ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 1, 1987 Математика

УДК 517.53

Н. У. АРАКЕЛЯН, В. А. МАРТИРОСЯН

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НА ГРАНИЦЕ КРУГА СХОДИМОСТИ

Знаменитая общая теорема Фабри (см. [1] и [2], § 2, теорема 2.1.1) об особых точках степенных рядов, лежащих на фиксированной дуге границы их круга сходимости, а также ее наиболее важные следствия — теоремы Фабри о лакунах и об отношении — привлекли внимание многих исследователей (подробно см. обзор [2], § 2). Некоторая громоздкость формулировки и, что более существенно, трудности и неясности в доказательстве этой теоремы, были встречены критическими замечаниями (Фабер, Ло, Принсгейм и др.). Ряд авторов предприняли усилия к устранению указанных недостатков (Фабер, Полиа, Мандельбройт и др.), модернизовав метод доказательства Фабри, либо предложив новое доказательство. Г. Полиа удалось, используя введенное им понятие максимальной плотности, существенно упростить формулировку теоремы Фабри и превратить ее в вполне строго доказанное утверждение. Он также исследовал точность этой теоремы в случае частной теоремы Фабри о лакунах. В дальнейшем, говоря об общей теореме Фабри, мы будем подразумевать данную Полиа формулировку этой теоремы (см. [2], § 2, теорема 2.1.3). В последующих работах (Мандельбройт, Леш, Клаус и др.) предположения теоремы Фабри заменялись другими, чаще всего более строгими и громоздкими, для усиления утверждений теоремы Фабри.

В настоящей работе для исследования особенностей степенных рядов применяется подход, в основе которого лежит хорошо известный метод «функции коэффициентов». Этот метод систематически применялся (Ло, Ле Руа, Вигерт, Линделёф, Карлсон и др.) в исследованиях об аналитическом продолжении и лишь эпизодически — при изучении особенностей (Дюфренуа и др.). Основным препятствием для такого применения являлось, на наш взгляд, отсутствие подходящего критерия регулярности граничной дуги в терминах «функции коэффициентов».

Такой критерий представляет лемма 1 настоящей работы. Она оказывается весьма полезной не только для получения утверждений типа общей теоремы Фабри, но и при исследовании точности их условий.

Указанный подход позволяет свести вопрос об особых точках степенных рядов к вопросам об условиях равновесия между ростом аналитической функции и ростом количества ее нулей.

Конкретно, в настоящей работе получены следующие основные результаты. Теорема 1 усиливает общую теорему Фабри (в варианте Полиа) и, на наш взгляд, имеет несколько более простую формулировку. Теорема 1 доказывается по единой схеме с теоремой 2, которая, в отличие от известных аналогов общей теоремы Фабри, уже не содержит неизвестных и подлежащих выбору параметров. Нам представляется, что она дает удовлетворительный ответ на задачу, к решению которой была нацелена общая теорема Фабри: найти явные условия на коэффициенты степенных рядов (на их модули и аргументы), гарантирующие наличие особой точки на заданной граничной дуге.

Работа состоит из двух параграфов. § 1 посвящен формулировке основных результатов и комментариям, а § 2 — их доказательству вместе с необходимыми вспомогательными утверждениями.

§ 1. Формулировка результатов

1°. Здесь и далее, в § 2, мы придерживаемся следующих стандартных обозначений. Через **N**, **Z**, **R** и **C** мы обозначаем соответственно множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел. Для $a,\ b\in\mathbf{R}\ (a\leqq b)$ обозначим через $[a,\ b]$ и $(a,\ b)$ соответственно замкнутый и открытый промежутки с концами a и b (при $a=b$ полагаем, $(a,\ b)=\varnothing$). Другие необходимые обозначения будут введены по мере надобности.

Ниже и в дальнейшем мы используем применяемое в различных вопросах анализа понятие *перемены знака* (конечной) последовательности из **R** (см. [3], стр. 48).

Сформулируем теперь две основные теоремы настоящей работы. Рассмотрим произвольный степенной ряд с единичным кругом сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ |f_n|^{1/n}=1. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть для ряда* (1) *последовательности натуральных чисел* $n_k\uparrow+\infty$ *и вещественных чисел* $\{\beta_k\}_1^{\infty}$ *выбраны так, что*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ |\mathrm{Re}\,(f_{n_k} e^{i\beta_k})|^{1/n_k}=1. \tag{2}$$

Для $\tau\geqslant 0$ *обозначим через* $W_k(\tau)$ *число перемен знака последовательности* $\{\mathrm{Re}(f_n e^{i\beta_k})\}$ *при* $n\in[\tau n_k,\ n_k]$ *и положим*

$$W^*=\min\{W^-,\ W^+\},\quad W^{\pm}=\overline{\lim_{\tau\to1\pm0}}\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{W_k(\tau)}{|1-\tau|\,n_k}. \tag{3}$$

Тогда ряд (1) *имеет особую точку вида* $e^{i\omega}$, *где* $|\omega|\leqslant\pi W^*$.

Теорема 2 (*об аргументах*). *Пусть для ряда* (1) *подпоследовательность* $\{n_k\}_1^{\infty}\subset\mathbf{N}$ *выбрана так, что*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ |f_{n_k}|^{1/n_k}=1. \tag{4}$$

Положим

$$f_n=|f_n|\,e^{i\omega_n}\ \text{для}\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots,$$

где $|\omega_{n+1}-\omega_n|\leqslant\pi$, *и обозначим*

$$V^*=\min\{V^-,\ V^+\},\quad V^{\pm}=\overline{\lim_{\tau\to1\pm0}}\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{V(\tau,\ n_k)}{|1-\tau|\,n_k}, \tag{5}$$

$$V(\tau,\ q)=\sum_{n\in[\tau q,\ q]}|\omega_{n+1}-\omega_n|,\quad \tau>0. \tag{6}$$

Тогда ряд (1) имеет особую точку вида $e^{i\omega}$, где $|\omega| \leqslant V^*$.

Из теоремы 2 видно, что аргументы ω_n целесообразно выбрать таким образом, чтобы суммы вида (6) имели по возможности минимальное значение. Следующий индуктивный выбор последовательности $\{\omega_n\}_0^\infty$ обеспечивает такую минимальность.

Положим $\omega_{-1}=0$. Если $f_{n+1}=0$, то полагаем $\omega_{n+1}=\omega_n$; если же $f_{n+1}\neq 0$, то ω_{n+1} — значение $\arg f_{n+1}$ из полуинтервала $[-\pi+\omega_n, \pi+ +\omega_n)$. Для фиксированных таким образом аргументов ω_n сумма (6) зависит лишь от тех ω_n, для которых $f_n\neq 0$. Запишем ряд (1) в виде

$$\sum_{k=-1}^{\infty} f_{m_k} z^{m_k}, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} |f_{m_k}|^{1/m_k}=1, \tag{1'}$$

где все $f_{m_k}\neq 0$. Тогда вместо (6) величину $V(\tau, q)$ можно определить формулой

$$V(\tau, q)=\sum_{m_k\in[\tau q,\, q]} |\omega_{m_{k+1}}-\omega_{m_k}| = \sum_{m_k\in[\tau q,\, q]} \left|\arg\left(\frac{f_{m_k}}{f_{m_{k+1}}}\right)\right|, \tag{6'}$$

где значение аргумента arg выбирается из промежутка $[-\pi, \pi)$.

2°. Приведем теперь ряд наглядных следствий из сформулированных теорем, усиливающих теоремы Фабри об отношении и о лакунах. Здесь и далее нам понадобится следующее

Определение. Пусть P, $Q\subset N$, Q бесконечно. Для $\tau\in[0,1)$ и $x>0$ обозначим через $\mathfrak{M}(\tau, x)=\mathfrak{M}(P, \tau, x)$ число точек множества $P\cap[\tau x, x]$ и положим

$$\Delta^*(P, Q)=\overline{\lim_{\tau\to 1}}\ \overline{\lim_{\substack{q\to\infty\\ q\in Q}}} \frac{\mathfrak{M}(\tau, q)}{|1-\tau|\, q}, \tag{7}$$

$$\Delta_*(P, Q)=\underline{\lim_{\tau\to 1}}\ \underline{\lim_{\substack{q\to\infty\\ q\in Q}}} \frac{\mathfrak{M}(\tau, q)}{|1-\tau|\, q}. \tag{8}$$

Если $\Delta_*(P, Q)=\Delta^*(P, Q) (=\Delta(P, Q))$, то $\Delta(P, Q)$ назовем левой) Q-плотностью P и скажем, что P измеримо Q (слева). Отметим, что при $Q=N$ величины (7)—(8), соответственно, совпадают с введенными Г. Полиа (см. [2], стр. 25—26 и [4]) понятиями максимальной и минимальной плотности множества P. Некоторые свойства введенных понятий перечислены ниже в пункте 3°.7.

Возвращаясь к ряду (1), введем в рассмотрение «существенное» для него множество индексов (см. (1'))

$$P^*=\{p\in N: f_p\neq 0\}=\{m_k\}_1^\infty,$$

в терминах подмножеств которого удобнее сформулировать наши следствия. Из этих же соображений, полагая $Q=\{n_k\}_1^\infty$, запишем условие (4) в виде

$$\overline{\lim_{\substack{q\to\infty\\ q\in Q}}} |f_q|^{1/q}=1, \tag{4'}$$

причем можем считать, что $Q\subset P^*$.

Следствие 1 (*об аргументах*). Пусть коэффициенты ряда (1) для некоторых $\mathbf{P},\ \mathbf{Q}\subset\mathbf{P}^*$ удовлетворяют условию (4′) и условию

$$\overline{\lim_{m_k\in P}}\left|\arg\left(\frac{f_{m_k}}{f_{m_{k+1}}}\right)\right|=\alpha\leqslant\pi.$$

Тогда ряд (1) имеет особую точку вида $e^{i\omega}$, где

$$|\omega|\leqslant\alpha\Delta^*(\mathbf{P}^*,\ \mathbf{Q})+(\pi-\alpha)\ \Delta^*(\mathbf{P}^*\setminus\mathbf{P},\ \mathbf{Q}). \tag{9}$$

В самом деле, положим

$$\alpha_x=\sup\left\{\left|\arg\left(\frac{f_{m_k}}{f_{m_{k+1}}}\right)\right|: m_k\in\mathbf{P},\ m_k>x\right\}$$

и заметим, что $\alpha_x\to\alpha$ при $x\to+\infty$. Для величины (6′) имеем оценку

$$V(\tau,\ q)\leqslant\alpha_{\tau q}\,\mathfrak{M}(\mathbf{P}^*,\ \tau,\ q)+(\pi-\alpha_{\tau q})\ \mathfrak{M}(\mathbf{P}^*\setminus\mathbf{P},\ \tau,\ q),$$

откуда с учетом (7) следует, что величина V^- из (5) не превосходит правой части оценки (9). Таким образом, доказательство легко сводится к теореме 2.

Применяя следствие 1 при $\alpha=0$ к ряду вида (1) с коэффициентами $\{f_n s^n\}_0^\infty$, получим

Следствие 2 (*об отношении*). Пусть коэффициенты ряда (1) для некоторых бесконечных $\mathbf{P},\ \mathbf{Q}\subset\mathbf{P}^*$ удовлетворяют условию (4′) и при $|s|=1$ существует конечный предел

$$\lim_{m_k\in P}\frac{f_{m_k}s^{m_k}}{f_{m_{k+1}}s^{m_{k+1}}}>0. \tag{10}$$

Тогда ряд (1) имеет особую точку вида $e^{i\omega}$, где

$$|\omega-\arg s|\leqslant\pi\Delta^*(\mathbf{P}^*\setminus\mathbf{P},\ \mathbf{Q}).$$

Отсюда с учетом определений (7)—(8) (см. также пункт 3°.7) легко следует оценка

$$|\omega-\arg s|\leqslant\pi\,[\Delta^*(\mathbf{P}^*,\ \mathbf{Q})-\Delta_*(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})]. \tag{11}$$

Условие (10) принимает особенно простой вид при $s=1$. Отметим также, что если в следствии 2 множества $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^*$ таковы, что из условия $p\in\mathbf{P}$ следует, что $p+1\in\mathbf{P}^*$, то тогда условие (10) означает существование предела

$$\lim_{p\in P}\frac{f_p}{f_{p+1}}=z\neq0,\ \infty, \tag{12}$$

где s и z связаны условием $s=\frac{z}{|z|}$, так что $\arg s=\arg z$.

Полученные в следствиях 1 и 2 оценки иногда определяют положение особой точки $e^{i\omega}$ однозначным образом. Например, в следствии 2 достаточно потребовать, чтобы $\Delta(\mathbf{P}^*\setminus\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=0$. Последнее, согласно (11), будет гарантировано, если $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^*$ измеримы $\mathbf{Q}$ (слева) и $\Delta(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=\Delta(\mathbf{P}^*,\ \mathbf{Q})$. Особенно нагляден следующий частный случай.

Следствие 3 (*об отношении*). Пусть ряд (1) для $\mathbf{P} \subset \mathbf{P}^*$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\substack{p \to \infty \\ p \in \mathbf{P}}} |f_p|^{1/p} = 1 \tag{13}$$

и условию (10). Если верхние плотности множеств $\mathbf{P} = \{p_k\}_1^\infty$ и $\mathbf{P}^* = \{m_k\}_1^\infty$ совпадают, т. е.

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k}{p_k} = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k}{m_k}, \tag{14}$$

то тогда точка s — особая для ряда (1).

Для доказательства заметим, что существует бесконечное множество $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}$ такое, что с учетом (14)

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in \mathbf{Q}}} \frac{\mathfrak{M}(\mathbf{P}^* \setminus \mathbf{P}, 0, x)}{x} \leqslant \overline{\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in \mathbf{P}^*}}} \frac{\mathfrak{M}(\mathbf{P}^*, 0, x)}{x} - \overline{\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in \mathbf{P}}}} \frac{\mathfrak{M}(\mathbf{P}, 0, x)}{x} = 0.$$

Следовательно, $\Delta^*(\mathbf{P}^* \setminus \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0$ и с учетом (13) доказательство завершается ссылкой на следствие 2.

Следствие 4 (*о лакунах*). Если ряд (1) для некоторого $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}^*$ удовлетворяет условию (4′), то тогда он имеет особую точку на любой замкнутой дуге единичной окружности длины $2\pi\Delta^*(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q})$. В частности при $\Delta(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}) = 0$ единичная окружность является естественной границей ряда (1).

Для доказательства достаточно к ряду вида (1) с коэффициентами $\{f_n s^n\}_0^\infty$, где $|s| = 1$, применить следствие 1 при $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$ и $\alpha = \pi$. Следствие 4 можно вывести также из теоремы 1, примененной к тому же ряду, выбрав

$$\{n_k\}_1^\infty = \mathbf{Q}, \ \beta_k = -\arg f_{n_k} - n_k \arg s, \ k \in \mathbf{N}.$$

Требуемое утверждение следует из оценки $W^- \leqslant \Delta^*(\mathbf{P}_*, \mathbf{Q})$.

Заметим в заключение, что условие $\Delta(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}) = 0$, вообще говоря, слабее условия, что $\mathbf{P}^*$ имеет нулевую плотность в обычном смысле.

3°. *Комментарии и замечания.* 1. Первая из основных теорем — теорема 1 усиливает заключение общей теоремы Фабри. В отличие от последней оказывается достаточным использование «односторонней» информации о числе перемен знака относительно последовательности $\{n_k\}_1^\infty$ (см. (3)). Кроме того, вместо понятия максимальной плотности, используется более тонкое мероопределение (см. 2° и 3°.7), теснее связанное с последовательностью $\{n_k\}_1^\infty$. Это отчетливо проявляется, например, при сравнении соответствующих следствий этих теорем о лакунах (ср. приведенное выше следствие 4 с теоремой 2.2.2 из [2], стр. 81). Из теоремы 1 можно также получить усиление теорем Фабри об отношении (см. [2], теоремы 2.3.1, 2.3.2, стр. 49). Мы воздержались от этого, поскольку в этом отношении теорема 2 предоставляет гораздо большие возможности.

2. Теорему 2 можно рассматривать как обобщение и усиление результатов об аргументах и об отношении (Фабри, Деланж и др.).

Здесь следует отметить, что в общей теореме Фабри связь коэффициентов ряда (1) с размерами содержащей его особенности дуги, имеет опосредственный, неявный характер (выбор параметров $\{\beta_k\}_1^\infty$, подсчет числа соответствующих перемен знаков и т. д.). Эффективно эта связь обнаружена лишь в частном случае — в теореме Фабри об отношении, когда дуга вырождается в точку. Вывести из общей теоремы Фабри аналогичную закономерность для случаев невырожденных дуг до сих пор никому не удавалось — по всей видимости, это невозможно по существу. Использованием других средств, некоторые результаты в этом направлении получены Деланжем (см. [2], стр. 96, теорема 2.3.3).

Нам представляется, что теорема 2 свободна от указанных недостатков: в ней отсутствуют подлежащие выбору параметры, все фигурирующие в ней величины выражены через модули и аргументы коэффициентов ряда (1). Из теоремы 2 легко выводятся (см. следствия 1—4) утверждения типа теорем Фабри об отношении и о лакунах, некоторые из которых, при казалось бы недостаточной информации о ряде (1), дацт новые любопытные сведения об особых точках.

3. Следствие 1 выявляет совместное влияние аргументов и лакун коэффициентов ряда (1) на локализацию его особенностей. Очевидным частным случаем этого следствия является указанный выше результат Деланжа.

Следует отметить, что метод доказательства следствия 1 легко позволяет получить вместо (9) также оценки

$$|\omega| \leqslant \beta \Delta^* (P^*, Q) + (\pi - \beta) \Delta^* (P^* \setminus P, Q) + (\alpha - \beta) \delta,$$

где

$$\delta = \begin{cases} \Delta^* (P, Q) & \text{при} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \alpha, \\ \Delta_* (P, Q) & \text{при} \quad \alpha \leqslant \beta < \pi. \end{cases}$$

4. Теорема 2 позволяет привести в следствие 2 новую, более общую формулировку результатов типа теоремы Фабри об отношении. Удается, во-первых, охватить ряды с любым бесконечным множеством нулевых коэффициентов. Во-вторых, при выполнении условий (10) или (12), когда теорема Фабри об отношении, вообще говоря, теряет силу, следствие 2 позволяет, тем не менее, указать определенную дугу, содержащую особую точку ряда (1). Простые примеры показывают, что указанные в следствии 2 размеры дуги, вообще говоря, минимальны.

5. Следует отметить, что теорема Фабри об отношении указывает не более одной особой точки ряда (1). Следствие 3 (ослабляющее условия этой теоремы) в принципе не исключает возможности указания нескольких или даже бесконечного числа особых точек для фиксированного ряда (1). В частности, следствие 3 позволяет строить примеры рядов вида (1) с $|f_n| = 1$, $n \in \mathbf{N}$, для которых единичная окружность является купюрой.

6. Следствие 4, использующее информацию о лакунах ряда (1), лежащих «левее» последовательности Q, является усилением результатов Фабри и Фабри—Полиа о лакунах (см. [2], § 2.2). Здесь, как впрочем и в случае следствий 1—3, мы не приводим формулировок соответствующих следствий из теорем 1 и 2, использующих информацию «правее» от Q. В связи со следствием 4, см. также ниже пункты 3°.8 и 3°.9.

7. Перечислим некоторые из основных свойств введенных в (7)—(8) величин, используемых в следствиях 1—4. Ниже предполагается, что P, P_1, Q, Q_1—произвольные подмножества из N, причем Q и Q_1 бесконечны. Очевидно, имеем:

$$0 \leqslant \Delta_*(P, Q) \leqslant \Delta^*(P, Q) \leqslant 1;$$

$$\Delta^*(P, Q) + \Delta_*(N \setminus P, Q) = 1;$$

$$\Delta_*(P, Q) \leqslant \Delta_*(P_1, Q),\ \Delta^*(P, Q) \leqslant \Delta^*(P_1, Q) \quad \text{при} \quad P \subset P_1;$$

$$\Delta_*(P, Q) \leqslant \Delta_*(P, Q_1),\ \Delta^*(P, Q) \leqslant \Delta^*(P, Q_1) \quad \text{при} \quad Q \subset Q_1;$$

$$\Delta^*(P_1 \setminus P, Q) \leqslant \Delta^*(P_1, Q) - \Delta_*(P, Q).$$

Кроме того, выполняются следующие свойства полуаддитивности:

$$\Delta^*(P \cup P_1, Q) \leqslant \Delta^*(P, Q) + \Delta^*(P_1, Q) - \Delta_*(P \cap P_1, Q),$$

$$\Delta_*(P \cup P_1, Q) \geqslant \Delta_*(P, Q) + \Delta_*(P_1, Q) - \Delta^*(P \cap P_1, Q).$$

8. Приведенное выше свойство монотонности величины $\Delta^*(P, Q)$ по Q показывает, как уже отмечалось нами, что использование в наших результатах этой величины вместо максимальной плотности ($=\Delta^*(P, N)$) в смысле Г. Полиа, приводит к более тонким результатам. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пусть последовательность $Q = \{n_k\}_1^\infty \subset N$ удовлетворяет условию $n_k < (1-\theta_0)\, n_{k+1}$, $\theta_0 \in (0, 1)$. Для множества $P \subset N$ и числа $\theta \in [\theta_0, 1)$ обозначим

$$P_\theta = P \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} [\,(1-\theta)\, n_k, n_k].$$

Выбирая произвольное $\Delta \in [0,1)$, докажем, что существует такое множество $P \subset N$, что $\Delta^*(P, Q) = \Delta$, однако $\Delta^*(P_\theta, N) = 1$ для всех $\theta \in [\theta_0, 1)$.

В самом деле, рассмотрим бесконечную систему $I \subset [1-\theta_0, 1)$ отрезков попарно без общих точек. Выберем эти отрезки так, чтобы линейная мера $d(\tau)$ множества $[\tau, 1) \cap I$, $\tau \in (0,1)$, удовлетворяла условию

$$\lim_{\tau \to 1} \frac{d(\tau)}{1-\tau} = \Delta. \tag{15}$$

Возьмем в качестве P множество

$$P = Q \cup (N \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k),\quad I_k = \{n_k x : x \in I\}.$$

Далее, рассмотрим множество $I \cap [\tau, 1-(1-\tau)^2]$, состоящее из конечного числа ($=m_\tau$) отрезков суммарной длины $d_1(\tau)$. Число точек M множества P на конечной системе отрезков $I_k \cap [\tau n_k,\ n_k - n_k\,(1-\tau)^2]$ удовлетворяет оценке

$$|M - n_k d_1(\tau)| \leqslant 2\, m_\tau.$$

Отсюда следует

$$\left|\frac{\mathfrak{M}(P, \tau, n_k)}{n_k} - d_1(\tau)\right| \leqslant \frac{2\, m_\tau + 2}{n_k} + (1-\tau)^2.$$

Замечая еще, что $d_1(\tau) = d(\tau) + o(1-\tau)$ при $\tau \to 1$, с учетом (15) и определения (7) получим, что $\Delta^*(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \Delta$. Утверждение $\Delta^*(\mathbf{P}_0, \mathbf{N}) = 1$ для всех $\theta \in [\theta_0, 1)$ следует из замечания, что для любого $\tau \in [1-\theta, 1)$ существует отрезок $[\alpha, \beta] \subset I \cap [\tau, 1)$, так что множество $\mathbf{P}_0$ содержит все целые точки отрезков $[\alpha n_k, \beta n_k]$, $k \in \mathbf{N}$.

С помощью построенного множества $\mathbf{P}$ легко привести примеры рядов вида (1), для которых утверждение нашей теоремы 1 сильнее общей теоремы Фабри. Для простоты ограничимся случаем лакунарных рядов. Рассмотрим ряд вида (1), где $f_n = 1$ для $n \in \mathbf{P}$ и $f_n = 0$ для $n \overline{\in} \mathbf{P}$. Для этого ряда из следствия 4 вытекает, что он имеет особую точку на любой дуге единичной окружности длины $2\pi\Delta$. Между тем, поскольку $\Delta^*(\mathbf{P}, \mathbf{N}) = 1$, то из теоремы Фабри—Полиа о лакунах следует лишь, что ряд (1) имеет одну особую точку на единичной окружности.

9. Вопрос о точности условий общей теоремы Фабри и даже ее частных случаев (о лакунах и об отношении) мало исследован. Г. Полиа доказал (см. [2], стр. 93) точность теоремы Фабри о лакунах в случае лакун нулевой плотности. В общем случае вопрос остается открытым даже для лакун с положительной плотностью. Здесь мы покажем, что опираясь на лемму 1 (см. ниже § 2, пункт 1°), можно дать утвердительный ответ на последний вопрос.

С этой целью, для последовательности $\mathbf{P} \subset \mathbf{N}$ плотности $\Delta \in [0, 1)$ рассмотрим, следуя Г. Полиа, ряд вида (1) с коэффициентами $f_n = \varphi(n)$, где

$$\varphi(z) = \prod_{p \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{P}} \left(1 - \frac{z^2}{p^2}\right).$$

Тогда, очевидно, $f_n = 0$ для $n \overline{\in} \mathbf{P}$ и $f_n \neq 0$ для $n \in \mathbf{P}$. Поскольку (см. [2], стр. 25) индикаторная диаграмма функции φ совпадает с отрезком с концами $\pm i\pi(1-\Delta)$, то достаточная часть леммы 1 применима к ряду (1) для любого $\sigma > \pi(1-\Delta)$. Мы получим, что все точки замкнутой дуги единичной окружности с центром -1 длины $2\pi(1-\sigma)$ являются точками регулярности ряда (1). Объединение указанных дуг (по σ) определяет открытую дугу регулярности ряда (1) длины $2\pi\Delta$. Таким образом, указанное в теореме Фабри—Полиа число $2\pi\Delta$ нельзя, вообще говоря, заменить меньшим.

§ 2. Доказательства

1°. Вспомогательные леммы. Ниже мы используем общепринятые теоретико-множественные обозначения. В частности, для множества $e \subset \mathbf{C}$ его граница, замыкание, внутренность и дополнение, соответственно, будут обозначаться через ∂e, $\overline{e}$, e° и $\mathbf{C} \setminus e$.

Обозначим далее через $D[\lambda, \mu]$ открытый круг с диаметром $[\lambda, \mu] \subset \mathbf{R}$ и положим для краткости $D_r = D[-r, r]$.

Рассмотрим угол

$$\Delta_\beta = \left\{ z : |\arg z| \leqslant \frac{\beta}{2} \right\} \qquad \text{для } \beta \in [0, 2\pi),$$

и через $H(\Delta_\beta)$ будем обозначать множество функций, каждая из которых голоморфна в некоторой окрестности Δ_β. Для $\varphi \in H(\Delta_\beta)$ величину

$$\sigma_\varphi = \varlimsup_{\substack{z\to\infty \\ z\in\Delta_\beta}} |z|^{-1} \log^+ |\varphi(z)|$$

принято называть *экспоненциальным типом* функции φ. Говорят, что φ (конечного) *экспоненциального типа* на Δ_β, если $\sigma_\varphi < +\infty$. В этом случае функцию

$$h_\varphi(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} r^{-1} \log|\varphi(re^{i\theta})|, \ |\theta| \leqslant \beta$$

называют (экспоненциальной) *индикатриссой* φ.

Лемма 1. *Для того, чтобы степенной ряд* (1) *допускал аналитическое продолжение на замкнутую дугу* $\partial D_1 \setminus \Delta^0_{2\sigma}$, $\sigma \in (0, \pi)$, ***необходимо и достаточно,*** *чтобы при некотором* $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ *существовала функция* $\varphi \in H(\Delta_{2\alpha})$ *экспоненциального типа* $\sigma_\varphi < \sigma$, *такая, что*

$$\varphi(n) = f_n, \ n = 0, 1, \cdots. \tag{16}$$

Замечание. Если существует функция φ, удовлетворяющая условиям леммы 1, то тогда легко видеть (ср. [5], стр. 28), что *ее индикатрисса* h *удовлетворяет неравенству*

$$h_\varphi(\theta) \leqslant \sigma' |\sin\theta|, \ |\theta| \leqslant \alpha, \tag{17}$$

где $\sigma' (= \sigma_\varphi) < \sigma$. *Обратно, если* $\sigma_\varphi < +\infty$ *и выполнено (17) для* $\sigma' < \sigma$, *то тогда* $\sigma_\varphi \leqslant \sigma' < \sigma$.

Необходимость. Пусть ряд (1) представляет голоморфную функцию f в некоторой односвязной области $\Omega \supset D_1 \cup (\partial D_1 \setminus \Delta^0_{2\sigma})$.

Пусть $\log\zeta = \log|\zeta| + i\arg\zeta$ — главное значение логарифма в области $\mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$, так что $\log 1 = 0$. Полагая

$$\zeta^w = \exp(w \log\zeta) \text{ для } w \in \mathbf{C},$$

определим искомую функцию φ формулой

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \zeta^{-z-1} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{18}$$

Здесь γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в Ω, $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 1$, пересекающая полуось $(-\infty, 0]$ только в одной точке вида $-e^\delta$, $\delta > 0$. Если эту точку на γ фиксировать, то ввиду голоморфности подынтегральной функции по ζ в $\Omega \setminus (-\infty, 0]$, интеграл (18) не будет зависеть от выбора кривой γ. Определяемая им функция φ является целой функцией экспоненциального типа. Далее, для значений $z = 0, 1, \cdots$ интеграл (18) превращается в формулу для коэффициентов степенного ряда функции f, так что условия (16) выполняются. Что касается условия (17), то оно усматривается из последующих оценок интеграла (18) при подходящем выборе γ.

Числа $\delta > 0$, $\sigma' \in (0, \sigma)$ будем фиксировать так, чтобы

$$\gamma_1 = \partial D_{e^\delta} \setminus \Delta^0_{\sigma'} \subset \Omega.$$

Возьмем теперь произвольное число $\varepsilon \in (0, 1)$ и положим $\gamma_\varepsilon = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cup \gamma_3$, где

$$\gamma_2 = \partial D_{e^{-\varepsilon}} \cap \Delta_{\sigma'},$$
$$\gamma_3 = \{\zeta : e^{-\varepsilon} \leqslant |\zeta| \leqslant e^{\delta},\ |\arg \zeta| = \sigma'\}.$$

Выбирая в (18) $\gamma = \gamma_\varepsilon$, представим интеграл (18) в виде суммы интегралов I_1, I_2, I_3, соответственно, по γ_1, γ_2, γ_3. Пусть

$$|f(\zeta)| \leqslant M_\varepsilon \quad \text{для } \zeta \in \gamma_\varepsilon.$$

Тогда, полагая $z = x + iy = re^{i\theta}$ и учитывая (18), для $x \geqslant 0$ имеем оценки:

$$|I_1| \leqslant M_\varepsilon \exp(-\delta x + \pi |y|),$$
$$|I_2| + |I_3| \leqslant (1 + \delta + \varepsilon)\ M_\varepsilon \exp(\varepsilon x + \sigma' |y|).$$

Из этих оценок при $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}$ следует

$$h_\varphi(\theta) \leqslant \max(\varepsilon \cos\theta + \sigma' |\sin\theta|, -\delta\cos\theta + \pi |\sin\theta|).$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получим оценку

$$h_\varphi(\theta) \leqslant \max(\sigma' |\sin\theta|, -\delta\cos\theta + \pi|\sin\theta|), \qquad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

очевидно гарантирующую выполнение условия (17) для достаточно малого $\alpha > 0$.

Достаточность. Пусть теперь для некоторых $\sigma \in (0, \pi]$ и $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\varphi \in H(\Delta_{2\alpha})$ экспоненциального типа удовлетворяет оценке (17) при $\sigma' < \sigma$.

Доказательство утверждения, что ряд (1), (16) допускает аналитическое продолжение на замкнутую дугу $\partial D_1 \setminus \Delta^0_{2\sigma}$ основано на известном интегральном представлении Линделефа [6] рядов вида (1), (16), приспособленном к нашим условиям.

Положим

$$G = \Delta^0_{2\alpha} \setminus \overline{D}_{0,5},\ \Gamma = \partial G,\ \gamma_m = G \cap \partial D_{m+0,5},$$

ориентировав Γ положительно относительно G и считая $m = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим компакт $K = \overline{D}_{r_1} \setminus \Delta^0_{2(\sigma-\tau)}$, где $r_1 = 1 + \tau\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $\tau = \dfrac{\sigma - \sigma'}{3}$. Очевидно, что $\partial D_1 \setminus \Delta^0_{2\sigma} \subset K^0$.

Пусть

$$z^\zeta = \exp(\zeta \log z) \quad \text{для } \zeta \in \Delta_{2\alpha},$$

где $\log z$ — непрерывная на K ветвь логарифма такая, что $\log(-1) = i\pi$. Докажем, что формула Линделефа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n = \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, z^\zeta}{e^{2\pi i \zeta} - 1}\, d\zeta = J(z) \tag{19}$$

имеет место для всех $z \in D_1 \cap K$ и, что не менее важно, интеграл $J(z)$ сходится равномерно для $z \in K$.

Для достаточно малого $\rho \in (0, 2^{-1})$ с учетом (17) приходим (см. [5], стр. 34) к следующей предварительной оценке подынтегральной функции $g(z, \zeta)$ в (19):

$$\text{для } z \in K,\ \zeta = \xi + i\eta \in \Delta_{2\alpha} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D[n-\rho,\ n+\rho]$$

$$|g(z, \zeta)| \leqslant c \exp\{\xi \log|z| - d(z)|\eta| + \varepsilon(|\zeta|)|\zeta|\}, \tag{20}$$

где $d(z) = \pi - \sigma' - |\pi - \arg z| > 0$, $\varepsilon(|\zeta|) \to 0$ при $\zeta \to \infty$, $c > 0$—некоторая константа.

Поскольку $\xi = |\zeta| \cos\alpha$, $\eta = |\zeta| \sin\alpha$ для $\zeta \in \partial\Delta_{2\alpha}$ и $d(z) > 2\tau$, $\log|z| \leqslant \leqslant \tau \operatorname{tg}\alpha$ для $z \in K$, то из (20) получим оценку

$$|g(z, \zeta)| \leqslant c \exp\{-[\tau \sin\alpha - \varepsilon(|\zeta|)]|\zeta|\} \text{ для } \zeta \in \Gamma \setminus \partial D_{0,5},\ z \in K.$$

Полученная оценка доказывает равномерную сходимость на K интеграла $J(z)$ и, тем самым, голоморфность $J(z)$ для $z \in K^0$ с учетом голоморфности по z функции $g(z, \zeta)$.

Чтобы доказать формулу (19), зафиксируем $z \in D_1 \cap K$. Учитывая, что $\xi = |\zeta| \cos\alpha$ для $\zeta \in \partial\Delta_{2\alpha}$, из (20) получим оценку

$$|g(z, \zeta)| \leqslant c \exp\left\{-\left[\cos\alpha \log\frac{1}{|z|} - \varepsilon(|\zeta|)\right]|\zeta|\right\},$$

верную, в частности, при $\zeta \in \gamma_m$.

Указанная оценка, очевидно, влечет условие

$$\int_{\gamma_m} g(z, \zeta)\, d\zeta \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

гарантирующее применимость к области $G \cap D_{m+0,5}$ теоремы о вычетах для вычисления $J(z)$, что сразу приводит к (19).

Теперь утверждение достаточности следует с учетом (16) из формулы (19) и голоморфности $J(z)$ на K^0.

Лемма 2. *Пусть G — функция Грина круга $D = D[\lambda, \mu]$, n — внутренняя нормаль к ∂D. Имеет место равенство*

$$\int_{\partial D} |\operatorname{Im}\zeta| \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n} |d\zeta| = 2\int_{\lambda}^{\mu} G(z, t)\, dt \text{ для } z \in (\lambda, \mu). \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $D^{\pm} = D \cap \Pi^{\pm}$, где $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\Pi^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Применяя к полукругам $D^{\pm}$ и к функции $v = |\operatorname{Im} z|$ известную формулу Грина (см. [7], стр. 13, 16) и складывая полученные равенства, имеем: для $z \in D^+ \cup D^-$

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(v \frac{\partial}{\partial n} \log\frac{1}{|\zeta - z|} - \log\frac{1}{|\zeta - z|} \frac{\partial v}{\partial n}\right)|d\zeta| - \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\mu} \log\frac{1}{|z-t|}\, dt. \tag{22}$$

Из гармоничности в D первого интеграла в (22) и непрерывности v следует гармоничность в D функции

$$v(z)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda}^{\mu}\log\frac{1}{|z-t|}\,dt,$$

так что функция

$$H_v^D(z)=v(z)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda}^{\mu}G(z,\ t)\,dt, \tag{23}$$

очевидно, также гармонична в D. Далее, поскольку $G=0$ на ∂D, то H_v^D на ∂D совпадает с v. Следовательно, H_v^D является решением задачи Дирихле для круга D с непрерывной граничной функцией и, как известно, представляется формулой Пуассона

$$H_v^D(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}v\frac{\partial G(\zeta,\ z)}{\partial n}|d\zeta|,\ z\in D.$$

Отсюда, полагая $z\in(\lambda,\ \mu)$ и учитывая (23), получим (21). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть ψ—вещественная аналитическая функция на промежутке $I=[p,\ q]$, где $p,\ q\in Z$, $p<q$, W—число перемен знака конечной последовательности $(-1)^j\ \psi(j)$, $j\in I\cap Z$. Тогда число нулей функции ψ на I, с учетом их кратности, не меньше $(q-p)-W$.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидно в случае, когда функция ψ равна нулю во всех точках $j\in I\cap Z$, поскольку тогда $W=0$ и число нулей ψ на I не меньше $q-p+1$.

Итак, пусть среди чисел $\psi(j)$, $j\in I\cap Z$, имеются ненулевые. Без ограничения общности можем считать, что $\psi(p)\neq 0$, поскольку в общем случае доказательство легко сводится к случаю промежутка $[p',\ q]\subset I$, где p'—наименьшее из тех $j\in I\cap Z$, для которых $\psi(j)\neq 0$.

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа P, определяемый данными:

1) $P(j)=0$, когда $j\in I\cap Z$ и $\psi(j)\neq 0$;

2) $P(j)=\pm 1$, когда $j\in I\cap Z$ и $\psi(j)=0$, причем знак $P(j)$ совпадает со знаком числа $(-1)^{j'}\ \psi(j')$, где j'—наибольшее из тех $k\in I\cap Z$, для которых $k<j$ и $\psi(k)\neq 0$.

Образуем далее функции $\psi_\delta=\psi+\delta P$, $\delta>0$. Обозначая через Ω_ρ ρ-окрестность промежутка I, будем иметь, что для достаточно малого $\rho_0>0$ все эти функции голоморфны в области Ω_ρ и вещественны на $\Omega_\rho\cap R$, $\rho\in(0,\ \rho_0)$. Очевидно также, что для каждого $\delta>0$ число перемен знака последовательности $(-1)^j\ \psi_\delta(j)$, $j\in I\cap Z$, совпадает с числом перемен знака последовательности $(-1)^j\ \psi(j)$, $j\in I\cap Z$. Поскольку при этом все числа $\psi_\delta(j)$, $j\in I\cap Z$, ненулевые, число перемен знака этой последовательности не меньше $(q-p)-W$. Тогда по теореме Больцано-Коши каждая функция ψ_δ, $\delta > 0$, имеет не менее, чем $q - p - W$ нулей на промежутке I, и значит, в окрестности $\Omega_\rho \supset I$, $\rho \in (0, \rho_0)$.

Очевидно, что при $\delta \to 0$ функции ψ_δ сходятся к ψ равномерно на Ω_ρ, $\rho \in (0, \rho_0)$. Следовательно, по теореме Руше получим, что число нулей функции ψ в Ω_ρ, $\rho \in (0, \rho_0)$, с учетом их кратности, не меньше $q - p - W$. Отсюда, ввиду произвольности $\rho \in (0, \rho_0)$, получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

2.° Доказательство теорем 1 и 2. Предположим, что все точки замкнутой дуги $\partial D_1 \cap \Delta_{2\pi x}$, где $x \in [0, \pi)$, являются точками регулярности для ряда (1). Тогда дуга $\partial D_1 \setminus \Delta^0_{2\sigma}$, где $\sigma = \pi(1 - x)$, является дугой регулярности для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n z^n.$$

Применяя к этому ряду лемму 1, мы найдем функцию φ, удовлетворяющую вместо (16) условию

$$(-1)^j \varphi(j) = f_j, \; j = 0, 1, \cdots \tag{24}$$

и всем остальным условиям этой леммы.

Образуем далее функцию

$$\psi(z, \beta) = \frac{1}{2}[\varphi(z) e^{i\beta} + \overline{\varphi(\bar{z})} e^{-i\beta}], \; z \in \Delta_{2\alpha}, \; \beta \in \mathbf{R},$$

голоморфную по z, вещественную при $z \in [0, +\infty)$ и удовлетворяющую, с учетом (24), интерполяционным условиям

$$(-1)^j \psi(j, \beta) = \mathrm{Re}(f_j e^{i\beta}), \; j = 0, 1, \cdots . \tag{25}$$

Поскольку $|\psi(z, \beta)| \leqslant \max(|\varphi(z)|, |\varphi(\bar{z})|)$, $z \in \Delta_{2\alpha}$, то с учетом известного свойства индикатриссы (см. [8], стр. 97, теорема 28) применительно к функции φ и оценки (17) получим:

$$\log|\psi(z, \beta)| \leqslant \sigma' |\mathrm{Im}\, z| + \varepsilon(|z|)|z|, \; z \in \Delta_{2\alpha}, \tag{26}$$

где $\sigma' < \pi(1 - x)$, а ε не зависит от β и $\varepsilon(|z|) \downarrow 0$ при $|z| \uparrow +\infty$.

Далее, мы хотим применить к функции $\psi(z, \beta)$ известную формулу Пуассона—Иенсена (см. [9], стр. 165). С этой целью зафиксируем некоторые параметры λ и μ так, чтобы

$$0 < \lambda < 1 < \mu, \; \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} \leqslant \sin\alpha.$$

Тогда ясно, что круг $D[\lambda, \mu] \subset \Delta_{2\alpha}$.

Пусть G и G_0—функции Грина кругов $D[\lambda, \mu]$ и D_1, соответственно. Полагая, далее

$$\zeta = L(w) = \frac{\mu - \lambda}{2} w + \frac{\mu + \lambda}{2}, \; a = L^{-1}(1) = \frac{2 - (\mu + \lambda)}{\mu - \lambda}, \tag{27}$$

имеем очевидно

$$g(\zeta) = G(\zeta, 1) = G_0(w, a) = \log\left|\frac{1 - aw}{w - a}\right|. \qquad (28)$$

Из этой формулы следует, в частности, что $g(\tau)$ возрастает на $(\lambda, 1)$ и убывает на $(1, \mu)$, поскольку аналогичным образом ведет себя $G_0(x, a)$ на $(-1, a)$ и на $(a, 1)$, соответственно.

Далее, пусть $\Gamma = \partial D[\lambda, \mu]$ и n—внутренняя нормаль к Γ. Применяя к функции $\psi(n_k z, \beta)$ и кругу $D[\lambda, \mu]$ в точке $z = 1$ формулу Пуассона-Иенсена (с учетом (25)), умножая затем обе ее части на n_k^{-1}, получим оценку

$$\frac{1}{n_k}\log|\mathrm{Re}(f_{n_k} e^{i\beta})| < -\frac{1}{n_k}\sum_{\nu} g(\tau_{k,\nu}(\beta)) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\log|\psi(n_k\zeta, \beta)|}{n_k}\frac{\partial G(\zeta, 1)}{\partial n}|d\zeta| =$$

$$= -\sum\nolimits_{k,\beta} + J_{k,\beta}, \qquad (29)$$

где сумма берется по всем нулям $\tau = \tau_{k,\nu}(\beta) \in (\lambda, \mu)$, $\tau \neq 1$, функции $\psi(n_k\tau, \beta)$, с учетом кратности.

Интеграл $J_{k,\beta}$ в (29) имеет достаточно простую оценку сверху. Заметив, что $n_k\zeta \in \Delta_{2\alpha}$ при $\zeta \in \Gamma$, и полагая в (26) $z = n_k\zeta$, будем иметь

$$J_{k,\beta} \leqslant \frac{\sigma'}{2\pi}\int_{\Gamma}|\mathrm{Im}\, z|\,\frac{\partial G(\zeta, 1)}{\partial n}|d\zeta| + \mu\varepsilon(\lambda n_k),$$

откуда с учетом леммы 2, полагая $\sigma' = \pi(1 - \varkappa')$, получим следующую (не зависящую от β) оценку:

$$J_{k,\beta} \leqslant (1 - \varkappa')\int_{\lambda}^{\mu} g(\tau)\,d\tau + \mu\varepsilon(\lambda n_k), \text{ где } \varkappa' > \varkappa. \qquad (30)$$

Далее, несколько преобразуем сумму $\sum_{k,\beta}$. С этой целью для $\tau \geqslant 0$ обозначим через $W_k(\tau, \beta)$ число перемен знака конечной последовательности $\{\mathrm{Re}(f_j e^{i\beta})\}$ при $j \in [\tau n_k, n_k]$, а через $m_k(\tau, \beta)$—количество нулей функции $\psi(z, \beta)$ в этом же промежутке (с учетом кратности). Применяя лемму 3 к функции $\psi(z, \beta)$ и к максимальному отрезку I с целыми концами, содержащемуся в *открытом* промежутке $(\tau n_k, n_k)$, получим оценку

$$m_k(\tau, \beta) - m_k(1, \beta) \geqslant n_k|1 - \tau| - W_k(\tau, \beta) - 2. \qquad (31)$$

Теперь мы можем записать $\sum_{k,\beta}$ интегралом Стильтьеса:

$$\sum\nolimits_{k,\beta} = \frac{1}{n_k}\int_{\lambda}^{\mu} g(\tau)\,|dm_k(\tau, \beta)|.$$

Интегрируя по частям и учитывая свойство монотонности $g(\tau)$, будем иметь

$$\sum\nolimits_{k,\beta} = \frac{1}{n_k}\int_{\lambda}^{\mu}[m_k(\tau, \beta) - m_k(1, \beta)]\,|dg(\tau)|.$$

Отсюда, для достаточно больших $k\ (\geqslant k_0)$, применяя оценку (31) при $|\tau-1| \geqslant n_k^{-1}$ и учитывая неотрицательность подынтегральной функции, получим

$$\sum_{k,\beta} \geqslant \int\limits_{\lambda}^{\mu} \left[|1-\tau| - \frac{W_k(\tau,\beta)}{n_k} \right] |dg(\tau)| - \delta_k, \tag{32}$$

где

$$\delta_k = \int\limits_{1-n_k^{-1}}^{1+n_k^{-1}} |1-\tau|\, |dg(\tau)| + \frac{2}{n_k} \left[g\left(1-\frac{1}{n_k}\right) + g\left(1+\frac{1}{n_k}\right) \right].$$

Очевидно, что δ_k не зависит от β и $\delta_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

Из (29), (30) и (32) следует (для $k \geqslant k_0$) оценка

$$\frac{1}{n_k} \log |\mathrm{Re}\,(f_{n_k} e^{i\beta})| \leqslant \int\limits_{\lambda}^{\mu} \left[\frac{W_k(\tau,\beta)}{n_k} - \varkappa' |1-\tau| \right] |dg(\tau)| + \rho_k, \tag{33}$$

где ρ_k не зависит от β и $\rho_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

Далее, доказательства теорем 1 и 2 временно разветвляются.

1) В условиях теоремы 1 имеем, что $W_k(\tau, \beta_k) = W_k(\tau)$. Обозначим

$$c_\tau = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{W_k(\tau)}{|1-\tau|\, n_k}. \tag{34}$$

Полагая в (33) $\beta = \beta_k$, перейдем в обеих ее частях к верхнему пределу при $k \to +\infty$. Учитывая (2) и (34) и применяя лемму Фату (см., например, [10], стр. 292), получим

$$0 \leqslant \int\limits_{\lambda}^{\mu} (c_\tau - \varkappa')\, |1-\tau|\, |dg(\tau)|, \quad \varkappa' > \varkappa. \tag{35}$$

2) В условиях теоремы 2 докажем, что оценка (35) сохраняется, если в (34) положить $W_k(\tau) = \dfrac{1}{\pi} V(\tau, n_k)$, где $V(\tau, n_k)$ определяется по (6).

С этой целью разделим обе части неравенства (33) на π и проинтегрируем по β от нуля до π. Мы получим

$$\frac{1}{n_k} \log \frac{|f_{n_k}|}{2} \leqslant \int\limits_{\lambda}^{\mu} \left[\frac{I_k(\tau)}{\pi n_k} - \varkappa' |1-\tau| \right] |dg(\tau)| + \rho_k, \tag{36}$$

где

$$I_k(\tau) = \int\limits_{0}^{\pi} W_k(\tau, \beta)\, d\beta.$$

Очевидно имеем: $W_k(\tau, \beta) \leqslant \sum_j W_{kj}(\tau, \beta)$, где j пробегает промежуток $[\tau n_k, n_k - 1]$ при $\tau < 1$ и $[n_k + 1, \tau n_k]$ при $\tau > 1$, а $W_{kj}(\tau, \beta)$ равно числу перемен знака в паре $\cos(\omega_j + \beta)$, $\cos(\omega_{j+1} + \beta)$ при $|\omega_{j+1} - \omega_j| < \pi$ и $W_{kj} \equiv 1$ при $|\omega_{j+1} - \omega_j| = \pi$. Поэтому

$$I_k(\tau) \leqslant \sum_j I_{kj}, \quad \text{где } I_{kj} = \int\limits_0^\pi W_{kj}(\tau, \beta)\, d\beta. \tag{37}$$

Легко показать, что $I_{kj} = |\omega_{j+1} - \omega_j|$ В случае $|\omega_{j+1} - \omega_j| = \pi$ это очевидно. Если же $|\omega_{j+1} - \omega_j| < \pi$, то заметим, что $W_{kj}(\tau, \beta)$ равно числу корней уравнения $\cos(\omega + \beta) = 0$ для $\omega \in (\omega_j, \omega_{j+1})$.

Рассмотрим теперь множество e_{kj} всевозможных значений $\beta \in R$, для каждого из которых существует $\omega = \omega_\beta \in (\omega_j, \omega_{j+1})$ так, что $\cos(\omega + \beta) = 0$. Легко видеть, что

$$e_{kj} = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \pi m - \omega_{j+1}, \frac{\pi}{2} + \pi m - \omega_j\right),$$

так что множество $e_{kj} \cap [0, \pi]$ состоит из одного или двух промежутков суммарной длины $|\omega_{j+1} - \omega_j|$. Требуемое утверждение следует из того, что

$$W_{kj}(\tau, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta \in e_{kj} \cap [0, \pi], \\ 0 & \text{при } \beta \in [0, \pi] \setminus e_{kj}. \end{cases}$$

Таким образом, с учетом (37), получим оценку

$$I_k(\tau) \leqslant \sum_j |\omega_{j+1} - \omega_j| = V(\tau, n_k) = \pi\, W_k(\tau).$$

Отсюда и из (36) имеем

$$\frac{1}{n_k} \log \frac{|f_{n_k}|}{2} \leqslant \int\limits_\lambda^\mu \left[\frac{W_k(\tau)}{|1 - \tau|\, n_k} - x' \, |1 - \tau| \right] |dg(\tau)| + \rho_k.$$

Перейдем в этом неравенстве к верхнему пределу при $k \to +\infty$. С учетом (34) и (4) и применяя лемму Фату, опять приходим к оценке (35).

Дальнейшее доказательство теорем 1 и 2 одинаково и основано на неравенстве (35).

Заметим сперва, что из (35) следует оценка

$$0 < (c_\lambda^- - x') \int\limits_\lambda^1 (1 - \tau)\, dg(\tau) + (c_\mu^+ - x') \int\limits_1^\mu (1 - \tau)\, dg(\tau), \quad x' > x, \tag{38}$$

где положено

$$c_\lambda^- = \sup_{\lambda < \tau < 1} c_\tau, \quad c_\mu^+ = \sup_{1 < \tau < \mu} c_\tau.$$

Сделав в интегралах из (38) замену переменной $\tau = L(t)$ (см. (27) и (28)) и разделив полученное неравенство на $\frac{\mu - \lambda}{2}$, приходим к оценке

$$0 \leqslant (c_\lambda^- - \varkappa')\, J_1(a) + (c_\mu^+ - \varkappa')\, J_2(a), \quad \varkappa' > \varkappa, \tag{39}$$

где

$$J_1(a) = \int\limits_{-1}^{a} (a-t)\, d\, G_0(t, a), \; J_2(a) = \int\limits_{a}^{1} (a-t)\, d\, G_0(t, a),$$

Эти интегралы легко вычисляются прямой подстановкой значения функции G_0 по формуле (28):

$$J_1(a) = J_2(-a) = \frac{1-a^2}{a} \log \frac{1}{1-a}, \; -1 < a < 1.$$

Отсюда, учитывая, что $a \to -1$ при $\lambda \to 1-0$ (при фиксированном μ) и $a \to +1$ при $\mu \to 1+0$ (при фиксированном λ), получим

$$\lim_{\lambda \to 1-0} \frac{J_1(a)}{J_2(a)} = \lim_{\mu \to 1+0} \frac{J_2(a)}{J_1(a)} = 0.$$

Отсюда и из (39) следует

$$0 \leqslant c_\lambda^- - \varkappa', \; 0 \leqslant c_\mu^+ - \varkappa', \quad \varkappa' > \varkappa. \tag{40}$$

Замечая, что существуют пределы

$$c^- = \lim_{\lambda \to 1-0} c_\lambda^-, \; c^+ = \lim_{\mu \to 1+0} c_\mu^+, \; c = \min(c^-, c^+), \tag{41}$$

из (40) получим, что $\varkappa' \leqslant c^-$ и $\varkappa' \leqslant c^+$, т. е. $\varkappa' \leqslant c$ и одновременно $\varkappa' > \varkappa$. Таким образом, выполняется строгое неравенство $\varkappa < c$.

Вспомнив наше предположение в начале доказательства теорем 1 и 2, из неравенства $\varkappa < c$ мы заключаем, что дуга $\partial D_1 \cap \Delta_{2\pi c}$ не является дугой регулярности ряда (1). Это означает, что ряд (1) имеет особую точку вида $e^{i\omega}$, где $|\omega| \leqslant \pi c$. Нам остается отметить, что $c = W^*$ в условиях теоремы 1 и $c = \pi^{-1} V^*$ в условиях теоремы 2. Это легко следует из сравнения формулы (41) с учетом (34) с формулами (3) и (5) соответственно (во втором случае в (34) надо полагать $W_k(\tau) = \pi^{-1} V(\tau, n_k)$). Доказательство теорем 1 и 2 завершено.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 18. VII. 1986

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Աստիճանային շարքերի եզակիությունների տեղայնացումը զուգամիտության շրջանի եզրին (*ամփոփում*)

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում են

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} |f_n|^{1/n} = 1 \tag{1}$$

տեսքի աստիճանային շարքերի եզակիությունների տեղայնացման հարցերը։

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները։

Թեորեմ 1-ը ուժեղացնում է Ֆաբրիի հայտնի ընդհանուր թեորեմը և սրա ավելի պարզ ձևակերպումը։ Թեորեմ 2-ում գտնված են բացահայտ պայմաններ (1) շարքի գործակիցների (Նրանց բացարձակ արժեքների և արգումենտների) վրա, որոնք ապահովում են տված եզրային աղեղի վրա եզակի կետի առկայությունը։

Թեորեմ 1. Դիցուք (1) շարքի համար բնական թվերի $n_k \uparrow +\infty$ և իրական թվերի $(\beta_k)_1^\infty$ հաջորդականություններն այնպես են ընտրված, որ

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \, |\mathrm{Re}\,(f_{n_k} e^{i\beta_k})|^{1/n_k} = 1.$$

Նշանակենք $W_k(\tau)$-ով $\{\mathrm{Re}\,(f_n e^{i\beta_k})\}$ հաջորդականության նշանափոխությունների քանակ, երբ $n \in [\tau n_k, n_k]$, $\tau > 0$, և թող

$$W^* = \min\{W^-, W^+\}, \quad W^\pm = \overline{\lim_{\tau\to 1\pm 0}} \, \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W_k(\tau)}{|1-\tau|\, n_k}:$$

Այնժամ *(1)* շարքն ունի $e^{i\omega}$ տեսքի եզակի կետ, որտեղ $|\omega| \leqslant \pi W^*$.

Թեորեմ 2. (արգումենտների մասին). Դիցուք (1) շարքի համար $\{n_k\}_1^\infty \subset N$ հաջորդականությունն այնպես է ընտրված, որ

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \, |f_{n_k}|^{1/n_k} = 1.$$

Դիցուք

$$f_n = |f_n|\, e^{i\omega_n}, \quad \text{երբ} \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

որտեղ $|\omega_{n+1} - \omega_n| \leqslant \pi$ և նշանակենք

$$V^* = \min\{V^- V, {}^+\}, \quad V^\pm = \overline{\lim_{\tau\to 1\pm 0}} \, \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{V(\tau, n_k)}{|1-\tau|\, n_k},$$

$$V(\tau, q) = \sum_{n\in[\tau q,\, q]} |\omega_{n+1} - \omega_n|, \quad \tau \geqslant 0.$$

Այնժամ *(1)* շարքն ունի $e^{i\omega}$ տեսքի եզակի կետ, որտեղ $|\omega| \leqslant V^*$.

Նշված ընդհանուր թեորեմներից առանձնացված են մի շարք հետևանքներ, որոնք ընդհանրացնում և ուժեղացնում են աստիճանային շարքերի համար Ֆաբրիի բացթողումների և հարաբերության մասին թեորեմները:

N. U. ARAKELYAN. V. A. MARTIROSYAN. *The location of singularities of power series on the circle of convergence* (summary)

In this paper the authors investigate questions concerning location of singularities of power series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \, |f_n|^{1/n} = 1. \tag{1}$$

The following main results are established. Theorem 1 strengthens the famous general theorem of Fabry and has simpler formulation. In theorem 2 explicit conditions on coefficients (on their moduli and arguments) are found, which guarantee existence of a singular point on a given boundary arc.

Theorem 1. *Let for the series (1) sequences of positive integers* $n_k \uparrow +\infty$ *and of real numbers* $(\beta_k)_1^\infty$ *be chosen in such a way, that*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \, |\mathrm{Re}\,(f_{n_k} e^{i\beta_k})|^{1/n_k} = 1.$$

Denote by $W_k(\tau)$ *the number of sign changes of the sequence* $\{\mathrm{Re}\,(f_n e^{i\beta_k})\}$ *for* $n \in [\tau n_k, n_k]$, $\tau > 0$, *and let*

$$W^* = \min\{W^-, W^+\}, \quad W^\pm = \overline{\lim_{\tau\to 1\pm 0}} \, \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W_k(\tau)}{|1-\tau|\, n_k}.$$

Then the series (1) has a singular point of the form $e^{i\omega}$, where $|\omega| \leqslant \pi W^*$.

Theorem 2 (*on arguments*). *Let for the series (1) the sequence $\{n_k\}_1^\infty \subset N$ are chosen in such a way, that*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \ |f_{n_k}|^{1/n_k} = 1.$$

Let

$$f_n = |f_n| \, e^{i\omega_n} \quad for \ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

where $|\omega_{n+1} - \omega_n| \leqslant \pi$, *and denote*

$$V^* = \min \{V^-, V^+\}, \ V^\pm = \overline{\lim_{\tau\to 1\pm 0}} \ \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{V(\tau, n_k)}{|1-\tau| \, n_k},$$

$$V(\tau, q) = \sum_{n\in[\tau q, q]} |\omega_{n+1} - \omega_n|, \ \tau > 0.$$

Then the series (1) *has a singular point of the form $e^{i\omega}$, where $|\omega| \leqslant V^*$.*

From those theorems the authors conclude some corollaries, which generalize, and strenghten Fabry's gap and ratio theorems for power series.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Fabry*, Sur les series de Taylor qui une infinite points singuliers, Acta math 22, 1898, 65—87.
2. *Л. Бибербах*. Аналитическое продолжение, М., «Наука», 1967.
3. *Г. Полиа* и *Г. Сеге*. Задачи и теоремы из анализа, часть 2, М., ГИТТЛ, 1956.
4. *G. Polya*. Untersuchungen uber Lucken und Singularitaten von Potenzreihen. Math. Zeit,. 29, 1929, 549—640.
5. *Н. У. Аракелян*. Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов, Матем. сб., 124 (166), № 5, 1984, 24—44.
6. *E. Lindelof*. Le calcul des re'sidus et ses applications a'la theore des fonctio ns Paris, Gauthier-Villars, 1905.
7. *С. Стоилов*. Теория функций комплексного переменного, том 2, М., Иностр. лит., 1962.
8. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.
9. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, М.—Л., Гостехиздат, 1941.
10. *У. Рудин*. Основы математического анализа, М., «Мир», 1976.