{j=-1}^1 \Phi(a^j z) \right|^p |z|^\omega |dz| \right)^{1/p} \leq 3^{-1} \sum_{j=-1}^1 \left(\int_L |\Phi(a^j z)|^p |z|^\omega |dz| \right)^{1/p} = \\ &= \|\Phi; L\|_{p, \omega}, \end{aligned}$$

поскольку преобразование $\zeta = az$ или $\zeta = a^{-1}z$ переводит совокупность полупрямых L в себя.

Вполне аналогично приходим также к неравенствам

$$\|\varphi_j\|_{p, \kappa_j} \leq \|\Phi; L\|_{p, \omega} \quad (j=0, \pm 1),$$

следовательно, к неравенствам

$$\|\Phi; L\|_{p, \omega} \geq 3^{-1} \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \kappa_j} \|\Phi; L\|_{p, \omega}^p > 3^{-p} \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \kappa_j}^p. \quad (1.20'')$$

Поскольку, по лемме 1.1, функция $\Phi(z)$ представима в виде (1.17), то неравенство (1.20'') означает, что функции

$$\varphi_j(\omega) \in W_{1/2, \kappa_j}^{p, \infty} \quad (j=-1, 0, 1).$$

Лемма полностью доказана, так как из (1.20') и (1.20'') вытекают двусторонние оценки (1.20) леммы.

(г) В заключение приведем два замечания.

Замечание 1. Если в представлении (1.17) $\Phi(z) \in W_{3/2, \omega}^{p, \infty}$, для данного j ($j=-1, 0, 1$) функция $\varphi_j(\omega)$ имеет порядок $\rho_j < \frac{1}{2}$, то можно доказать, что $\varphi_j(\omega) \equiv 0$.

Замечание 2. Относительно ассоциированных с $\Phi(z) \in W_{3/2, \omega}^{p, \infty}$ ($p > 1$, $-1 < \omega < p-1$) функций $\varphi_j(\omega) \in W_{1/2, \kappa_j}^{p, \infty}$ ($j=-1, 0, 1$), отметим также, что, как следует из (1.19)

$$-1 < \kappa_{-1} < \frac{p}{3} - 1, \frac{p}{3} - 1 < \kappa_0 < \frac{2p}{3} - 1, \frac{2p}{3} - 1 < \kappa_1 < p - 1. \quad (1.19')$$

Таким образом, интервалы изменения параметров κ_j ($-1 \leq j \leq 1$) не имеют точек пересечения, и за исключением двух точек $\frac{p}{3} - 1$ и $\frac{2p}{3} - 1$ заполняют весь интервал $(-1, p-1)$ изменения параметра ω .

1.3. В этом заключительном пункте параграфа приведем формулировки некоторых известных уже результатов, необходимых нам в последующем изложении статьи.

(а) Вновь рассмотрим целую функцию типа Миттаг-Леффлера вида

$$G_{\sigma}(w; \nu) = E_{1/2}(-\sigma^2 w; 1 + \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sigma^{2k} w^k}{\Gamma(1 + \nu + 2k)} \quad (1.21)$$

порядка $1/2$ и типа σ ($0 < \sigma < +\infty$), при любом значении параметра $\nu \in (-1, +\infty)$.

Прежде всего отметим, что для частных значений параметра $\nu = 0$ и $\nu = 1$ будем иметь

$$G_{\sigma}(w; 1) = \cos \sigma \sqrt{w}, \quad G_{\sigma}(w; 2) = \frac{\sin \sigma \sqrt{w}}{\sigma \sqrt{w}}. \quad (1.21')$$

Кроме того, нам известно (см. [1], лемму 3.5), что имеет место асимптотическая формула

$$G_{\sigma}(u; \nu) = (\sigma \sqrt{u})^{-\nu} \cos\left(\sigma \sqrt{u} - \frac{\pi}{2} \nu\right) + O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u \in (0, +\infty) \quad (1.22)$$

для значений $0 \leq \nu < 2$.

Теорема 1*. 1°. Для значений параметра $0 \leq \nu < 2$ функция $G_{\sigma}(w; \nu)$ имеет только вещественные, простые и положительные корни.

2°. Если

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k < \dots, \quad r_k = r_k(\sigma, \nu) \quad (1.23)$$

эти корни, то они расположены таким образом:

При $\nu = 0$ и $0 < \nu < 1$, соответственно, будем иметь

$$r_k = \left(\frac{\pi}{\sigma} k - \frac{\pi}{2\sigma}\right)^2, \quad r_k \in \left(\left(\frac{\pi}{\sigma} k - \frac{\pi}{2\sigma}\right)^2, \left(\frac{\pi}{\sigma} k + \frac{\pi}{2\sigma}\right)^2\right). \quad (1.24)$$

При $\nu = 1$ и $1 < \nu < 2$, соответственно

$$r_k = \left(\frac{\pi}{\sigma} k\right)^2, \quad r_k \in \left(\left(\frac{\pi}{\sigma} k\right)^2, \left(\frac{\pi}{\sigma} k + \frac{\pi}{2\sigma}\right)^2\right) \quad (1 \leq k < \infty). \quad (1.25)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что корни функции $G_{\sigma}(w; \nu)$ в обоих случаях (1.24) и (1.25) расположены по одному, только в указанных в них интервалах, а также, что

$$r_k \sim (1+k)^2, \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (1.26)$$

(б) Пусть $l^{p, \alpha}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$) банахово пространство последовательностей $\{a_k\}_0^{\infty} \in C$ с конечной нормой

$$\| \{a_k\}_0^{\infty} \|_{p, \alpha} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p (1+k)^{\alpha} \right)^{1/p} < +\infty. \quad (1.27)$$

В работе авторов [5, 6] была установлена следующая основная теорема об интерполяционных разложениях для целых функций класса $W_{1/2, \sigma}^p$ ($-1 < x < p-1$).

* См. [3], лемму 1.1.

Теорема II. Пусть $\{r_k\}_1^\infty$ — корни функции $G_\sigma(w; \nu)$ ($0 \leq \nu < 2$).

Тогда

1°. В случае, когда параметр ν удовлетворяет условию:

$$\frac{2(1+x)}{p} - 1 < \nu < \frac{2(1+x)}{p}, \quad (1.28)$$

то рядами вида

$$\varphi(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{G_\sigma(w; \nu)}{G'_\sigma(r_k; \nu)(w - r_k)} \quad (1.29)$$

осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства последовательностей

$$\{c_k\}_1^\infty \in l^{p, 1+2x} \quad (1 < p < +\infty, -1 < x < p-1) \quad (1.30)$$

на все пространство целых функций $\varphi(w) \in W_{1,2,\sigma}^{p,x}$.

Этот ряд сходится к своей сумме $\varphi(w)$ в метрике пространства $W_{1,2,\sigma}^{p,x}$, и равномерно в любом круге $|w| \leq R < +\infty$, при этом будем иметь

$$\varphi(r_k) = c_k \quad (1 \leq k < +\infty); \quad \|\varphi\|_{p,x} \asymp \|\{c_k\}_1^\infty\|_{p,1+2x}. \quad (1.31)$$

2°. В случае же, когда параметр ν удовлетворяет условию

$$\frac{2(1+x)}{p} < \nu < 1 + \frac{2(1+x)}{p}, \quad (1.32)$$

то рядами вида

$$\begin{aligned} \varphi(w) = & d_0 \Gamma(1+\nu) G_\sigma(w; \nu) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{w G_\sigma(w; \nu)}{r_k G'_\sigma(r_k; \nu)(w - r_k)} \end{aligned} \quad (1.33)$$

осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства последовательностей

$$\{d_k\}_1^\infty \in l^{p, 1+2x} \quad (1 < p < +\infty, -1 < x < p-1) \quad (1.34)$$

на все пространство целых функций $\varphi(w) \in W_{1,2,\sigma}^{p,x}$.

Кроме того, природа сходимости этих рядов такая же, что и в 1°, при этом, положив $r_0 = 0$, будем иметь

$$\varphi(r_k) = d_k \quad (0 \leq k < +\infty), \quad \|\varphi\|_{p,x} \asymp \|\{d_k\}_0^\infty\|_{p,1+2x}. \quad (1.35)$$

Замечание к теореме II. В упомянутой выше работе [5, 6], разложениях (1.29) и (1.33) вместо чисел $G'_\sigma(r_k; \nu)$ записаны их значения

$$\frac{\sigma}{r_k} G_\sigma(r_k; \nu - 1) \quad (k \geq 1).$$

Основные леммы

2.1 (а) Введем в рассмотрение целую функцию

$$e_{\sigma}(z; \nu) = G_{\sigma}(z^3; \nu) = E_{1/2}(-z^3 z^3; 1 + \nu) \quad (2.1)$$

порядка $3/2$ и типа σ .

Поскольку по теореме I при $0 < \nu < 2$ все корни функции $G_{\sigma}(w; \nu)$ положительны и просты, то, очевидно, что все корни функции $e_{\sigma}(z; \nu)$ ($0 \leq \nu < 2$) также просты и лежат только на трех полупрямых (1.15)

$$l_k = \{z; z = r e^{i \frac{2\pi}{3} k}, 0 \leq r < +\infty\} \quad (k = -1, 0, 1).$$

На каждой из указанных полупрямых

$$l_{-1} = (0, \alpha^{-1}(\infty)), \quad l_0 = (0, +\infty), \quad l_1 = (0, \alpha(\infty)), \quad (2.2)$$

где $\alpha = \exp\left\{i \frac{2\pi}{3}\right\}$, корнями функции $e_{\sigma}(z; \nu)$ будут, соответственно, следующие три последовательности чисел:

$$\begin{aligned} \{\mu_k^-\}_1^{\infty} &= \{\alpha^{-1} \sqrt[3]{r_k}\}_1^{\infty} \subset l_{-1}, \quad \{\mu_k^0\}_1^{\infty} = \{\sqrt[3]{r_k}\}_1^{\infty} \subset l_0, \\ \{\mu_k^+\}_1^{\infty} &= \{\alpha \sqrt[3]{r_k}\}_1^{\infty} \subset l_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

при этом, очевидно, что

$$(\mu_k^-)^3 = (\mu_k^0)^3 = (\mu_k^+)^3 = r_k \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (2.4)$$

Введем теперь единую нумерацию для всех корней функции $e_{\sigma}(z; \nu)$, определив последовательность чисел $\{\mu_k\}_1^{\infty}$ таким образом:

$$\mu_{3k-2} = \mu_k^-, \quad \mu_{3k-1} = \mu_k^0, \quad \mu_{3k} = \mu_k^+ \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (2.5)$$

При этом, как следует из (1.24) и (1.25), справедливы двойные неравенства

$$|\mu_k^-| = |\mu_k^0| = |\mu_k^+| \asymp |\mu_k| \asymp (1+k)^{2/3} \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (2.6)$$

Наконец, всюду дальше условимся добавить к нашей последовательности $\{\mu_k\}_1^{\infty}$ корней функции $e_{\sigma}(z; \nu)$ еще один начальный член — $\mu_0^{\pm} = \mu_0 = r_0 = 0$.

(б) В теореме II имеются два утверждения — 1° и 2°, где при двух различных условиях (1.28) и (1.32), накладываемых на параметр ν , устанавливается изоморфизм пространства целых функций $W_{1/2, \sigma}^p$ с пространствами последовательностей $\{c_k\}_1^{\infty} \in l^{p, 1+2x}$ или $\{d_k\}_0^{\infty} \in l^{p, 1+2x}$ в обычном предположении, что $1 < p < +\infty$ и $-1 < x < p-1$.

Рассмотрим теперь введенные нами в лемме 1.3 пространства

$$W_{1/2, \sigma}^{p, x_j} \quad (j = -1, 0, 1), \quad \text{где по (1.19), } x_j = \frac{\omega - 2 + (1+j)p}{3} \quad (j = -1, 0, 1).$$

Как уже отмечалось в заключительном замечании 2 к пункту 1.2, если $-1 < \omega < p-1$, то интервалы изменения параметров x^j ($j = -1, 0, 1$) не имеют общих точек. Следовательно, вопрос об одновременной примени-

мости для всех этих трех пространств утверждений 1° или 2° теоремы II нуждается в выяснении. К этому мы и приступим ниже.

С этой целью, во-первых, отметим, что если ввести параметр

$$\gamma = \frac{2(1+\omega)}{3\rho}, \quad (2.7)$$

то будем иметь

$$\frac{2(1+\tau_j)}{\rho} = \frac{2(1+j)}{3} + \gamma \quad (j = -1, 0, 1), \quad (2.8)$$

причем, поскольку $-1 < \omega < \rho - 1$, то

$$0 < \gamma < \frac{2}{3}. \quad (2.7')$$

Во-вторых, отметим, что утверждение 1° теоремы II применимо для каждого из наших классов $W_{1/2, \tau}^{p, \tau_j}$ ($j = -1, 0, 1$), если параметр удовлетворяет соответствующему условию вида (1.28). Эти условия в случае 1° соответственно запишутся таким образом:

$$\nu \in \Delta_j(1^\circ) = \left(\gamma + \frac{2j-1}{3}, \gamma + \frac{2j+2}{3} \right), \quad (j = -1, 0, 1). \quad (2.9)$$

Но кроме этих требований мы, разумеется, должны потребовать, чтобы параметр ν не вышел из $[0, 2)$.

В-третьих, наконец, мы аналогично легко приходим к заключению, что условие (1.32) на допустимые значения параметра $\nu \in [0, 2)$, обеспечивающие справедливость утверждения 2° теоремы II, для каждого из наших классов целых функций $W_{1/2, \tau}^{p, \tau_j}$ ($j = -1, 0, 1$), соответственно, запишется в виде

$$\nu \in \Delta_j(2^\circ) = \left(\gamma + \frac{2j+2}{3}, \gamma + \frac{2j+5}{3} \right), \quad (j = -1, 0, 1). \quad (2.10)$$

Считаем не лишним особо отметить хотя и ясный смысл введенных обозначений. Например, если при данном j ($j = -1, 0, 1$) параметр $\nu \in \Delta_j(1^\circ)$, то для класса $W_{1/2, \tau}^{p, \tau_j}$ имеет место утверждение 1° теоремы II. Аналогичный смысл имеет и условие $\nu \in \Delta_j(2^\circ)$.

(в) Легко видеть, что взятые в отдельности обе тройки интервалов (2.9) и (2.10) имеют лишь пустое пересечение. Это значит, что отдельно взятые утверждение 1° или утверждение 2° теоремы II не могут быть применимы для всех трех классов $W_{1/2, \tau}^{p, \tau_j}$ ($j = -1, 0, 1$) одновременно.

Однако, как мы убедимся ниже, можно двумя вариантами подобрать три разных интервала из указанных выше шести, которые все же имеют не пустое пересечение.

Вариант I: пересечение интервалов

$$\Delta_{-1}(2^\circ) \cap \Delta_0(1^\circ) \cap \Delta_1(1^\circ) = \Delta_1 = \left(\gamma + \frac{1}{3}, \gamma + \frac{2}{3} \right). \quad (2.11)$$

В а р и а н т II: пересечение интервалов

$$\Delta_{-1}(2^\circ) \cap \Delta_0(2^\circ) \cap \Delta_1(1^\circ) = \Delta_2 = \left(\gamma + \frac{2}{3}, \gamma + 1 \right). \quad (2.12)$$

Отметим при этом, что ввиду (2.7')

$$\Delta_1 \subset (1/3, 4/3) \subset [0, 2) \text{ и } \Delta_2 \subset \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right) \subset [0, 2).$$

и, таким образом, в обоих случаях при $\nu \in \Delta_1$ или $\nu \in \Delta_2$ утверждения 1° или 2° теоремы II применимы одновременно к нашим трем классам

$$W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa-1}, W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa}, W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa_1}. \quad (2.13)$$

При этом их следует применить в той же последовательности, в которой наши интервалы $\Delta_j(1^\circ)$ или $\Delta_j(2^\circ)$ ($j = -1, 0, 1$) появляются в определенных (2.11) или (2.12) интервалах Δ_1 или Δ_2 .

(г) В качестве непосредственного применения теоремы II к классам (2.13) мы приходим к следующим леммам.

Лемма 2.1. Пусть параметр ν удовлетворяет условию

$$\nu \in \Delta_1 = (\gamma + 1/3, \gamma + 2/3), \quad \gamma = \frac{2(1 + \omega)}{3\rho}. \quad (2.14)$$

Тогда посредством рядов вида

$$\begin{aligned} \varphi_{-1}(\omega) &= \varphi_{-1,0} \Gamma(1 + \nu) G_\nu(\omega; \nu) + \\ &+ \left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{-1,k} \frac{\omega G_\nu(\omega; \nu)}{r_k G_\nu(r_k; \nu) (\omega - r_k)} \right|, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\varphi_j(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{j,k} \frac{G_\nu(\omega; \nu)}{G_\nu(r_k; \nu) (\omega - r_k)} \quad (j = 0, 1) \quad (2.16)$$

одновременно осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение пространств функций $W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa_j}$ ($j = 1, 0, 1$), соответственно, на пространства последовательностей

$$\{\varphi_{-1,k}\}_0^\infty \in l^{p, \omega-1}, \quad \{\varphi_{0,k}\}_1^\infty \in l^{p, \omega}, \quad \{\varphi_{1,k}\}_1^\infty \in l^{p, \omega_1}, \quad (2.17)$$

где ввиду (1.19)

$$\omega_j = 1 + 2\kappa_j = \frac{2\omega - 1 + 2(1 + j)\rho}{3} \quad (j = -1, 0, 1). \quad (2.18)$$

Ряды эти сходятся к своим суммам $\varphi_j(\omega)$ ($j = -1, 0, 1$), соответственно, в метриках пространств $W_{1/2, \sigma}^{p, \kappa_j}$ ($j = -1, 0, 1$) и равномерно в любом круге $|\omega| < R < +\infty$.

При этом выполняются интерполяционные условия

$$\varphi_{-1,k} = \varphi_{-1}(r_k), \quad (0 \leq k < +\infty); \quad \varphi_{j,k} = \varphi_j(r_k), \quad (j = 0, 1, k \geq 1) \quad (2.19)$$

и двусторонние оценки

$$\|\varphi_{-1}\|_{p, \omega-1} \asymp \|\varphi_{-1}\|_0 \| \cdot \|_{p, \omega-1}, \quad \|\varphi_j\|_{p, \omega_j} \asymp \|\varphi_j\|_1 \| \cdot \|_{p, \omega_j} \quad (j = 0, 1). \quad (2.20)$$

Лемма 2.2. Пусть параметр ν удовлетворяет условию

$$\nu \in \Delta_2 = (\gamma + 2/3, \gamma + 1), \quad \gamma = \frac{2(1 + \omega)}{3p}. \quad (2.21)$$

Тогда посредством рядов вида

$$\varphi_j(w) = \varphi_{j,0} \Gamma(1 + \nu) G_\nu(w; \nu) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{j,k} \frac{w G_\nu(w; \nu)}{r_k G_\nu(r_k; \nu) (w - r_k)} \quad (j = -1, 0), \quad (2.22)$$

$$\varphi_1(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{1,k} \frac{G_\nu(w; \nu)}{G_\nu(r_k; \nu) (w - r_k)} \quad (2.23)$$

одновременно осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение пространств функций $W_{1/2, \nu}^{p, \nu_j}$ ($j = -1, 0, 1$), соответственно, на пространства последовательностей

$$\{\varphi_{j,k}\}_0^\infty \in l^{p, \omega_j} \quad (j = -1, 0); \quad \{\varphi_{1,k}\}_1^\infty \in l^{p, \omega_1}, \quad (2.24)$$

где значения ω_j ($j = -1, 0, 1$) вновь определяются из (2.18).

Природа сходимости этих рядов такая же, что и в лемме 2.1, при этом выполняются интерполяционные условия

$$\varphi_{j,k} = \varphi_j(r_k) \quad (j = -1, 0; 0 \leq k < +\infty); \quad \varphi_{1,k} = \varphi_1(r_k) \quad (k \geq 1). \quad (2.25)$$

и двусторонние оценки

$$\|\varphi_j\|_{p, \nu_j} \asymp \|\{\varphi_{j,k}\}_0^\infty\|_{p, \omega_j} \quad (j = -1, 0); \quad \|\varphi_1\|_{p, \nu_1} \asymp \|\{\varphi_{1,k}\}_1^\infty\|_{p, \omega_1}. \quad (2.26)$$

2.2 (а) Как было установлено в леммах 1.1 и 1.3, посредством формулы

$$\Phi(z) = \sum_{j=-1}^1 z^{1+j} \varphi_j(z^3), \quad (2.27)$$

где

$$\varphi_j(w) \in W_{1/2, \nu}^{p, \nu_j}, \quad \nu_j = \frac{\omega - 2 + (1+j)p}{3} \quad (j = -1, 0, 1) \quad (2.28)$$

исчерпывается весь класс функций $\Phi(z) \in W_{3/2, \nu}^{p, \omega}$ ($1 < p < +\infty, -1 < \omega < p - 1$). При этом имеют место также соотношения обращения

$$\varphi_{-1}(z^3) = 3^{-1} \sum_{k=-1}^1 \Phi(\alpha^k z), \quad z \varphi_0(z^3) = 3^{-1} \sum_{k=-1}^1 \alpha^k \Phi(\alpha^{-k} z), \quad (2.29)$$

$$z^2 \varphi_1(z^3) = 3^{-1} \sum_{k=-1}^1 \alpha^k \Phi(\alpha^k z).$$

Теперь, опираясь на соотношения (2.27)—(2.29) и на леммы 2.1—2.2, установим двусторонние оценки между нормами числовых последовательностей $\{\Phi(\mu_k)\}$, $\{\varphi_j(r_k)\}_{-1}^1$ и функций $\Phi(z)$, $\{\varphi_j(w)\}_{-1}^1$.

При этом, в соответствии с указанными леммами, мы должны различать два случая—когда последовательности корней $\{r_k\}_1^\infty$ функции

$G_0(\omega; \nu)$, или корней $\{\mu_k\}_1^\infty$ функции $e_0(z; \nu) = G_0(z^2; \nu)$ порождаются для значений параметра ν , соответственно, принадлежащих интервалом Δ_1 и Δ_2 .

(6) Напомним, написав их вместе, введенные нами выше обозначения

$$\mu_0^- = r_0 = 0, \mu_k^- = \alpha^{-1} \sqrt[3]{r_k}, \mu_k^0 = \sqrt[3]{r_k}, \mu_k^+ = \alpha \sqrt[3]{r_k} \quad (1 \leq k < +\infty),$$

$$\alpha = \exp \left\{ \frac{2\pi}{3} i \right\}, \quad (2.30)$$

$$\mu_{3k-2}^+ = \mu_k^-, \mu_{3k-1}^+ = \mu_k^0, \mu_{3k}^+ = \mu_k^+ \quad (1 \leq k < +\infty)$$

и таким образом

$$\{\mu_k\}_1^\infty = \{\mu_k^-\}_1^\infty \cup \{\mu_k^0\}_1^\infty \cup \{\mu_k^+\}_1^\infty, \mu_0 = 0.$$

Докажем лемму.

Лемма 2.3. Пусть параметр

$$\nu \in \Delta_1 = \left(\gamma + \frac{1}{3}, \gamma + \frac{2}{3} \right), \quad \gamma = \frac{2(1+\omega)}{3\rho}.$$

Тогда справедливы следующие двусторонние оценки:

$$1^\circ. \quad |\Phi; L_{p, \omega}^r| \asymp \sum_{j=-1}^1 |\Phi; L_{p, \omega_j}^r| \asymp$$

$$\asymp |\varphi_{-1}(r_k)|_0^\infty \|_{p, \omega_{-1}} + |\varphi_0(r_k)|_1^\infty \|_{p, \omega_0} + |\varphi_1(r_k)|_1^\infty \|_{p, \omega_1}, \quad (2.31)$$

для значений $s = 1$ и $s = \rho$.

$$2^\circ. \quad |\Phi; L_{p, \omega}^r| \asymp |\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty|_{p, \omega_{-1}} \quad (2.32)$$

Доказательство. 1°. Утверждения (2.31) непосредственно следуют из лемм 1.3 и 2.1.

2°. Отметим сначала, что ввиду (2.27), (2.30) и обозначений (2.30) будем иметь

$$|\Phi(\mu_0^-)| = |\Phi(0)| = |\varphi_{-1}(r_0)|,$$

$$\left. \begin{aligned} |\Phi(\mu_k^-)| &= |\Phi(\mu_{3k-2}^+)| \\ |\Phi(\mu_k^0)| &= |\Phi(\mu_{3k-1}^+)| \\ |\Phi(\mu_k^+)| &= |\Phi(\mu_{3k}^+)| \end{aligned} \right\} \leq |\varphi_{-1}(r_k)| + r^{1/3} |\varphi_0(r_k)| + r^{2/3} |\varphi_1(r_k)|.$$

Из этих оценок, учитывая, что по (1.26) и (2.18) для $1 \leq k < +\infty$

$$r_k \asymp (1+k)^2; \quad \omega_{-1} + \frac{2}{\rho} = \omega_0, \quad \omega_{-1} + \frac{4}{\rho} = \omega_1, \quad (2.33)$$

получим неравенства вида

$$|\Phi(\mu_0^-)| = |\varphi_{-1}(r_0)|,$$

$$|\Phi(\mu_{3k-2})|(-1+3k)^{\omega-1/p} + |\Phi(\mu_{3k-1})|(3k)^{\omega-1/p} +$$

$$+ |\Phi(\mu_{3k})|(1+3k)^{\omega-1/p} \leq c_p |\varphi_{-1}(r_k)|(1+k)^{\omega-1/p} +$$

$$+ |\varphi_0(r_k)|(1+k)^{\omega/p} + |\varphi_1(r_k)|(1+k)^{\omega_1/p}, \quad 1 \leq k < +\infty,$$

где $c_p > 0$ — постоянные, не зависящие от наших функций и от k .

Возведем все эти неравенства в степень p и пользуясь тем, что вообще $(a+b+c)^p \leq 3^{p-1}(a^p+b^p+c^p)$, $(0 < a, b, c < +\infty)$, суммируем их по индексу $0 \leq k < +\infty$. В результате приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi(\mu_k)|^p (1+k)^{\omega-1} = \|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}^p \leq$$

$$\leq c_p^{(2)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_{-1}(r_k)|^p (1+k)^{\omega-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_0(r_k)|^p (1+k)^{\omega_0} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_1(r_k)|^p (1+k)^{\omega_1} \right\} = c_p^{(2)} \left[\|\varphi_{-1}(r_k)\|_0^p \|_{p, \omega-1} + \|\varphi_0(r_k)\|_1^p \|_{p, \omega_0} + \|\varphi_1(r_k)\|_1^p \|_{p, \omega_1} \right],$$

откуда, в силу оценки (2.31), при $s = p$ получаем

$$\|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1} \leq c_p^{(3)} \|\Phi; L\|_{p, \omega}. \quad (2.32')$$

Для завершения доказательства обратимся теперь к представлениям (2.29) функций $\{\varphi_j(\omega)\}_{-1}^1$, положив в них последовательно $z = \mu_k^-$, $z = \mu_k^0$, $z = \mu_k^+$. Тогда, ввиду (2.30), получим

$$|\varphi_{-1}(r_0)| = |\Phi(0)| = |\Phi(\mu_0)|$$

и для $1 \leq k < +\infty$

$$\left. \begin{aligned} &|\varphi_{-1}(\mu_k^-)| \\ &r_k^{1/3} |\varphi_0(\mu_k^0)| \\ &r_k^{2/3} |\varphi_1(\mu_k^+)| \end{aligned} \right\} \leq \frac{1}{3} (|\Phi(\mu_{3k-2})| + |\Phi(\mu_{3k-1})| + |\Phi(\mu_{3k})|).$$

Как и выше, ввиду (2.33), отсюда следуют неравенства

$$|\varphi_{-1}(r_0)|^p = |\Phi(\mu_0)|^p,$$

$$\left. \begin{aligned} &|\varphi_{-1}(r_k)|^p (1+k)^{\omega-1} \\ &|\varphi_0(r_k)|^p (1+k)^{\omega_0} \\ &|\varphi_1(r_k)|^p (1+k)^{\omega_1} \end{aligned} \right\} \leq c_p^{(4)} \sum_{j=0}^2 |\Phi(\mu_{3k-j})|^p (1+3k-j)^{\omega-1} \quad (1 \leq k < +\infty),$$

суммированием которых по индексу k ($0 \leq k < +\infty$) получаем

$$\|\{\varphi_{-1}(r_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}^p + \|\varphi_0(r_k)\|_1^p \|_{p, \omega_0}^p + \|\varphi_1(r_k)\|_1^p \|_{p, \omega_1}^p \leq$$

$$\leq c_p^{(4)} \|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}^p.$$

Отсюда, в силу (2.31), для $s = p$ приходим к неравенству, обратному к (2.32')

$$\|\Phi\|_{L_{p, \omega-1}} < c^{(4)} \|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}. \quad (2.32')$$

Из (2.32') и (2.32'') следует наше утверждение.

Теперь, наряду с нормой $\|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}$, несколько увеличив ее, определим также норму вида

$$\|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}^{\dot{}} = \left(|\Phi'(\mu_0)|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |\Phi(\mu_k)|^p (1+k)^{\omega-1} \right)^{1/p}. \quad (2.34)$$

Тогда справедлива

Лемма 2.4. Пусть параметр

$$\nu \in \Delta(\Pi) = (\gamma + 2/3, \gamma + 1), \quad \gamma = \frac{2(1+\omega)}{3p}.$$

Тогда справедливы следующие двусторонние оценки:

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad \|\Phi\|_{L_{p, \omega}^{\dot{}}} &\asymp \sum_{j=-1}^1 \|\varphi_j\|_{p, \omega_j}^{\dot{}} \asymp \\ &\asymp \|\varphi_{-1}(r_k)\|_{p, \omega-1}^{\dot{}} + \|\varphi_0(r_k)\|_{p, \omega_0}^{\dot{}} + \|\varphi_1(r_k)\|_{p, \omega_1}^{\dot{}}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

для значений $s = 1$ и $s = p$.

$$2^\circ. \quad \|\Phi\|_{L_{p, \omega}^{\dot{}}} \asymp \|\{\Phi(\mu_k)\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}. \quad (2.36)$$

Доказательство. 1°. Утверждения (2.35) вытекают из лемм 1.3 и 2.1.

2°. В этом случае в (2.35) в записанных справа нормах последовательностей чисел наряду с числом $\varphi_{-1}(r_0) = \Phi(\mu_0) = \Phi(0)$, что имелось уже в лемме 2.3, появилось также число $\varphi_0(r_0) = \Phi'(\mu_0) = \Phi'(0)$. Поэтому повторять выкладки и оценки, проведенные нами в процессе доказательства леммы 2.3, разумеется, нет надобности.

§ 3. Теоремы интерполяции

Перейдем теперь к формулировке и доказательству основных теорем об интерполяционных разложениях целых функций класса $W_{3/2, \sigma}^{p, \omega}$ с узлами в корнях $\{\mu_k\}_1^\infty$ целой функции

$$e_\sigma(z; \nu) = G_\sigma(z^3; \nu) = E_{1/2}(-\sigma^3 z^3; 1 + \nu) \quad (3.1)$$

порядка $3/2$ и типа σ .

3.1 (а) Сначала приведем теорему единственности, непосредственно следующую из двойных оценок (2.31) и (2.36) лемм 2.3 и 2.4.

Теорема 3.1. Пусть $\{\mu_k\}_1^\infty$ — последовательность корней функции $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \omega}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$).

1°. Если

$$\nu \in \Delta_1 = \left(\gamma + \frac{1}{3}, \gamma + \frac{2}{3} \right),$$

то из равенств

$$\Phi(0) = \Phi(\mu_0) = \Phi(\mu_k) = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

следует тождество $\Phi(z) \equiv 0$.

$$2^\circ. \text{ Если } \nu \in \Delta_2 = \left(\gamma + \frac{2}{3}, \gamma + 1\right),$$

и кроме равенств (2.37) имеем также $\Phi'(0) = 0$, то вновь будем иметь $\Phi(z) \equiv 0$.

(6) Теорема 3.2. Пусть $\nu \in \Delta_1 = \left(\gamma + \frac{1}{3}, \gamma + \frac{2}{3}\right)$ и, как всегда

$$\gamma = \frac{2(1+\omega)}{3p} \quad (1 < p < +\infty, -1 < \omega < p-1).$$

1°. Рядами вида

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \Phi_0 \Gamma(1+\nu) e_\sigma(z; \nu) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \frac{z e_\sigma(z; \nu)}{\mu_k e_\sigma(\mu_k; \nu) (z - \mu_k)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l^{p, \omega-1}$ последовательностей $\{\Phi_k\}_0^\infty$ с нормой

$$\|\{\Phi_k\}_0^\infty\|_{p, \omega-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_k|^p (1+k)^{\omega-1}\right)^{1/p} < +\infty, \quad \omega_{-1} = \frac{2\omega-1}{3}$$

на все пространство функций $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \omega}$.

2°. При условии $\|\{\Phi_k\}_0^\infty\|_{p, \omega-1} < +\infty$ ряд вида (3.2) сходится к своей сумме $\Phi(z)$ в метрике пространства $W_{3/2, \sigma}^{p, \omega}$ и равномерно в любом круге $|z| \leq R < +\infty$. При этом выполняются интерполяционные условия

$$\Phi(\mu_k) = \Phi_k \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

и двусторонние неравенства

$$|\Phi|_{L(p, \omega)} \asymp \|\{\Phi_k\}_0^\infty\|_{p, \omega-1}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Для любого элемента $\{\Phi_k\}_0^\infty \in l^{p, \omega-1}$ определим три последовательности чисел $\{\varphi_{-1, k}\}_0^\infty$, $\{\varphi_{0, k}\}_1^\infty$ и $\{\varphi_{1, k}\}_1^\infty$, положив $\varphi_{-1, 0} = \Phi_0$,

$$\varphi_{-1, k} = \frac{1}{3} [\Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \Phi_{3k}],$$

$$r_k^{1/3} \varphi_{0, k} = \frac{1}{3} [\alpha \Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \alpha^{-1} \Phi_{3k}] \quad (1 \leq k < +\infty), \quad (3.5)$$

$$r_k^{2/3} \varphi_{1, k} = \frac{1}{3} [\alpha^{-1} \Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \alpha \Phi_{3k}].$$

Заметив, что $1 + k \asymp 1 + 3k \asymp 3k \asymp 3k - 1$ ($1 < k < +\infty$) и пользуясь неравенством Минковского, получим

$$\begin{aligned} \| \{\varphi_{-1, k}\}_0^\infty \|_{p, \omega_{-1}} &\leq c_p \{ \| \{\Phi_{3k-2}\}_1^\infty \|_{p, \omega_{-1}} + \| \{\Phi_{3k-1}\}_1^\infty \|_{p, \omega_{-1}} + \\ &+ \| \{\Phi_{3k}\}_0^\infty \|_{p, \omega_{-1}} \} \leq 3 c_p \| \{\Phi_k\} \|_{p, \omega_{-1}}, \end{aligned}$$

и, значит, $\{\varphi_{-1, k}\}_0^\infty \in l^{p, \omega_{-1}}$. Вполне аналогично убедимся также в том, что $\{\varphi_{0, k}\}_1^\infty \in l^{p, \omega_0}$ и $\{\varphi_{1, k}\}_1^\infty \in l^{p, \omega_1}$, если еще раз вспомним, что $r_k \asymp (1+k)^2$ и $\omega_{-1} + \frac{2p}{3} = \omega_0$, $\omega_{-1} + \frac{4p}{3} = \omega_1$.

С помощью введенных нами трех последовательностей, посредством трех рядов (2.15) и (2.16) леммы 2.1 образуем три функции $\varphi_j(\omega) \in W_{11, \sigma}^{p, \lambda_j}$ ($j = -1, 0, 1$), которые по той же лемме удовлетворяют ин-терполяционным условиям (2.19). Наконец, с помощью введенных трех функций мы можем определить уже функцию

$$\Phi(z) = \varphi_{-1}(z^3) + z \varphi_0(z^3) + z^2 \varphi_1(z^3),$$

входящую в класс $W_{3, \sigma}^{p, \alpha}$ согласно лемме 1.3.

Если теперь воспользоваться разложениями (2.14)—(2.16) леммы 2.1, то функцию $\Phi(z)$ сможем представить в виде суммы ряда

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \varphi_{-1, 0} \Gamma(1 + \nu) e_\nu(z; \nu) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z e_\nu(z; \nu)}{r_k G'_\nu(r_k; \nu) (z^3 - r_k)} [\varphi_{-1, k} z^3 + \varphi_{0, k} r_k + \varphi_{1, k} r_k^2]. \end{aligned}$$

Однако, пользуясь формулами (3.5) и тем, что $\alpha^3 = 1$, мы получим

$$\begin{aligned} &\varphi_{-1, k} z^3 + \varphi_{0, k} r_k + \varphi_{1, k} r_k z = \\ &= \frac{1}{3} \{ [z^3 + (\alpha^{-1} r_k^{1/3})^3] + (\alpha^{-1} r_k^{1/3}) z \} \Phi_{3k-2} + \\ &+ [z^3 + r_k^{2/3} + r_k^{1/3} z] \Phi_{3k-1} + [z^2 + (\alpha r_k^{1/3})^3 + (\alpha r_k^{1/3}) z] \Phi_{3k} = \\ &= \frac{1}{3} (z^3 - r_k) \left\{ \frac{\Phi_{3k-2}}{z - \mu_k^-} + \frac{\Phi_{3k-1}}{z - \mu_k^0} + \frac{\Phi_{3k}}{z - \mu_k^+} \right\}, \end{aligned}$$

так как $\mu_k^0 = r_k^{1/3}$, $\mu_k^- = \alpha^{-1} \mu_k^0$, $\mu_k^+ = \alpha \mu_k^0$.

Следовательно, поскольку $\varphi_{-1, 0} = \Phi_0$, то разложение функции $\Phi(z)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0 \Gamma(1 + \nu) e_\nu(z; \nu) + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z e_\nu(z; \nu)}{r_k G'_\nu(r_k; \nu)} \left\{ \frac{\Phi_{3k-2}}{z - \mu_k^-} + \frac{\Phi_{3k-1}}{z - \mu_k^0} + \frac{\Phi_{3k}}{z - \mu_k^+} \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, наконец, что по (2.30)

$$(\mu_{3k-2})^3 = (\mu_{3k-1})^3 = (\mu_{3k})^3 = r_k, \quad (3.7)$$

а также, что в силу (3.1) $z e'_\nu(z; \nu) = 3z^2 G'_\nu(z^3; \nu)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu_{3k-2} e'_\sigma(\mu_{3k-2}; \nu) &= \mu_{3k-1} e'_\sigma(\mu_{3k-1}; \nu) = \\ &= \mu_{3k} e'_\sigma(\mu_{3k}; \nu) = 3 r_k G'_\sigma(r_k; \nu), \end{aligned}$$

вследствие чего наше разложение запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0 \Gamma(1 + \nu) e_\sigma(z; \nu) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \frac{z e_\sigma(z; \nu)}{\mu_k e'_\sigma(\mu_k; \nu) (z - \mu_k)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Что касается природы сходимости этого разложения, то оно непосредственно следует из того, что подставляемые нами в формулу (3.6) ряды всех трех функций $\{z^{1+j/\nu}, (z^3)\}_{j=1}^{\infty}$, согласно лемме 2.1, сходятся уже в одной и той же метрике $W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$, а также равномерно в любом круге $|z| \leq R < +\infty$. Легко убедиться, что построенная таким образом функция $\Phi(z)$ удовлетворяет интерполяционным данным: $\Phi(\mu_k) = \Phi_k (k=0, 1, 2, \dots)$.

Итак, любому элементу $\{\Phi_k\}_0^{\infty} \in l^{p, \infty-1}$ посредством ряда (3.8), обладающим требуемыми теоремой свойствами сходимости, нами был поставлен в соответствие некоторый элемент $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ со свойством (3.3). Поэтому, согласно лемме 2.3, верны и двойные оценки (3.4) теоремы.

Теперь проведем обратное рассуждение. Если $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$, то по лемме 2.3 $\{\Phi(\mu_k)\}_0^{\infty} \in l^{p, \infty-1}$. Поэтому сумма ряда

$$\begin{aligned} \Phi_*(z) &= \Phi(\mu_0) \Gamma(1 + \nu) e_\sigma(z; \nu) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(\mu_k) \frac{z e_\sigma(z; \nu)}{\mu_k e'_\sigma(\mu_k; \nu) (z - \mu_k)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

как уже было установлено выше, определяет функцию $\Phi_*(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ с интерполяционными данными

$$\Phi_*(\mu_k) = \Phi(\mu_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Но очевидно, что имеем также

$$\psi(z) \equiv \Phi_*(z) - \Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$$

причем $\psi(\mu_k) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$.

Отсюда по теореме единственности 3.1 следует, что $\psi(z) \equiv 0$. А это значит, что $\Phi_*(z) \equiv \Phi(z)$ и, как нетрудно проследить, теорема полностью доказана.

(в) Теперь обозначим через $l^{p, \infty-1}$ пространство последовательностей комплексных чисел $\{\Phi_k\}_0^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|\{\Phi_k\}_0^{\infty}\|_{p, \infty-1} = \{|\Phi_0|^p + \sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_k|^p (1+k)^{\nu-1}\}^{1/p} < +\infty. \quad (3.10)$$

Теорема 3.3. Пусть $\nu \in \Delta_2 = \left(\gamma + \frac{2}{3}, \gamma + 1\right)$, где, по-прежнему

$$\gamma = \frac{2(1+\omega)}{3\rho} \quad (1 < \rho < +\infty, -1 < \omega < \rho - 1).$$

1°. Рядами вида

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \Phi_0 \Gamma(1+\nu) e_\nu(z; \nu) + \Phi_0^* \Gamma(1+\nu) z e_\nu(z; \nu) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \frac{z^k e_\nu(z; \nu)}{\mu_k^2 e_\nu(\mu_k; \nu) (z - \mu_k)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

реализуется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l_{\sigma}^{p, \infty-1}$ последовательностей $\{\Phi_0, [\Phi_k]_0^{\infty}\}$ на все пространство целых функций $\mathcal{W}_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$.

2°. При условии $\{\Phi_0, [\Phi_k]_0^{\infty}\} \in l_{\sigma}^{p, \infty-1}$ ряд вида (3.11) сходится к своей сумме $\Phi(z)$ в метрике пространства $\mathcal{W}_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ и равномерно в любом круге $|z| \leq R < +\infty$. Кроме того, функция $\Phi(z)$ удовлетворяет интерполяционным данным

$$\Phi'(\mu_0) = \Phi'(0) = \Phi_0', \quad \Phi(\mu_k) = \Phi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.12)$$

и двусторонним неравенствам

$$|\Phi; L|_{p, \omega} \asymp \|[\Phi_k]_0^{\infty}\|_{p, \infty-1}. \quad (3.13)$$

Доказательство. В основном оно аналогично способу доказательства теоремы 3.2, и поэтому мы отметим лишь его главные элементы.

Для данного элемента $[\Phi_k]_0^{\infty} \in l_{\sigma}^{p, \infty-1}$ определим три последовательности чисел $\{\varphi_{-1, k}\}_0^{\infty}$, $\{\varphi_{0, k}\}_0^{\infty}$ и $\{\varphi_{1, k}\}_1^{\infty}$, обозначив

$$\varphi_{-1, 0} = \Phi_0,$$

$$\varphi_{-1, k} = \frac{1}{3} [\Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \Phi_{3k}], \quad (3.14)$$

$$\varphi_{0, 0} = \Phi_0',$$

$$r_k^{1/3} \varphi_{0, k} = \frac{1}{3} [\alpha \Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \alpha^{-1} \Phi_{3k}],$$

$$r_k^{2/3} \varphi_{1, k} = \frac{1}{3} [\alpha^{-1} \Phi_{3k-2} + \Phi_{3k-1} + \alpha \Phi_{3k}].$$

Далее, как и в теореме 3.2, убеждаемся, что эти последовательности имеют конечные нормы, соответственно, в пространствах $l_{\sigma}^{p, \infty j}$ ($j = -1, 0, 1$). Но тогда с помощью введенных нами трех последовательностей, мы, пользуясь формулами (2.22) и (2.23) леммы 2.2, сможем образовать три функции $\varphi_j(\omega) \in \mathcal{W}_{1/2, \sigma}^{p, \infty j}$ ($j = -1, 0, 1$), которые удовлетворяют интерполяционным условиям (2.25).

Посредством этих трех функций определяем, далее функцию

$$\Phi(z) = \varphi_{-1}(z^3) + z \varphi_0(z^3) + z^2 \varphi_1(z^3) \in \mathcal{W}_{3/2, \sigma}^{p, \infty},$$

которая, в силу разложений (2.22) и (2.23) леммы 2.2, может быть представлена в виде суммы ряда

$$\Phi(z) = \varphi_{-1,0} \Gamma(1+\nu) e_\nu(z; \nu) + \varphi_{0,0} \Gamma(1+\nu) z e_\nu(z; \nu) + \\ + \sum \frac{z^2 e_\nu(z; \nu)}{r_k e'_\nu(r_k; \nu) (z^2 - r_k)} [r_k \varphi_{1,k} + z^2 \varphi_{0,k} + z \varphi_{-1,k}]. \quad (3.15)$$

Но пользуясь значениями из (3.14) и тем, что $\mu_k^- = \alpha^{-1} r_k^{1/3}$, $\mu_k^0 = r_k^{1/3}$, $\mu_k^+ = \alpha r_k^{1/3}$, мы получим тождество

$$\frac{z \varphi_{-1,k} + z^2 \varphi_{0,k} + r_k \varphi_{1,k}}{z^2 - r_k} = \\ = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\Phi_{3k-2}}{\mu_k^-(z - \mu_k^-)} + \frac{\Phi_{3k-1}}{\mu_k^0(z - \mu_k^0)} + \frac{\Phi_{3k}}{\mu_k^+(z - \mu_k^+)} \right\}.$$

Отсюда следует, что разложение (3.15) можно записывать в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0 \Gamma(1+\nu) e_\nu(z; \nu) + \Phi_0^* \Gamma(1+\nu) z e_\nu(z; \nu) + \\ + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2 e_\nu(z; \nu)}{r_k G'_\nu(r_k; \nu)} \left\{ \frac{\Phi_{3k-2}}{\mu_k^-(z - \mu_k^-)} + \right. \\ \left. + \frac{\Phi_{3k-1}}{\mu_k^0(z - \mu_k^0)} + \frac{\Phi_{3k}}{\mu_k^+(z - \mu_k^+)} \right\}. \quad (3.15')$$

Но вновь пользуясь свойствами (3.7) нашей последовательности $\{\mu_k\}$, заключаем, что (3.15') эквивалентна разложению (3.11) теоремы.

Все остальные утверждения теоремы устанавливаются рассуждениями, вполне аналогичными схеме доказательства теоремы 3.2, и поэтому мы их опускаем.

§ 4. Построение биортогональных систем трехкомпонентных вектор-функций

4.1 (а) Приведем, во-первых, формулировки двух основных теорем — специальные случаи ранних, значительно более общих результатов развитой первым из авторов теории гармонического анализа в комплексной области.

Отметим сначала же, что согласно определению (1.16), в случае, когда $\rho = 2$, класс $W_{3/2, \omega}^{2, \omega}$ ($-1 < \omega < 1$) — это множество целых функций $\Phi(z)$ порядка $\rho = 3/2$ и типа $\leq \tau$ с нормой

$$\|\Phi; L\|_{2, \omega} = \left(\int_L |\Phi(z)|^2 |z|^\omega |dz| \right)^{1/2} = \\ = \left(\sum_{j=-1}^1 \int_0^\infty |\Phi(jr)|^2 r^\omega dr \right)^{1/2} < +\infty, \quad (4.1)$$

где $\alpha = \exp\left\{\frac{2\pi}{3}i\right\}$.

Первая из этих теорем следующая (см. [1], гл. IV, теорему 4.1 в частном случае, когда $\rho = 3/2$).

Теорема III. Пусть $1/2 < \mu < 7/6$ и $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$. Тогда
1°. Интеграл

$$F(z) = \int_0^{\sigma} E_{3/2}(z\tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

определяет целую функцию порядка $\leq 3/2$ и типа $\leq \sigma$.

2°. Справедливо неравенство вида

$$\sup_{\pi/3 < |\varphi| < \pi} \left\{ \int_0^{\infty} |F(re^{-i\varphi})|^2 r^{\omega} dr \right\} \leq M_{\mu} \int_0^{\sigma} |\varphi(\tau)|^2 d\tau, \quad (4.3)$$

где $\omega = 3\mu - 5/2$ и M_{μ} — постоянная, зависящая только от μ .

Второй необходимый нам результат — это теорема о параметрическом представлении класса $W_{3/2, \omega}^2$. Она является частным случаем другой сб-щей теоремы автора.

Для ее формулировки сначала введем обозначения

$$-\pi < \vartheta_{-1} = -\frac{2\pi}{3} < \vartheta_0 = 0 < \vartheta_1 = \frac{2\pi}{3} < \pi < \vartheta_2 = \vartheta_{-1} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \quad (4.4)$$

и заметим, что условие $\Phi(z) \in W_{3/2, \omega}^2$ ($-1 < \omega < 1$) эквивалентно требованию о конечности интегралов

$$\int_0^{\infty} |\Phi(re^{-i\vartheta_j})|^2 r^{\omega} dr < +\infty \quad (j = -1, 0, 1). \quad (4.1')$$

Отметим еще, что в данном случае угловые области $(\vartheta_j, \vartheta_{j+1})$ ($j = -1, 0, 1$) имеют одинаковые растворы, равные $2\pi/3$, т. к. $\vartheta_0 - \vartheta_{-1} = \vartheta_1 - \vartheta_0 = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \frac{2\pi}{3}$, а их биссектрисы направлены по лучам

$$\arg z = \vartheta_j = \frac{1}{2}(\vartheta_j + \vartheta_{j+1}) \quad (j = -1, 0, 1).$$

Заметив еще, что таким образом

$$\vartheta_{-1} = -\pi/3, \quad \vartheta_0 = \pi/3, \quad \vartheta_1 = \pi, \quad (4.5)$$

мы будем иметь (см. [1], теорему 6.13, при $\rho = 3/2$).

Теорема IV. 1°. Класс $W_{3/2, \omega}^2$ ($-1 < \omega < 1$) совпадает с множеством функций $\Phi(z)$, допускающих представление

$$\Phi(z) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2}(e^{i\vartheta_j} z\tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi_j(\tau) d\tau, \quad (4.6)$$

где $\mu = 5/6 + \omega/3$, $\varphi_j(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ ($j = -1, 0, 1$).

2°. Функции $\varphi_j(\tau)$ ($j = -1, 0, 1$) единственным образом определяются из формул

$$\frac{2i}{3\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \psi_{j+1}(-\tau) - e^{i\frac{\pi}{2}\mu} \psi_j(\tau) \right\} =$$

$$= \begin{cases} \varphi_j(\tau), & \tau \in (0, \sigma) \\ 0, & \tau \in (\sigma, +\infty) \end{cases} \quad (j = -1, 0, 1), \quad (4.7)$$

где почти всюду на $(-\infty, \infty)$

$$\psi_j(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\sigma} \frac{e^{-i\tau\nu} - 1}{-i\nu} \Phi(e^{-i\theta_j} \nu^{2/3}) \nu^{\mu-1} d\nu. \quad (4.8)$$

Иначе говоря, посредством формул (4.6), (4.7), (4.8) реализуется линейное, взаимно-однозначное соответствие между элементами пространства $W_{3/2, \sigma}^{\omega}$ ($-1 < \omega < 1$) целых функций $\Phi(z)$ с нормой $\|\Phi; L_{2, \omega}$ и элементами пространства $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{j=-1}^1$, $\varphi_j(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ с нормой

$$\|\varphi\| = \left(\sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} |\varphi_j(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}. \quad (4.9)$$

Упомянутое соответствие, кроме того, непрерывное, поскольку справедлива

Лемма 4.1. В дополнение к утверждениям теоремы IV, имеет место также двойная оценка

$$\|\Phi, L_{2, \omega} \simeq \|\varphi\|. \quad (4.10)$$

Доказательство. Во-первых, из (4.8) по равенству Парсеваля вытекает

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j(\tau)|^2 d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j(\tau)|^2 d\tau =$$

$$= \int_0^{\sigma} |\Phi(e^{-i\theta_j} \nu^{2/3})|^2 \nu^{2(\mu-1)} d\nu = \frac{3}{2} \int_0^{\sigma} |\Phi(e^{-i\theta_j} r)|^2 r^{\omega} dr \quad (j = -1, 0, 1),$$

так как $\mu = \frac{5 + 2\omega}{6}$.

Отсюда и из (4.7), во-вторых, вытекает неравенство

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} |\varphi_j(\tau)|^2 d\tau < \sum_{j=-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$< \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} |\Phi(e^{-i\theta_j} r)|^2 r^{\omega} dr \leq \|\Phi; L_{2, \omega}$$

т. е. одна из двусторонних оценок (4.10) леммы.

С целью установления второй из указанных оценок, введем в рассмотрение целые функции

$$\Phi_j(z) = \int_0^{\sigma} E_{3/2}(e^{i\theta_j} z^{-2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \varphi_j(\tau) d\tau, \quad (4.11)$$

полагая $\varphi_j(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ ($j = -1, 0, 1$).

Заметим, что если ввести в рассмотрение интервалы изменения переменной $\varphi \in (-\infty, \infty)$

$$\Delta_j = \left\{ \varphi; |\theta_j - \varphi| \geq \frac{\pi}{3} \right\} \quad (j = -1, 0, 1),$$

то согласно теореме III

$$\sup_{\varphi \in \Delta_j} \left\{ \int_0^{\sigma} |\Phi_j(r e^{-i\varphi})|^2 r^{\mu} dr \right\} \leq M_{\mu} \int_0^{\sigma} |\varphi_j(\tau)|^2 d\tau \quad (j = -1, 0, 1);$$

Легко убедиться в том, что последние оценки одновременно могут выполняться для всех наших функций $\Phi_j(r e^{-i\varphi})$ ($j = -1, 0, 1$), если только $\varphi = \theta_k$ ($k = 1, 0, 1$).

Следовательно, справедливы неравенства

$$\int_0^{\sigma} |\Phi_j(r e^{-i\theta_k})|^2 r^{\mu} dr \leq M_{\mu} \int_0^{\sigma} |\varphi_j(\tau)|^2 d\tau \quad (k, j = -1, 0, 1),$$

и так как по (4.6) и (4.11)

$$\Phi(z) = \sum_{j=-1}^1 \Phi_j(z),$$

то мы будем иметь

$$\left(\int_0^{\sigma} |\Phi(r e^{-i\theta_k})|^2 r^{\mu} dr \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} |\Phi_j(r e^{-i\theta_k})|^2 r^{\mu} dr \right)^{1/2}.$$

Итак, оба неравенства (4.10) леммы доказаны.

(б) Установим теперь две простые, но важные леммы о функциях типа Миттаг-Леффлера $E_{3/2}(z; \mu)$.

Лемма 4.2.* Для любых z и $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < \mu_1, \mu_2 < \infty$ справедлива формула

$$\begin{aligned} J_{\sigma}(z; \lambda; \mu_1; \mu_2) &\equiv \int_0^{\sigma} E_{3/2}(z \tau^{2/3}; \mu_1) \tau^{\mu_1-1} E_{3/2}(\lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; \mu_2) (\sigma - \tau)^{\mu_2-1} d\tau = \\ &= \sigma^{\mu_1 + \mu_2 - 5/3} \frac{E_{3/2}(\sigma^{2/3} z; \mu_1 + \mu_2 - 2/3) - E_{3/2}(\sigma^{2/3} \lambda; \mu_1 + \mu_2 - 2/3)}{z - \lambda}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Доказательство. Пользуясь разложениями функций, стоящих под интегралом J_{σ} и полагая, что $\lambda \neq 0$, последовательно мы получим

* Частный случай известной леммы (см. [1], стр. 121).

$$\begin{aligned}
 J_0(z, \lambda; \mu_1; \mu_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n \cdot \lambda^m}{\Gamma(\mu_1 + 2n/3) \Gamma(\mu_2 + 2m/3)} \int_0^{\sigma} \tau^{\frac{2n}{3} + \mu_1 - 1} \times \\
 &\times (\sigma - \tau)^{2\mu_2/3 + \mu_2 - 1} d\tau = \sigma^{\mu_1 + \mu_2 - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{z^n \lambda^{k-n} \sigma^{2k/3}}{\Gamma\left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{2k}{3}\right)} = \\
 &= \sigma^{\mu_1 + \mu_2 - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \sigma^{2k/3}}{\Gamma\left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{2k}{3}\right)} \sum_{k=0}^n \left(\frac{z}{\lambda}\right)^k = \\
 &= \frac{\sigma^{\mu_1 + \mu_2 - 1}}{z - \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^{k+1} - \lambda^{k+1}) \sigma^{2k/3}}{\Gamma\left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{2k}{3}\right)}.
 \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду очевидного тождества

$$z E_{3/2}(z; \mu + 2/3) = E_{3/2}(z; \mu) - \frac{1}{\Gamma(\mu)}$$

приходим к требуемой интегральной формуле (4.12), очевидно, справедливой и при $\lambda = 0$.

Комбинируя три тождества леммы 1.2 с интегральной формулой (4.12), мы последовательно приходим к трем тождествам следующей леммы.

Лемма 4.3. Для любых $z; \lambda \in \mathbb{C}$ и $\alpha = \exp\left\{\frac{2\pi}{3}i\right\}$, при соответствующих условиях, налагаемых на параметры μ и ν , будем иметь

1°. При $\mu > 0$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-1}^1 \alpha^k \int_0^{\sigma} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu\right) \tau^{\mu-1} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; \mu\right) (\sigma - \tau)^{\mu-1} d\tau = \\
 = \frac{3z^{-\frac{1}{2}} \sigma^{\mu-1}}{z - \lambda} \left\{ e_{\sigma}(z; \mu - 1) - e_{\sigma}(\lambda; \mu - 1) \right\}. \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

2°. При $0 < \mu < 1 + \nu, \nu \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu\right) \tau^{\mu-1} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; 1 + \nu - \mu\right) (\sigma - \tau)^{\nu-\mu} d\tau = \\
 = \frac{3\sigma^{\nu}}{z - \lambda} \left\{ z e_{\sigma}(z; \nu) - \lambda e_{\sigma}(\lambda; \nu) \right\}. \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

3°. При $0 < \mu < \frac{1}{3} + \nu, \nu \geq 0$

$$\sum_{k=-1}^1 \alpha^{-k} \int_0^{\sigma} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu\right) \tau^{\mu-1} E_{3/2}\left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} (\sigma - \tau)^{2/3}; \right.$$

$$\nu + \frac{1}{3} - \mu \left(\sigma - \tau \right)^{\nu - \frac{2}{3} - \mu} d\tau = \frac{3\alpha^{\frac{1}{2}} \sigma^\nu}{z - \lambda} \left\{ z^2 e_\sigma(z; \nu) - \lambda^2 e_\sigma(\lambda; \nu) \right\}. \quad (4.15)$$

При этом здесь, как и в § 3

$$e_\sigma(z; \nu) = E_{1/2}(-\sigma^2 z^3; 1 + \nu). \quad (4.16)$$

Доказательство. 1°. Если в формуле (4.12) леммы 4.2 положить

$$\mu_1 = \mu > 0, \mu_2 = 2/3; z \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} z, \lambda \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda,$$

то в результате получим

$$\int_0^\sigma E_{3/2} \left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} z^{-2/3}; \mu \right) \tau^{\mu-1} E_{3/2} \left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; \frac{2}{3} \right) (\sigma - \tau)^{\frac{2}{3}-1} d\tau = \\ = \sigma^{\mu-1} \alpha^{-k - \frac{1}{2}} \frac{E_{3/2} \left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \sigma^{2/3} z; \mu \right) - E_{3/2} \left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; \mu \right)}{z - \lambda} \quad (k = -1, 0, 1)$$

Умножим теперь обе части этого тождества на α^k и просуммируем по k ($k = -1, 0, 1$). Тогда, в силу первой из формул (1.11) леммы 1.2, мы приходим к формуле (4.13).

2°. Произведем в формуле (4.12) замены переменных $z \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} z$, $\lambda \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda$, а параметры заменим таким образом: $\mu_1 = \mu > 0$, $\mu_2 = 1 + \nu - \mu > 0$.

Тогда, во-первых, получим

$$\int_0^\sigma E_{3/2} \left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} z^{-2/3}; \mu \right) \tau^{\mu-1} E_{3/2} \left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; 1 + \nu - \mu \right) (\sigma - \tau)^{\nu-\mu} d\tau = \\ = \sigma^{\nu - \frac{2}{3}} \alpha^{-k - \frac{1}{2}} \frac{E_{3/2} \left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} z^{-2/3}; \frac{1}{3} + \nu \right) - E_{3/2} \left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda \frac{2}{3}; \frac{1}{3} + \nu \right)}{z - \lambda}.$$

Как и выше, просуммируем эти формулы по индексу k . ($k = -1, 0, 1$). Тогда, пользуясь второй из формул (1.11) леммы 1.2, получим тождество (4.14).

3°. Наконец, в тождестве (4.12) леммы 4.2 вновь произведем замену

$z \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} z$, $\lambda \rightarrow \alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda$, но параметры заменим таким образом: $\mu_1 = \mu > 0$, $\mu_2 = \frac{1}{3} + \nu - \mu$. Тогда формула (4.12) леммы 4.1 принимает вид

$$\int_0^\sigma E_{3/2} \left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} z^{-2/3}; \mu \right) \tau^{\mu-1} E_{3/2} \left(\alpha^{k + \frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; \frac{1}{3} + \nu - \mu \right) (\sigma - \tau)^{\nu - \frac{2}{3}} d\tau =$$

$$= \sigma \frac{-\frac{1}{3} - k - \frac{1}{2} E_{3,2} \left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{2}{3}} z; \nu - \frac{1}{3} \right) - E_{3,2} \left(\alpha^{k+\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{2}{3}} \lambda; \nu - \frac{1}{3} \right)}{z - \lambda}.$$

Умножим эти формулы на z^k ($k = -1, 0, 1$), заметив, что в результате справа вместо $\alpha^{-k-\frac{1}{2}}$ появится множитель $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. Тогда, суммируя их по индексу $k = -1, 0, 1$, получим требуемое тождество (1.15), в силу третьего из тождеств (1.11) леммы 1.2.

В заключение отметим, что в дальнейшем изложении мы будем пользоваться лишь тождеством (4.14) доказанной леммы.

4.2 (а) В начале § 2 мы определили последовательность чисел $\{\mu_k\}_1^\infty$ — множество всех корней функции

$$e_\nu(z; \nu) = E_{1,2}(-\sigma^2 z^3; 1 + \nu) \quad (0 \leq \nu < 2).$$

Вспомним, что все эти корни простые и записываются формулами (2.3)—(2.5) или (3.7) и лежат на трех лучах

$$l_j = \left\{ z; \arg z = \frac{2\pi}{3} j \right\} \quad (j = -1, 0, 1)$$

комплексной плоскости z .

Для значения $\nu = 1$ имеем целую функцию $e_\nu(z; 1) = \frac{\sin \sigma z^{3/2}}{\sigma z^{3/2}}$ порядка $\frac{3}{2}$ и типа σ . Поэтому легко видеть, что в этом случае множество корней $\{\mu_k\}_1^\infty$ функции $e_\nu(z; \nu)$ запишется в явном виде

$$\mu_{3k-2} = \alpha^{-1} \sqrt[3]{r_k}, \quad \mu_{3k-1} = \sqrt[3]{r_k}, \quad \mu_{3k} = \alpha \sqrt[3]{r_k} \quad (1 \leq k < +\infty), \quad (4.17)$$

где

$$\alpha = \exp \left\{ i \frac{2\pi}{3} \right\}, \quad r_k = \left(\frac{\pi}{\sigma} k \right)^2 \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (4.17')$$

Отметим далее, что при $p = 2$ в интерполяционных теоремах 3.2 и 3.3 на параметр ν нам уже следует, соответственно, накладывать такие ограничения

$$\nu \in \delta_1 = \left(\frac{2+\omega}{3}, \frac{3+\omega}{3} \right) \quad \text{и} \quad \nu \in \delta_2 = \left(\frac{3+\omega}{3}, \frac{4+\omega}{3} \right), \quad (4.18)$$

где $-1 < \omega < 1$.

Отсюда легко вытекает, что при $p = 2$ в теоремах 3.2 и 3.3 узлами $\{\mu_k\}_1^\infty$ интерполяционных разложений можно брать одну и ту же явную последовательность (4.17)—(4.17'), если только будем предполагать, что в определении весового пространства $\mathbb{W}_{3/2, \sigma}^2$ параметр ω на степень весовой функции $|z|^\omega$, соответственно, принадлежит интервалу $(0, 1)$ или $(-1, 0)$.

(б) В соответствии с двумя интервалами (4.18) изменения параметра ν , мы, во-первых, введем в рассмотрение две системы целых функций порядка $3/2$ типа σ :

$$P_n(z; \nu) = z e_\nu(z; \nu), \quad \nu \in \delta_1, \quad (4.19)$$

$$Q_\nu(z; \nu) = z^2 e_\nu(z; \nu), \quad \nu \in \delta_2.$$

Кроме корня $\mu_0 = 0$ все корни функций (4.19) наряду с корнями функции $e_\nu(z; \nu)$ простые и совпадают с последовательностью $\{\mu_k\}_1^\infty$.

Корень же $\mu_0 = 0$ простой для $P_\nu(z; \nu)$ и двукратный для $Q_\nu(z; \nu)$.

После введения указанных двух функций (4.19), мы, во-вторых, можем перейти к определению ассоциированных с ними двух счетных систем целых функций

$$\{R_n(z; \nu)\}_0^\infty \text{ и } \{S_0^*(z; \nu), \{S_n(z; \nu)\}_0^\infty\}. \quad (4.20)$$

Эти системы мы определим таким образом:

$$\text{при } \nu \in \delta_1 = \left(\frac{2 + \omega}{3}, \frac{3 + \omega}{3} \right),$$

$$R_k(z; \nu) = \frac{P_\nu(z; \nu)}{P_\nu'(\mu_k; \nu)(z - \mu_k)}, \quad (0 \leq k < +\infty), \quad (4.21)$$

$$\text{при } \nu \in \delta_2 = \left(\frac{3 + \omega}{3}, \frac{4 + \omega}{3} \right),$$

$$S_0^*(z; \nu) = \Gamma(1 + \nu) \frac{Q_\nu(z; \nu)}{z}, \quad S_0(z; \nu) = \Gamma(1 + \nu) \frac{Q_\nu(z; \nu)}{z^2}, \quad (4.22)$$

$$S_k(z; \nu) = \frac{Q_\nu(z; \nu)}{Q_\nu'(\mu_k; \nu)(z - \mu_k)} \quad (1 \leq k < +\infty).$$

Из наших определений непосредственно следует, что введенные системы (4.20) обладают следующими интерполяционными свойствами:

$$R_k(\mu_n; \nu) = \delta_{k,n} \quad (0 \leq k, n < +\infty), \quad (4.23)$$

$$S_k(\mu_n; \nu) = \delta_{k,n} \quad (0 \leq k, n < +\infty),$$

$$S_0^*(\mu_n; \nu) = 0 \quad (0 \leq n < +\infty), \quad \frac{d}{dz} [S_0^*(z; \nu)]_{z=\mu_n=0} = 1. \quad (4.23')$$

Далее, принимая во внимание обозначения (4.19), (4.21) и (4.22), отметим также, что из общих теорем 3.2 и 3.3, в частности, вытекают также

Следствие 1. При $\nu \in \delta_1$

$$\left\{ z \frac{e_\nu(z; \nu)}{z - \mu_k} \right\}_0^\infty \equiv \left\{ \frac{P_\nu(z; \nu)}{z - \mu_k} \right\}_0^\infty \subset W_{3/2, \nu}^{2, \infty}, \quad (4.24)$$

Следствие 2. При $\nu \in \delta_1$

$$\left\{ e_\nu(z; \nu), \left\{ \frac{z^2 e_\nu(z; \nu)}{z - \mu_k} \right\} \right\} \equiv \left\{ \frac{Q_\nu(z; \nu)}{z^2}, \left\{ \frac{Q_\nu(z; \nu)}{z - \mu_k} \right\}_0^\infty \right\} \subset W_{3/2, \nu}^{2, \infty}. \quad (4.25)$$

В соответствии с этими системами, полагая всегда, что

$$-1 < \omega < 1, \mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}, \quad (4.26)$$

мы рассмотрим два случая для значений параметра ν и соответствующих интегральных представлений для наших систем (4.24) и (4.25).

1°. При

$$\nu \in \tilde{\delta}_1 \equiv \left(\mu, \frac{3+\omega}{3} \right) \subset \delta_1 \quad (4.27)$$

или

2°. При $\nu \in \delta_2$, когда параметр $\mu < \frac{3+\omega}{3}$, т. е. лежит слева интервала изменения параметра ν .

В обоих случаях, согласно теореме IV, положив

$$\theta_j = \frac{2\pi}{3} \left(j + \frac{1}{2} \right) \quad (j = -1, 0, 1) \quad (4.28)$$

будем иметь:

1°.

$$R_n(z; \nu) =$$

$$= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2} \left\{ e^{i\theta_j} z \tau^{\frac{2}{3}}; \mu \right\} \tau^{\mu-1} r_{n,j}(\tau) d\tau, \quad \nu \in \tilde{\delta}_1 \quad (n=0, 1, \dots), \quad (4.29)$$

где трехкомпонентные вектор-функции $r_k(\tau) = \{r_{k,j}\}_{j=-1}^1$ единственны и из класса $L_2(0, \sigma)$.

2°.

$$S_0^*(z; \nu) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2} \left(e^{i\theta_j} z \tau^{\frac{2}{3}}; \mu \right) \tau^{\mu-1} S_{0,j}^*(\tau) d\tau, \quad \nu \in \delta_2, \quad (4.30)$$

$$S_n(z; \nu) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2} \left(e^{i\theta_j} z \tau^{\frac{2}{3}}; \mu \right) \tau^{\mu-1} S_{n,j}(\tau) d\tau \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где трехкомпонентные вектор-функции $S^*(\tau) = \{S_{0,j}\}_{j=-1}^1$ и $S_n(\tau) = \{S_{n,j}(\tau)\}_{j=-1}^1$ также единственны и из класса $L_2(0, \sigma)$.

В представлениях (4.29) и (4.30) искомые последовательности вектор-функций $\{r_n(\tau)\}$ и $\{S_0^*(\tau), \{S_n(\tau)\}_0^{\infty}\}$ могут быть определены посредством формул обращения теоремы IV (2°). Однако ниже мы найдем их в виде явных формул, пользуясь леммой 4.3, притом при меньших ограничениях на параметры μ и ν .

Теорема 4.1. 1°. Для значений параметров $0 < \mu < 1 + \nu$, $\nu \in \tilde{\delta}_1$ функции системы (4.21) представимы в виде (4.29), где для $j = -1, 0, 1$

$$r_{0,j}(\tau) = \sigma^{-\nu} \frac{\Gamma(1+\nu)}{3\Gamma(1+\nu-\mu)} (\sigma-\tau)^{\nu-\mu}, \quad (4.31)$$

$$r_{n,j}(\tau) = \frac{\sigma^{-\nu}}{3\mu_n e'_\sigma(\mu_n; \nu)} \times \\ \times E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} \mu_n (\sigma-\tau)^{2/3}; 1+\nu-\mu \right) (\sigma-\tau)^{\nu-\mu} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4.31'')$$

2°. Для значений параметров $0 < \mu < \frac{1}{3} + \nu$, $\nu \in \delta_2$ функции системы (4.22) представимы в виде (2.30), где для $j = -1, 0, 1$

$$S_{0,j}(\tau) = \alpha^{-j-\frac{1}{2}} \sigma^{-\nu} \frac{\Gamma(1+\nu)}{2\Gamma\left(\frac{1}{3} + \nu - \mu\right)} (\sigma-\tau)^{\nu-\mu-2/3}, \quad (4.32)$$

$$S_{0,j}(\tau) = \sigma^{-\nu} \frac{\Gamma(1+\nu)}{3\Gamma(1+\nu-\mu)} (\sigma-\tau)^{\nu-\mu}, \quad (4.33')$$

$$S_{n,j}(\tau) = \frac{\alpha^{-j-\frac{1}{2}} \sigma^{-\nu}}{3\mu_n^2 e'_\sigma(\mu_n; \nu)} \times \\ \times E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} \mu_n (\sigma-\tau)^{2/3}; \nu + \frac{1}{3} - \mu \right) (\sigma-\tau)^{\nu-\frac{2}{3}-\mu} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4.33'')$$

Доказательство. 1°. Заметив, что согласно (4.19)

$$P'_\sigma(z; \nu) = e_\sigma(z; \nu) + z e'_\sigma(z; \nu),$$

подставляя сюда $z = \mu_0 = 0$, а затем $z = \mu_n$ ($n \geq 1$), мы получим

$$P'_\sigma(\mu_0; \nu) = e_\sigma(0; \nu) = \Gamma^{-1}(1+\nu),$$

$$P'_\sigma(\mu_n; \nu) = \mu_n e'_\sigma(\mu_n; \nu) \quad (1 \leq n < +\infty).$$

Поэтому из определения (4.21) следует

$$R_0(z; \nu) = \Gamma(1+\nu) e_\sigma(z; \nu),$$

$$R_n(z; \nu) = \frac{z e_\sigma(z; \nu)}{\mu_n e'_\sigma(\mu_n; \nu) (z - \mu_n)} \quad (1 \leq n < +\infty).$$

Теперь в тождестве (4.14) леммы 4.3, положив $\lambda = \mu_n$ ($0 \leq n < +\infty$), будем иметь

$$\sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu \right) \tau^{\mu-1} E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} \mu_n (\sigma-\tau)^{2/3}; 1+\nu-\mu \right) (\sigma-\tau)^{\nu-\mu} d\tau = \\ = \frac{3\sigma^\nu}{z - \mu_n} z e_\sigma(z; \nu) = 3\sigma^\nu \times \begin{cases} \Gamma^{-1}(1+\nu) R_0(z; \nu), & \text{при } n=0 \\ \mu_n e'_\sigma(\mu_n; \nu) R_n(z; \nu), & \text{при } 1 \leq n < +\infty. \end{cases}$$

Наконец, сравнивая эту формулу с интегральным представлением (4.29)

функции $R_n(z; \nu)$, заметив еще, что по (4.29) $e^{t^2} = z^{j+\frac{1}{2}}$, ввиду единственности искомых вектор-функций, получим формулы (4.31')—(4.31'') теоремы

2°. Здесь мы будем опираться на третье тождество (4.15) леммы 4.3. Отметим сначала, что в разложении функции

$$z^{-j} E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} \lambda (\sigma - \tau)^{2/3}; \nu + \frac{1}{3} - \mu \right)$$

по степеням λ коэффициенты при λ^0 и λ^1 , соответственно, равны

$$\alpha^{-j} \Gamma^{-1} \left(\frac{1}{3} + \nu - \mu \right) \text{ и } \alpha^{1/2} \Gamma^{-1} (1 + \nu - \mu) (\sigma - \tau)^{2/3}.$$

Отметим также, что из (4.19) и (4.22) следуют формулы

$$S_0^*(z; \nu) = \Gamma(1 + \nu) z e_\sigma(z; \nu), \quad S_0(z; \nu) = \Gamma(1 + \nu) e_\sigma(z; \nu).$$

Теперь, обращаясь к тождеству (4.15), сначала положив в нем $\lambda = 0$, мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu \right) \tau^{\mu-1} \frac{z^{-j} (\sigma - \tau)^{\nu-\mu-2/3}}{\Gamma \left(\frac{1}{3} + \nu - \mu \right)} d\tau = \\ = 3 \alpha^{1/2} \sigma^\nu z e_\sigma(z; \nu) = \frac{3 \alpha^{1/2} \sigma^\nu}{\Gamma(1 + \nu)} S_0^*(z; \nu). \end{aligned}$$

Отсюда и из представления (4.30) функции $S_0^*(z; \nu)$ следует формула

(4.32) леммы, поскольку, как уже отмечалось, $e^{t^2} = \alpha^{j+\frac{1}{2}}$ ($j = -1, 0, 1$).

Если далее продифференцировать тождество (4.15) по λ , а затем вновь положить $\lambda = 0$, то приходим к формуле

$$\begin{aligned} \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \left(\alpha^{j+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu \right) \tau^{\mu-1} \frac{\alpha^{1/2} (\sigma - \tau)^{\nu-\mu}}{\Gamma(1 + \nu - \mu)} d\tau = \\ = 3 \alpha^{1/2} \sigma^\nu e_\sigma(z; \nu) = \frac{3 \alpha^{1/2} \sigma^\nu}{\Gamma(1 + \nu)} S_0(z; \nu). \end{aligned}$$

Сравнивая это тождество с представлением (4.30) функции $S_n(z; \nu)$ для $n = 0$, приходим к формуле (4.33')

Наконец, чтобы установить последнюю формулу (4.33'') леммы сначала отметим, что по (4.19)

$$Q_\sigma(z; \nu) = z^2 e_\sigma(z; \nu)$$

и поэтому

$$Q'_\sigma(\mu; \nu) \mu^n = \epsilon'_\sigma(\mu; \nu) \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда, ввиду определения (4.22) функции $S_n(z; \nu)$ ($n \geq 1$) получим

$$S_n(z; \nu) = \frac{z^2 e_\sigma(z; \nu)}{\mu_n^2 e'_\sigma(\mu_n; \nu)(z - \mu_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Вновь обратимся теперь к тождеству (4.15), положив в нем $\lambda = \mu_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Тогда приходим к тождествам

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \left(a^{j+\frac{1}{2}} z \tau^{2/3}; \mu \right) \tau^{\mu-1} \times \\ & \times \left\{ a^{-j} E_{3/2} \left(a^{j+\frac{1}{2}} \mu_n (\sigma - \tau)^{2/3}; \nu + \frac{1}{3} - \mu \right) (\sigma - \tau)^{\nu-\mu-2/3} \right\} d\tau = \\ & = \frac{3 a^{1/2} \sigma^\nu}{z - \mu_n} z^2 e_\sigma(z; \nu) = 3 a^{1/2} \sigma^\nu \mu_n^2 e'_\sigma(\mu_n; \nu) S_n(z; \nu) \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Нам остается лишь сравнить эти тождества с представлением (4.30) функций $S_n(z; \nu)$ ($n \geq 1$), чтобы получить формулы (4.33'') теоремы.

З а м е ч а н и е. В доказанной теореме 4.1 представления (4.31)—(4.33) были получены прямым путем, без привлечения теоремы IV. Однако, напомним, что лишь для значения параметра $\mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}$ ($-1 < \omega < 1$) согласно теореме IV, можно утверждать, что найденные выше функции систем $\{r_{n,j}(\tau)\}_0^\infty, \{S_{0,j}^*(\tau), |S_{n,j}(\tau)|_0^\infty\}$ ($j = -1, 0, 1$) единственны и из класса $L_2(0, \sigma)$.

Впрочем, в последнем можно убедиться непосредственно.

В самом деле, если

$$\mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}, \quad (-1 < \omega < 1),$$

то

1°. При $\nu \in \tilde{\delta}_1 = \left(\mu, 1 + \frac{\omega}{3} \right)$, $0 < \nu - \mu < \frac{1}{6}$ и из выражений функций $r_{n,j}(\tau)$ следует, что $r_{n,j}(\tau) \in L_{1,2}(0, \sigma)$ ($j = -1, 0, 1; n \geq 0$).

2°. При $\nu \in \delta_2 = \left(1 + \frac{\omega}{3}, 4/3 + \frac{\omega}{3} \right)$, $\nu - \mu - \frac{2}{3} > -\frac{1}{3}$ и из выражений функций $S_{0,j}^*(\tau)$ и $S_{n,j}(\tau)$ вновь следует, что все они из классов $L_{1,2}(0, \sigma)$.

(б) Пусть

$$y(\tau) = \{y_k(\tau)\}_{-1}^1 \text{ и } z(\tau) = \{z_k(\tau)\}_{-1}^1 \quad (4.34)$$

— две произвольные трехкомпонентные вектор-функции из $L_2(0, \sigma)$.

Определим их скалярное произведение таким образом:

$$\{y(\tau), z(\tau)\} \equiv \{y, z\} = \sum_{k=-1}^1 \int_0^\sigma y_k(\tau) \overline{z_k(\tau)} d\tau. \quad (4.35)$$

Заметим, что для любой вектор-функции $y(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ ее норма

$$\|y\| = \|y, y\|^{1/2} = \left(\sum_{k=-1}^1 \int_0^\sigma |y_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \geq 0,$$

при этом $\|y\| = 0$ лишь если почти везде на $(0, \sigma)$ $y_k(\tau) = 0$ ($k = -1, 0, 1$).

(в) Теперь, в соответствии с отмеченными выше двумя случаями 1° и 2° изменения параметра ν , введем в рассмотрение две пары систем трехкомпонентных вектор-функций.

1°. При $\nu \in \bar{\delta}_1 \subset \delta_1$ — пару систем

$$\{x_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \text{ и } \{\omega_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \quad (j = -1, 0, 1), \quad (4.36)$$

где

$$x_{n,j}(\tau) = E_{3/2}(e^{i\theta_j/\mu} \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.37)$$

$$\theta_j = \frac{2\pi}{3} \left(j + \frac{1}{2} \right)$$

и

$$\omega_{n,j}(\tau) = \overline{r_{n,j}(\tau)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.38)$$

притом функции $r_{n,j}(\tau)$ были определены нами посредством формул (4.31')—(4.31'') леммы 4.4 (1°).

2°. При $\nu \in \delta_2$ — пару систем

$$\{\bar{x}_{0,j}(\tau), \{\tilde{x}_{n,j}(\tau)\}_0^\infty\} \text{ и } \{\bar{\omega}_{0,j}(\tau), \{\tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_0^\infty\} \quad (j = -1, 0, 1), \quad (4.39)$$

где

$$\bar{x}_{0,j}(\tau) = \frac{e^{i\theta_j} \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma(\mu+2/3)}, \quad \tilde{x}_{n,j} = x_{n,j}(\tau) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.40)$$

и

$$\bar{\omega}_{0,j}(\tau) = \overline{S_{0,j}(\tau)}, \quad \tilde{\omega}_{n,j}(\tau) = \overline{S_{n,j}(\tau)}, \quad (4.41)$$

притом функции $S_{n,j}(\tau)$ также были определены нами посредством формул (4.32), (4.33') и (4.33'') леммы 4.4 (2°).

Замечание. В обоих случаях 1° и 2° мы имеем $\mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}$ ($-1 < \omega < 1$) и поэтому $2(\mu - 1/3) > -1$ и $2(\mu - 1) > -1$.

Следовательно, функции введенных выше систем

$$\{x_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \text{ и } \{\tilde{x}_{n,j}(\tau), \{\bar{x}_{0,j}(\tau)\}_0^\infty\} \quad (j = -1, 0, 1) \quad (4.42)$$

в обоих случаях 1° и 2° будут из класса $L_2(0, \sigma)$.

Наконец, отметим, что функции систем (4.42) имеют особенность лишь в точке $\tau = 0$, в то время как функции систем

$$\{\omega_{n,j}(\tau)\}_0^\infty \text{ и } \{\bar{\omega}_{0,j}(\tau), \{\tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_0^\infty\} \quad (j = -1, 0, 1) \quad (4.43)$$

имеют особенность лишь в точке $\tau = \sigma$. Отсюда следует, что как сами функции наших систем (4.42) и (4.43), так и произведения любых двух функций, взятых в отдельности по каждой из них, будут из класса $L_1(0, \sigma) \subset L_2(0, \sigma)$, разумеется, в надлежащих случаях 1° или 2°.

Докажем теперь теорему.

Теорема 4.2. 1°. Системы вектор-функций (4.36) биортогональны в метрике (4.35). Иными словами, положив для $n = 0, 1, 2, \dots$

$$x_n(\tau) = \{x_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \text{ и } \omega_n(\tau) = \{\omega_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1, \quad (4.44)$$

будем иметь

$$\{x_m, \omega_n\} = \delta_{m,n} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.45)$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронеккера.

2°. Системы вектор-функций (4.39) биортогональны в той же метрике (4.36). Иначе говоря, положив

$$\tilde{x}_0(\tau) = \{\tilde{x}_{0,j}(\tau)\}_{-1}^1, \quad \tilde{x}_n(\tau) = \{\tilde{x}_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.46)$$

а также

$$\tilde{\omega}_0(\tau) = \{\tilde{\omega}_{0,j}(\tau)\}_{-1}^1, \quad \tilde{\omega}_n(\tau) = \{\tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.47)$$

будем иметь

$$\{\tilde{x}_0, \tilde{\omega}_0\} = 1; \quad \{\tilde{x}_0, \tilde{\omega}_n\} = 0; \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.48)$$

$$\{\tilde{\omega}_0, \tilde{x}_0\} = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\{\tilde{x}_n, \tilde{\omega}_m\} = \delta_{n,m}; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots. \quad (4.49)$$

Доказательство. 1°. Пользуясь представлением (4.29) функции $R_n(z; \nu)$ и ее свойством (4.23), получим утверждения (4.45)

$$\begin{aligned} R_n(\mu_m; \nu) &= \delta_{n,m} = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \{e^{i\theta_j} \mu_m \tau^{2/3}; \mu\} \tau^{\mu-1} r_{n,j}(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma x_{m,j}(\tau) \overline{\omega_{n,j}(\tau)} d\tau = \{x_m, \omega_n\} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

в силу обозначения (4.38).

2°. Ввиду обозначения (4.41) представление (4.30) функции $S_0^*(z; \nu)$ запишется в виде

$$S_0^*(z; \nu) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \{e^{i\theta_j} z \tau^{2/3}; \mu\} \tau^{\mu-1} \tilde{\omega}_{0,j}(\tau) d\tau. \quad (4.30')$$

Положив здесь $z = \mu_n$ ($n \geq 0$), в силу первой из формул (4.23'), с учетом определения (4.37) функций $\tilde{x}_{n,j}(\tau)$, получим вторую из формул (4.48)

$$\{\tilde{x}_n, \tilde{\omega}_0\} = \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma E_{3/2} \{e^{i\theta_j} \mu_n \tau^{2/3}; \mu\} \tau^{\mu-1} \overline{\tilde{\omega}_{0,j}(\tau)} d\tau = S_0^*(\mu_n; \nu) = 0 \quad (n \geq 0).$$

Первая из формул (4.48) следует из второго утверждения (4.23'), так как по (4.40)

$$\{\tilde{z}_0, \tilde{\omega}_0\} = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} \frac{e^{i\theta_j} \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma(\mu+2/3)} \overline{\omega_{0,j}(\tau)} d\tau = \left. \frac{dS_0(z; \nu)}{dz} \right|_{|z|=\sigma} = 1.$$

Чтобы установить совокупность формул (4.49) обратимся к представлению (4.40) функции $S_n(z; \nu)$, которую ввиду обозначения (4.41) запишем в виде

$$S_n(z; \nu) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2}(e^{i\theta_j} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\omega_{n,j}(\tau)} d\tau. \quad (4.40')$$

Отсюда, ввиду свойств (4.23) функции $S_n(z; \nu)$, получим

$$\begin{aligned} \{\tilde{x}_m; \tilde{\omega}_m\} &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2}(e^{i\theta_j} \mu_m \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\omega_{n,j}(\tau)} d\tau = \\ &= S_n(\mu_m; \nu) = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Итак, теорема 4.1 полностью доказана.

В заключение подчеркнем, что в утверждениях 1° и 2° этой теоремы, разумеется, предполагается, что значения параметра ν , соответственно, взяты из интервалов

$$\tilde{\delta}_1 = \left(\frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}, 1 + \frac{\omega}{3} \right) \text{ и } \delta_2 = \left(1 + \frac{\omega}{3}, \frac{4}{3} + \frac{\omega}{3} \right).$$

§ 5. Теоремы полноты и базисности

5.1 (а) Установим сначала полноту в $L_2(0, \sigma)$ систем вектор-функций, построенных в предыдущем § 4.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 5.1. 1°. Если $\nu \in \tilde{\delta}_1$, то система вектор-функций

$$\{x_{n,j}(\tau)\}_0^{\sigma} = \{E_{3/2}(e^{i\theta_j} \mu_n \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1}\}_0^{\sigma} \quad (j = -1, 0, 1) \quad (5.1)$$

полна в $L_2(0, \sigma)$.

2°. Если же $\nu \in \delta_2$, то в $L_2(0, \sigma)$ полна система вектор-функций

$$\{\tilde{x}_{0,j}(\tau), \tilde{x}_{n,j}(\tau)\}_0^{\sigma} = \left\{ \frac{e^{i\theta_j} \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2}{3}\right)}, E_{3/2}(e^{i\theta_j} \mu_n \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \right\}_0^{\sigma}. \quad (5.2)$$

(j = -1, 0, 1)

Доказательство. 1°. Для любой вектор-функции $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^1 \in L_2(0, \sigma)$ введем в рассмотрение целую функцию

$$\Phi_{\varphi}(z) = \sum_{j=-1}^1 E_{3/2}(e^{i\theta_j} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau, \quad (5.3)$$

которая, согласно теореме IV, принадлежит $W_{3/2, \sigma}^{2, \infty}$ ($-1 < \omega < 1$) при $\mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}$. Ввиду определения (4.37) система вектор-функций $\{\omega_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1$ и скалярного произведения (4.35), будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi}(\mu_n) &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2}(e^{i\theta_j} \mu_n \tau^{3/2}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau = \\ &= \{x_n, \varphi\}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

Поэтому, если для некоторой вектор-функции $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$

$$\{x_n, \varphi\} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

то из (5.4) будет следовать, что для ассоциированной с нею функции $\Phi_{\varphi}(z) \in W_{3/2}^{2, \omega}$ имеем $\Phi_{\varphi}(\mu_n) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Заметив, что при $p=2$, $\tilde{\delta}_1 \subset \delta_1$, в силу теоремы единственности 3.1 (1°), получим тождество $\Phi_{\varphi}(z) \equiv 0$. Отсюда по теореме IV (2°) вытекает также, что $\varphi_j(\tau) = 0$ ($j = -1, 0, 1$), т. е. вектор-функция $\varphi(\tau) = 0$ почти всюду на $(0, \sigma)$. Тем самым, утверждение 1° теоремы доказано.

2°. Вновь для любой вектор-функции $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^1 \in L_2(0, \sigma)$, образуя интеграл (5.3), мы наряду с формулами (5.4)

$$\Phi_{\varphi}(\mu_n) = \{x_n, \varphi\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

будем иметь также

$$\Phi'_{\varphi}(\mu_0) = \Phi'_{\varphi}(0) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} \frac{e^{i\theta_j} \tau^{\mu-1/3}}{\Gamma\left(\mu + \frac{2}{3}\right)} \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau = \{\tilde{x}_0, \varphi\}.$$

Поэтому, если для некоторой функции $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ имеют место равенство

$$\{\tilde{x}_0, \varphi\} = \{x_n, \varphi\} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

то это означает, что для функции $\Phi_{\varphi}(z)$

$$\Phi'_{\varphi}(\mu_0) = \Phi_{\varphi}(\mu_n) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Наконец, поскольку при $p=2$, $\Delta_2 = \delta_2$, то согласно теореме единственности 3.1 (2°) заключаем, что $\Phi_{\varphi}(z) \equiv 0$. Отсюда, вновь обращаясь к теореме IV (2°), будем иметь $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^1 = 0$ почти всюду на $(0, \sigma)$. Этим и завершается доказательство теоремы.

(б) Перейдем сначала к установлению базисности введенных в § 4 биортогональных систем трехмерных вектор-функций

$$\omega_n(\tau) = \{\omega_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \text{при } \tau \in \tilde{\delta}_1 \quad (5.5)$$

и

$$\tilde{\omega}_n(\tau) = \{\tilde{\omega}_{0,j}, \tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \text{при } \tau \in \delta_2. \quad (5.6)$$

С этой целью напомним, что в § 3 были определены два банаховых пространства последовательностей $l^{p, \omega-1}$ и $l^{p, \omega-1}$ для значений параметров $-1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$, $\omega_{-1} = \frac{2\omega-1}{3}$. Для значения

параметра $p=2$ указанные пространства, соответственно, переходят в следующие весовые гильбертовы пространства с нормами

$$\|\varphi_k\|_0 \in l^{2, \omega_{-1}}; \|\{\varphi_k\}_0\|_{L_2, \omega_{-1}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k|^2 (1+k)^{\omega_{-1}} \right)^{1/2}, \quad (5.7)$$

$$\{\varphi_0^*, \{\varphi_k\}_0^*\} \in l^{2, \omega_{-1}}; \|\{\varphi_k\}_0^*\|_{L_2, \omega_{-1}} = \left(|\varphi_0^*|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k|^2 (1+k)^{\omega_{-1}} \right)^{1/2}. \quad (5.8)$$

Докажем теперь теорему о базисности обеих систем (5.5) и (5.6) в пространстве $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_1^3$.

Теорема 5.2. 1°. Если $\nu \in \bar{\delta}_1$, то вектор-рядами вида

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \omega_n(\tau) \quad (5.9)$$

осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l^{2, \omega_{-1}}$ последовательностей $\{\varphi_n\}_0^{\infty}$ на все пространство $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau)$. При этом, коэффициенты ряда (5.8) и его суммы $\varphi(\tau)$ связаны формулами

$$\varphi_n = \{\varphi, \omega_n\} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (5.10)$$

и двойным неравенством

$$\|\varphi\| = \{\varphi, \varphi\}^{1/2} \asymp \|\{\varphi_n\}_0^{\infty}\|_{L_2, \omega_{-1}}. \quad (5.11)$$

2° Если $\nu \in \bar{\delta}_2$, то вектор-рядами вида

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 \tilde{\omega}_0(\tau) + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \tilde{\omega}_k(\tau) \quad (5.12)$$

осуществляется взаимно-однозначное и непрерывное отображение всего пространства $l^{2, \omega_{-1}}$ на пространство $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau)$.

При этом коэффициенты ряда (5.12) и его сумма $\varphi(\tau)$ связаны формулами

$$\varphi_0^* = \{\varphi, \tilde{\omega}_0\}, \quad \varphi_n = \{\varphi, \tilde{\omega}_n\} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (5.13)$$

и двойным неравенством

$$\|\varphi\| = \{\varphi, \varphi\}^{1/2} \asymp \|\{\varphi_n\}_0^{\infty}\|_{L_2, \omega_{-1}}. \quad (5.14)$$

Доказательство. 1°. Согласно теореме 3.2 (1°) рядами вида

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varphi}_n R_n(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

реализуется линейное взаимно-однозначное отображение всего пространства последовательностей $\{\varphi_n\}_0^{\infty} \in l^{2, \omega_{-1}}$ на все пространство целых функций $\Phi(z) \in \mathcal{W}_{1/2, \sigma}^{\infty}$. При этом справедливо двойное неравенство

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}_2, \sigma} \asymp \|\{\varphi_n\}_0^{\infty}\|_{L_2, \omega_{-1}}, \quad (5.15)$$

а в силу интерполяционных свойств (4.23) функций системы $\{R_n(z)\}_0^{\infty}$ будем иметь

$$\Phi(\mu_k) = \bar{\varphi}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.16)$$

С другой стороны, согласно теореме IV из § 4, посредством формулы представления всего класса $W_{3/2, \sigma}^2$

$$\Phi(z) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2}(e^{i\theta_j} z \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau, \quad (5.17)$$

где $\mu = \frac{5}{6} + \frac{\omega}{3}$ ($-1 < \omega < 1$) реализуется линейное взаимно-однозначное отображение всего пространства целых функций $\Phi(z) \in W_{3/2, \sigma}^2$ на все пространство трехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^1 \in L_2(0, \sigma)$.

При этом, согласно лемме 4.1, справедливо двустороннее неравенство

$$|\Phi, L_{2, \omega} \asymp |\varphi|. \quad (5.18)$$

Из неравенств (5.15) и (5.18) следует непрерывность обоих наших отображений, а также справедливость двойного неравенства (5.11) теоремы. Итак, пространство $L_2^{\omega-1}$ гомеоморфно пространству вектор-функций $L_2(0, \sigma)$. Поэтому для завершения доказательства утверждения 1^о теоремы нам остается лишь установить справедливость формул (5.10). С этой целью, согласно формуле (5.17)

$$\Phi(\mu_n) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} E_{3/2}(e^{i\theta_j} \mu_n \tau^{2/3}; \mu) \tau^{\mu-1} \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда, ввиду определения (5.1) системы $\{x_{n,j}(\tau)\}$, получим

$$\Phi(\mu_n) = \sum_{j=-1}^1 \int_0^{\sigma} x_{n,j}(\tau) \overline{\varphi_j(\tau)} d\tau = \{x_n, \varphi\} = \overline{\{\varphi, x_n\}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда, в силу интерполяционных соотношений (5.16), имеем также формулы (5.10), и доказательство завершается.

2^о. В рассматриваемом случае доказательство проводится вполне аналогичным рассуждением, если воспользоваться теоремой 3.2 и определением 5.2 системы $\{x_{0,j}(\tau), x_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1$.

(в) Убедимся, наконец, что теорема 5.2 может быть сформулирована и таким образом.

Теорема 5.3. 1^о. Для надлежащих значений параметра ν обе системы (5.5) и (5.6) полны в пространстве $L_2(0, \sigma)$ трехкомпонентных вектор-функций.

2^о. После соответствующей нормировки обе эти системы становятся базисами Рисса в пространстве вектор-функций $L_2(0, \sigma)$.

Доказательство будем вести только для системы (5.5)

$$\omega_n(\tau) = \{\omega_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad \tau \in \bar{\delta}_1,$$

поскольку для системы (5.6)

$$\tilde{\omega}_n(\tau) = \{\tilde{\omega}_{0,j}, \tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad \tau \in \bar{\delta}_2$$

оно вполне аналогично.

1°. Пусть $\varphi_j(\tau) = \{\varphi_j(\tau)\}_{-1}^1$ -любая вектор-функция из $L_2(0, \sigma)$. Согласно теореме 5.2 (1°), вектор-разложение

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi, x_n\} \omega_n(\tau) \quad (5.18),$$

сходится в метрике $L_2(0, \sigma)$ к вектор-функции $\varphi(\tau)$.

В самом деле, применив оценку (5.11) к разности

$$\rho_m(\tau) = \varphi(\tau) - \sum_{n=0}^m \{\varphi, x_n\} \omega_n(\tau),$$

будем иметь

$$\|\rho_m\| \leq \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\{\varphi, x_n\}\|^2 (1+n)^{v-1} \right)^{1/2}.$$

Поскольку, очевидно, что $\|\rho_m\| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то отсюда следует не только полнота, но и базисность системы (5.5) в $L_2(0, \sigma)$.

2°. От введенных ранее биортогональных в $L_2(0, \sigma)$ вектор-систем (4.44)

$$x_n(\tau) = \{x_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad \text{и} \quad \omega_n(\tau) = \{\omega_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1 \quad (5.19),$$

перейдем к вектор-системам

$$\mathfrak{X}_n(\tau) = \{\mathfrak{X}_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1, \quad \Omega_n(\tau) = \{\Omega_{n,j}(\tau)\}_{-1}^1, \quad (5.20),$$

положив для $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathfrak{X}_{n,j}(\tau) = (1+n)^{\frac{v-1}{2}} x_{n,j}, \quad \Omega_{n,j}(\tau) = (1+n)^{-\frac{v-1}{2}} \omega_{n,j}(\tau). \quad (5.20')$$

Легко видеть, что наряду с системами (5.13), вектор-системы (5.19) также биортогональны в метрике $L_2(0, \sigma)$, поскольку из (5.20') следуют равенства

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{X}_n, \Omega_m\} &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma \mathfrak{X}_{n,j}(\tau) \overline{\Omega_{m,j}(\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{j=-1}^1 \int_0^\sigma x_{n,j}(\tau) \overline{\omega_{m,j}(\tau)} d\tau = \{x_n, \omega_m\} = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Далее, ряды типа (5.9) примут такой вид

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi, \mathfrak{X}_n\} \Omega_n(\tau). \quad (5.21),$$

оценки же (5.11) переходят в оценки

$$\|\varphi\| \asymp \|\varphi, \mathfrak{X}_n\|_{L_2, 0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi, \mathfrak{X}_n\|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.22)$$

Действительно, в силу обозначений (5.20')

$$\begin{aligned} \{\varphi, \mathfrak{X}_n\} \mathcal{Q}_n(\tau) &= \{\varphi, x_n\} \omega_n(\tau), \\ \|\{\varphi, \mathfrak{X}_n\}\|^2 &= \|\{\varphi, x_n\}\|^2 (1+n)^{n-1} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Но справедливость биортогонального разложения вида (5.21) для любой функции $\varphi(\tau) \in L_2(0, \sigma)$ с оценкой типа (5.22), по известному определению, означает, что система $\{\mathcal{Q}_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом Рисса* в $L_2(0, \sigma)$.

(τ) В заключение параграфа приведем общую теорему о базисности построенных нами систем биортогональных в $L_2(0, \sigma)$ вектор-функций.

Теорема 5.4. 1°. Если $\nu \in \tilde{\delta}_1$ то системы вектор-функций

$$\{\mathfrak{X}_{n,j}(\tau)\}_{n=0}^{\infty} = \{(1+n)^{\frac{n-1}{2}} x_{n,j}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}, \quad (5.23)$$

$$\{\mathcal{Q}_{n,j}(\tau)\}_{n=0}^{\infty} = \{(1+n)^{-\frac{n-1}{2}} \omega_{n,j}(\tau)\}_{n=0}^{\infty} \quad (j=-1, 0, 1) \quad (5.24)$$

биортогональны и образуют базис Рисса в $L_2(0, \sigma)$.

2°. Если $\nu \in \delta_2$ то системы-вектор-функций

$$\{\mathfrak{X}_{0,j}^{\circ}(\tau), \{\tilde{\mathfrak{X}}_{n,j}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}\}_{j=0,1} = \{\tilde{x}_{0,j}^{\circ}(\tau), \{(1+n)^{\frac{n-1}{2}} \tilde{x}_{n,j}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}\}_{j=0,1}, \quad (5.25)$$

$$\{\tilde{\mathcal{Q}}_0^{\circ}(\tau), \{\tilde{\mathcal{Q}}_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}\}_{j=0,1} = \{\tilde{\omega}_{0,j}^{\circ}(\tau), \{(1+n)^{-\frac{n-1}{2}} \tilde{\omega}_{n,j}(\tau)\}_{n=0}^{\infty}\}_{j=0,1} \quad (5.26)$$

также биортогональны и образуют базис Рисса в $L_2(0, \sigma)$.

Доказательство. 1°. Согласно теореме 5.3 системы (5.23) и (5.24) биортогональны в $L_2(0, \sigma)$, причем система (5.24) является базисом Рисса. Вместе с тем, система (5.23) по теореме 5.1 полна в $L_2(0, \sigma)$. Отсюда, на основании известной теоремы о базисности Рисса биортогональных систем (см. [7], гл. VI), система (5.23) также будет базисом Рисса.

2°. Наши утверждения о системах (5.25) и (5.26) вытекают из соответствующих утверждений теорем 5.3 и 5.1 аналогичным образом.

Институт математики АН Армянской ССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 15. XII. 1986

* Различные эквивалентные определения и важнейшие свойства базисов Рисса изложены, например, в книге [7].

Կ. Մ. ՋԻՐԲԱՇԻԱՆ, Ս. Գ. ՌԱՖԱԵԼԻԱՆ. Ամբողջ ֆունկցիաների դասերում ինտերպոլյացիոն մեթոդները և երանց հետ առնչված Ռիսի բազիսներ (ամփոփում)

$W_{\rho, \sigma}^{p, \infty}$ -ով ($\rho > 1$, $-1 < \sigma < \rho - 1$, $\sigma > 0$) նշանակենք $\rho = 3/2$ կարգ և σ -ին շղերանգանցող տիպ ունեցող այն $\Phi(z)$ ֆունկցիաների դասը, որոնց համար

$$\sum_{k=-1}^1 \int_0^{\infty} |\Phi(re^{i\frac{2\pi}{3}k})|^p r^{\sigma} dr < +\infty$$

$\{\mu_k\}_1^{\infty}$ -ով նշանակենք $E_{1/2}(-z^2; 1 + \nu)$ ֆունկցիայի զրոների հաջորդականությունը։ Ներկա հետազոտությունում նախ լուծվում է հետևյալ խնդիրը. գտնել $\{c_k\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}$ հաջորդականությունների այն դասը, որոնց համար $\Phi(\mu_k) = c_k$ ($k > 1$) խնդիրը $W_{3/2, \sigma}^{p, \infty}$ սահմանափակումում ունի լուծում և բացահայտ տեսքով կառուցել այդ լուծումը։

Հենվելով ստացված արդյունքների և հեղինակներից առաջինի վաղ շրջանի որոշ աշխատանքների վրա. Յ-բազադրիչներով վեկտոր ֆունկցիաների $L_2(0, \sigma)$ դասում կառուցվում են Ռիսի բազիսներ։ Բազիսային ֆունկցիաները արտահայտվում են Միտագ-Լեֆլերի տիպի $3/2$ կարգի ֆունկցիաների միջոցով։

Բացահայտ տեսքով կառուցվում են նաև դրանց բիօրթոգոնալ համակարգերը։

M. M. DJRBASHIAN, S. G. RAPHAELIAN. *Interpolation expansions in the classes of entire functions and the Riesz bases generated by them (summary)*

Let $W_{\rho, \sigma}^{p, \infty}$ be the class of entire functions $\Phi(z)$ of order $\rho = 3/2$ and type $\leq \sigma$, for which

$$\sum_{k=-1}^1 \int_0^{\infty} |\Phi(re^{i\frac{2\pi}{3}k})|^p r^{\sigma} dr < +\infty.$$

Let $\{\mu_k\}_1^{\infty}$ be the zeros of the function $E_{1/2}(-z^2; 1 + \nu)$. In the paper solves the following problem: describe the class of sequences $\{c_k\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}$ such that the problem $\Phi(\mu_k) = c_k$ ($k > 1$) has a solution in the space $W_{\rho, \sigma}^{p, \infty}$ and construct the solutions. The basic functions of the Riesz basis are expressed through the Mittag-Leffler type functions of the order $3/2$ and the corresponding biorthogonal systems are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
2. С. Г. Рафаелян. Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 3, 1983, 167—186.
3. М. М. Джрбашян. Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 2, 1984, 81—181.
4. С. Г. Рафаелян. Базисность некоторых биортогональных систем в $L^2(-\sigma, \sigma)$ с весом, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIX, № 3, 1984, 207—218.
5. М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян. Интерполяционные теоремы и разложения по системам типа Фурье, ДАН СССР, 285, № 4, 1985, 782—787.
6. M. M. Djrbashian and S. G. Raphaelian. Interpolation theorems and expansions with respect to Fourier type systems, Journal of approximation theory, USA, № 5, 1987.
7. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.