УДК 517.987.5+517.986.33

В. А. АРЗУМАНЯН

ОПЕРАТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ
 С НЕСИНГУЛЯРНЫМИ ЭНДОМОРФИЗМАМИ
 ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

0°. **Введение.** Настоящая работа посвящена конструкции $*$ -алгебр, отвечающих преобразованиям с квазинвариантной мерой, изучению их структуры и основных свойств.

Алгебраический подход к теории метрических динамических систем наметился и получил первоначальное развитие в известном цикле работ Ф. Мюррея и Дж. фон Неймана, [1]—[3]. Он приводит к изучению слабокзамкнутых инволютивных алгебр операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве, называемых в настоящее время алгебрами фон Неймана: каждой динамической системе (X, μ, G) , где G — счетная группа, действующая свободно и эргодически, сопоставляется фактор (алгебра фон Неймана с тривиальным центром) $\mathcal{W}(X, \mu, G)$, порожденный операторами скрещенного сдвига и мультипликаторами. Классификация факторов на типы I, II, II_{∞} , III и первые примеры, реализующие каждый из этих типов, были также даны Дж. фон Нейманом и Ф. Мюрреем, [1], [2]. Заметим (см., напр., [4]), что тип фактора $\mathcal{W}(X, \mu, G)$ определяется свойствами исходной динамической системы: если μ дискретна, то это фактор типа I; если μ непрерывна и эквивалентна G -инвариантной конечной мере, то тип его II_i; если μ непрерывна и эквивалентна σ -конечной бесконечной G -инвариантной мере, то получается тип II_∞; если же для непрерывной меры μ не существует эквивалентной ей инвариантной меры, то $\mathcal{W}(X, \mu, G)$ — фактор типа III.

Алгебру $\mathcal{W}(X, \mu, G)$ можно описать также как слабое замыкание *регулярного* представления некоторой равномерно замкнутой подалгебры операторов $C(X, \mu, G)$ в $L^2(X, \mu)$, порожденной операторами сдвига и мультипликаторами. С алгебраической точки зрения эта C^* -алгебра допускает аксиоматическое описание, представляя собой скрещенное произведение коммутативной C^* -алгебры и группы ее автоморфизмов. Такой подход возник не сразу и в настоящее время является частью общей теории скрещенных произведений (см. [5], [6]). В связи с проблемой метрического изоморфизма алгебру $C(X, \mu, Z)$ детально изучал В. Арвeson, [7].

Структура факторов, построенных по динамической системе, тесно связана с траекторной теорией, начало которой положил Г. Дай, [9], [10]. Каждой группе автоморфизмов пространства Лебега сопоставляется разбиение на траектории действия этой группы, а две группы называются *траекторно изоморфными* (слабо эквивалентными, в терминологии Г. Дая), если их траекторные разбиения изоморфны. При этом эргодичность, суще-

ствование (или не существование) конечной (или бесконечной) инвариантной меры, а тем самым свойство соответствующей алгебры быть фактором и иметь определенный тип, являются инвариантами траекторного изоморфизма. Г. Дай доказал одну из первых теорем, дающих критерий траекторного изоморфизма динамических систем, установив слабую эквивалентность двух любых эргодических автоморфизмов с инвариантной мерой, [9]. Сейчас известно, что две любые счетные аппроксимативно конечные свободно действующие группы автоморфизмов траекторно изоморфны, [8]¹. В большом цикле работ ([11]—[14]) В. Кригер изучал, в русле траекторной теории, алгебры, построенные по динамической системе с квазиинвариантной мерой, оперируя, однако, не траекторными разбиениями, а порождающими их автоморфизмами. Один из его основных результатов в траекторной теории утверждает, что траекторный изоморфизм двух эргодических автоморфизмов (с квазиинвариантной мерой) эквивалентен изоморфизму соответствующих факторов, [14]. В работах А. М. Вершика ([8], [15], [16]) изучены неизмеримые разбиения (таковы, вообще говоря траекторные разбиения) с помощью выделения из них класса *ручных* разбиений, а также введено для факторов понятие *картановской* подалгебры, наличие которой характеризует факторы, ассоциированные с динамическими системами. Заметим, что свободно действующая группа автоморфизмов с инвариантной мерой аппроксимативно конечна ([9], [11]) тогда и только тогда, когда ее траекторное разбиение *ручное*. В свою очередь, это эквивалентно тому, что разбиение является траекторным для одного автоморфизма (с квазиинвариантной мерой). Дж. Фелдман и К. К. Мур, [17], дали инвариантную конструкцию алгебр, ассоциированных с динамическими системами, сопоставив их непосредственно разбиениям.

Важнейшим классом факторов являются *гиперфинитные* (порожденные возрастающей последовательностью полных матричных алгебр), открытые Ф. Мюрреем и Дж. фон Нейманом, [3], сформулировавшими теорему (впоследствии доказанную Г. Даем, [10]): для счетной коммутативной свободно действующей эргодической группы автоморфизмов, сохраняющих меру, соответствующий фактор — гиперфинитный. Они доказали, что все гиперфинитные факторы типа II, изоморфны, положив тем самым начало классификации гиперфинитных (или, как их принято называть в случае бесконечных факторов, *инъективных*, [18]) факторов. Р. Пауэрс, используя C^* -технику РГФ-алгебр, [19], построил континуум попарно неизоморфных факторов типа III. Новые алгебраические инварианты были предложены Х. Араки и Э. Вудсом, [20], В. Кригером, [12]. В известной работе [21], А. Конн, используя теорию Томиита—Такесаки, [22], классифицировал III-факторы на типы III_λ , $\lambda \in [0, 1]$, доказав затем, [18], что при $\lambda \in]0, 1[$ все инъективные факторы типа III_λ изоморфны. Аналогичный результат для фактора типа III, недавно установил У. Хаагеруп, [23]. Классификация факторов типа III₀ сводится, как показал В. Кригер, [14], к проблеме классификации эргодических потесств.

¹ См. также [37], [38].

Наша цель — изучение алгебр, построенных по динамическим системам, отвечающих *полугруппам* преобразований пространства с мерой. В настоящей работе на этот случай обобщаются многие из упомянутых выше результатов. Как уже было отмечено, при рассмотрении групповых динамических систем оказывается полезной связь теории факторов с траекторной теорией. В «полугрупповом» случае использование траекторной теории становится необходимым орудием.

Пусть T — несингулярный эндоморфизм пространства Лебега (X, μ) . В п. 1 строится алгебра $C(X, \mu, T)$, порожденная мультипликаторами и сдвигами. Доказывается существование условного ожидания на подалгебру мультипликаторов, что позволяет определить регулярное представление и алгебру фон Неймана $\mathcal{W}(X, \mu, T)$. Основные результаты работы собраны в п. 2 и среди них утверждение, что $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ — инъективный фактор, если T эргодичен. В последнем разделе обсуждаются вопросы, связанные с типом полученных факторов, являющегося, очевидно, траекторным инвариантом исходного преобразования.

Статья является подробным и дополненным изложением в более общем случае результатов, анонсированных в заметках [24]—[26] (см. также работу [27]) для случая эндоморфизмов с инвариантной мерой.

Все не определяемые в тексте понятия, относящиеся к эргодической теории см. в статьях В. А. Рохлина [28], [29], книге П. Халмоша [30], к теории операторных алгебр — в монографиях Ж. Диксмье [31], [32], и С. Сакаи [33].

Выражаю искреннюю признательность А. М. Вершику, поставившего исходную задачу и уделявшего постоянное внимание к работе над ней.

1°. Конструкция регулярного представления. Пусть (X, μ) — пространство Лебега ([28]) с непрерывной нормированной мерой, T — несингулярное преобразование X (называемое также эндоморфизмом с квазиинвариантной мерой, или просто, эндоморфизмом), т. е. отображение X на себя, сохраняющее тип меры.

Обозначим через $\hat{\mu}_n$, $n = 1, 2, \dots$ меру $\hat{\mu}_n(E) = \mu(T^{-n}E)$, эквивалентную, таким образом, мере μ и пусть $s_n = \frac{d\hat{\mu}_n}{d\mu}$ — соответствующая плотность Радона—Никоदिма. Отметим, что для сохраняющего меру эндоморфизма $s_n \equiv 1 \pmod{\mu}$.

Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(X, \mu)$ — алгебра ограниченных мультипликаторов в H , изоморфная $L^\infty(X, \mu)$. Элементы $\mathfrak{X}$ суть операторы вида $(M_\varphi f)(x) = \varphi(x)f(x)$ с $\varphi \in L^\infty$. Операторы „сдвига“, отвечающие T^n , определяются формулой $(U_n f)(x) = s_n(T^n x)^{-\frac{1}{2}} f(T^n x)$, $n = 1, 2, \dots$. Предметом наших рассмотрений служит алгебра $A = C(X, \mu, T)$ — минимальная C^* -подалгебра $\tilde{B}(H)$, порожденная $\mathfrak{X}$ вместе с операторами U_n , $n = 1, 2, \dots$ и ее регулярное представление. Всюду в дальнейшем C^* -подалгебра, порожденная семейством операторов L в гильбертовом пространстве обозначается $[L]$, алгебра фон Неймана — $\{L\}$. Таким образом, $A = [\mathfrak{X}, U_n, n = 1, 2, \dots]$.

Пусть ξ_n — разбиение на прообразы T^n , т. е. $\xi_n = T^{-n} \varepsilon$ ($\varepsilon = \varepsilon(X)$ — разбиение на точки mod μ). Очевидно, что $\{\xi_n\}$ — убывающая последовательность разбиений, $\varepsilon \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots$. Соответствующий проектор $P_{\xi_n} = P_n$ на подпространство функций в $H = L^2(X, \mu)$, постоянных на элементах разбиения ξ_n задается формулой

$$(P_n f)(x) = \int_{\xi_n(x)} f(y) d\mu_{\xi_n(x)}(y), \quad (1.1)$$

где $\xi_n(x)$ — элемент ξ_n , которому принадлежит точка x , $\{\mu_{\xi_n}\}$ — каноническая система условных мер ([28]). Положим $(Q_n f)(x) = (P_n f)(T^{-n} x)$.

Следующие две технические леммы получаются простым счетом с переходом к фактор-пространству X/ξ_n с фактор-мерой μ_{ξ_n} и использованием транзитивности канонической системы условных мер.

Лемма 1.1. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, верны соотношения

$$(i) \int f(x) g(T^m x) d\mu(x) = \int (Q_n f)(x) g(x) d\mu_n(x), \quad \forall f, g \in H;$$

$$(ii) Q_n = Q_m Q_{n-m};$$

$$(iii) s_n(T^m x) = s_m(T^m x) s_{n-m}(T^n x), \quad \forall x \text{ mod } \mu.$$

Лемма 1.2. Пусть $U = U_n$, $V = U^*$, I — единичный оператор в H , W — оператор на $L^2(X, \mu)$, определяемый формулой $(W\varphi)(x) = \varphi(Tx)$, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

(i) U_n — изометрический (полуунитарный) оператор, унитарный, если T обратим.

$$(ii) \text{ Для любого } f \in H, (U_n f)(x) = s_n(x)^{1/2} (Q_n f)(x).$$

$$(iii) U_n = U^n, U_n^* = V^n.$$

$$(iv) V^n U^n = I, U^n V^n = P_n.$$

$$(v) U^n M_\varphi = M_{W^n \varphi} U^n, V^n M_\varphi U^n = M_{Q_n \varphi}.$$

Таким образом, алгебра A есть равномерное замыкание множества линейных комбинаций операторов вида $M_\varphi U^n V^m M_\psi$, $\varphi, \psi \in L^\infty$.

Лемма 1.3. Алгебра A неприводима в $B(H)$ тогда и только тогда, когда T — эргодическое преобразование.

Доказательство. Пусть $B \in A'$ (коммутант A), тогда, в силу максимальной $\mathfrak{M}$ в $B(H)$, существует $\psi \in L^\infty(X, \mu)$, для которого $B = M_\psi$. Из соотношения $BV = VB$, примененного к функции, тождественно равной, 1, учитывая (v) леммы 1.2, получаем $W\psi = \psi$. Таким образом, A' состоит из мультипликаторов, отвечающих функциям, инвариантным относительно T . Такие операторы кратны I тогда и только тогда, когда T эргодично.

Введем алгебры $A_n = C_n(X, \mu, T) = [\mathfrak{M}, P_k, k = 1, 2, \dots, n]$, $n = 1, 2, \dots$ и $A_\infty = C_\infty(X, \mu, T) = [\mathfrak{M}, P_k, k \in \mathbb{N}]$. Ясно, что A_∞ — минимальная C^* -подалгебра $B(H)$, порожденная $\mathfrak{M}$ и всеми $P_k, k \in \mathbb{N}$, при этом

$$\mathfrak{X} \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A, \quad A_n = \left[\bigcup_n A_n \right]. \quad (1.2)$$

Рассмотрим множества $J_n = \{a \in A_n, aP_n = 0\}$, $n > 0$, $J_n = \{a \in A_n, P_{-n}a = 0\}$, $n < 0$, $I_n = \{a \in A_n, aP_n = a\}$, $n > 0$, $I_n = \{a \in A_n, aP_{-n} = a\}$, $n < 0$. Очевидно, что J_n , I_n суть левые (правые) идеалы при $n > 0$ (соотв. $n < 0$), при этом $J_n^* = J_{-n}$, $I_n^* = I_{-n}$ и банахово пространство I_n изоморфно A_n/J_n , $n = 0, \pm 1, \dots$.

Наша ближайшая цель — построение условного ожидания с алгебры A на коммутативную подалгебру $\mathfrak{X}$.

Лемма 1.3'. Пусть (X, μ) — пространство Лебега, P — проектор в $H = L^2(X, \mu)$ на подпространство скаляров. Тогда $[\mathfrak{X}, P] = [\mathfrak{X}, K(H)]$, где $K(H)$ подалгебра компактных операторов. Пусть μ — дискретная мера, тогда канонически определено условное ожидание на подалгебру $\mathfrak{X}$, совпадающее с проектированием на диагональ в естественном представлении операторов из $B(H)$ в виде бесконечных матриц.

Доказательство. Достаточно проверить, что $K(H) \subset [\mathfrak{X}, P]$. Пусть $\varphi, \psi \in L^\infty$, тогда проектор $P_{\varphi, \psi} = (\cdot, \varphi)\psi \in [\mathfrak{X}, P]$, так как $P_{\varphi, \psi} = M_\psi P M_\varphi$. Предельным переходом легко убедиться, что то же самое верно для любых $\varphi, \psi \in H$. Таким образом, в $[\mathfrak{X}, P]$ содержатся все одномерные проекторы, а следовательно и все компактные операторы.

Если μ — дискретная мера, то можно считать, что X — счетное множество атомов, $H = l_\mu^2(X)$. Любой оператор $B \in B(H)$ представляется в виде бесконечной матрицы $B_{xy} = \mu(x)^{\frac{1}{2}} \mu(y)^{-\frac{1}{2}} (Bf_x)(y)$, где f_x — координатные функции, $f_x(y) = \delta_{xy} \mu(x)^{-\frac{1}{2}}$, $x, y \in X$. Очевидно, что проектирование на диагональ P_0 , $(P_0 B)_{xy} = \delta_{xy} B_{xx}$ обладает всеми свойствами точного условного ожидания.

Лемма 1.4. Пусть ξ — измеримое разбиение пространства Лебега (X, μ) , $\mathfrak{X}_\xi$ — подалгебра $\mathfrak{X}$, отвечающая функциям, постоянным на элементах разбиения ξ , P_ξ — соответствующий проектор. Тогда $\mathfrak{X}_\xi = [\mathfrak{X}, P_\xi]$.

Доказательство. Ясно, что любой мультипликатор из $\mathfrak{X}_\xi$ перестановочен с P_ξ , т. е. $\mathfrak{X}_\xi \subset [\mathfrak{X}, P_\xi]'$. Обратно, пусть $B \in [\mathfrak{X}, P_\xi]'$ тогда $B = M_\psi$, $\psi \in L^\infty$. Применив условие $BP_\xi = P_\xi B$ к функции, тождественно равной 1, получаем $P_\xi \psi = \psi$.

Предложение 1.5. Пусть (X, μ) — пространство Лебега, $\{\xi_k\}_1^n$ — убывающая последовательность измеримых разбиений, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(X, \mu)$, $P_k = P_{\xi_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда имеет место следующее разложение в прямой интеграл:

$$[\mathfrak{X}, P_1, P_2, \dots, P_n] = \int_{X/\xi_n}^{\oplus} [\mathfrak{X}_\tau, P_1(\tau), \dots, P_n(\tau)] d\mu_{\xi_n}(\tau), \quad (1.3)$$

где $\mathfrak{X}_\tau = \mathfrak{X}(\tau, \mu_\tau)$ для канонической системы условных мер $\{\mu_\tau\}$ по разбиению ξ_n , $P_n(\tau)$ — проектор на подпространство функций

из $L^2(\tau, \mu)$, постоянных на элементах разбиения, индуцированно-го в τ разбиением ξ_k .

Доказательство. Для простоты предположим $n = 1$ (доказательство общего случая отличается незначительными деталями). Итак ξ — измеримое разбиение X , докажем, что

$$[\mathfrak{M}, P_\xi] = \int_{X/\xi}^{\oplus} [\mathfrak{M}_\tau, P_\tau] d\mu_\xi(\tau), \tag{1.4}$$

где P_τ — проектор в $L^2(\tau, \mu)$ на подпространство скаляров. Коммутативная алгебра фон Неймана $\mathfrak{M}_\tau$ определяет разложение H в прямой интеграл $H = \int_{X/\xi}^{\oplus} H_\tau d\mu_\xi(\tau)$, причем $\mathfrak{M}_\tau \cong L^\infty(X/\xi, \mu_\xi)$. Лемма 1.4

утверждает, в частности, что $[\mathfrak{M}, P_\xi] \subset \mathfrak{M}_\xi$, откуда следует, что каждый элемент $[\mathfrak{M}, P_\xi]$ разложим. Легко проверить, что $P_\xi = \int_{X/\xi}^{\oplus} P_\tau d\mu_\xi(\tau)$

и для любого $\varphi \in L^\infty(X, \mu)$, $M_\tau = \int_{X/\xi}^{\oplus} M_{\tau\tau} d\mu_\xi(\tau)$, где φ_τ — сужение φ на τ .

Следовательно, *-алгебра, порожденная $\mathfrak{M}$ и P_ξ , содержится в правой части равенства (1.4), откуда предельным переходом получаем

$$[\mathfrak{M}, P_\xi] \subset \int_{X/\xi}^{\oplus} [\mathfrak{M}_\tau, P_\tau] d\mu_\xi(\tau). \tag{1.5}$$

Покажем, что имеет место и обратное включение. Достаточно предположить, что для почти всех τ пространства (X_τ, μ_τ) изоморфны (в противном случае необходимо разбить X на множества, в которые попадают те и только те точки, для которых соответствующим элементам τ разбиения ξ отвечают изоморфные (X_τ, μ_τ)). Тогда существует гильбертово пространство $H_0 = L^2(X_0, \mu_0)$ такое, что для каждого $\tau \in \xi$ имеется изоморфизм $W_\tau : H_\tau \rightarrow H_0$, при этом, если $B \in [\mathfrak{M}_\tau, P_\tau]$, то $B = W_\tau^{-1} B_0 W_\tau$ для некоторого $B_0 \in [\mathfrak{M}_0, P_0]$. По лемме 1.3', $K(H_0) \subset [\mathfrak{M}_0, P_0]$, следовательно $[\mathfrak{M}_0, P_0] = B(H_0)$. В таком случае $H \cong L^2(X/\xi, \mu_\xi) \otimes H_0$, причем, для любого разложимого B , $B \cong I \otimes B_0$. Повтому

$$\int_{X/\xi}^{\oplus} [\mathfrak{M}_\tau, P_\tau] d\mu_\xi(\tau) \cong \int_{X/\xi}^{\oplus} [\mathfrak{M}_0(\tau), P_0(\tau)] d\mu_\xi(\tau),$$

где при почти всех $\tau \in \xi$, $\mathfrak{M}_0(\tau) = \mathfrak{M}_0$, $P_0(\tau) = P_0$. Из (1.5) следует

$$P_{\xi} \cong \int_{X/\xi}^{\oplus} P_0(\tau) d\mu_{\xi}(\tau), \quad M_{\xi} \cong \int_{X/\xi}^{\oplus} M_{\tau}(\tau) d\mu_{\xi}(\tau)$$

с $\varphi_0 \in L^{\infty}(X_0, \mu_0)$ при почти всех τ , откуда и следует (1.4).

Замечание. Если ξ — разбиение с конечными элементами, то

$$[\mathfrak{M}, P_{\xi}] \cong \int_{X/\xi}^{\oplus} M_{n \times n}(\mathbb{C}) d\mu_{\xi}(\tau), \quad \text{где } M_n(\mathbb{C}) \text{ — алгебра } n \times n \text{ матриц над полем } \mathbb{C}.$$

Это следует из очевидного факта: подалгебра, натянутая на все диагональные матрицы и матрицу, отвечающую проектору на подпространство скаляров, совпадает с полной матричной алгеброй.

Теорема 1.6. Пусть (X, μ) — пространство Лебега, T — эндоморфизм на X , причем почти каждая точка имеет не более счетного числа образов. Тогда на алгебре A_{∞} канонически определено условное ожидание на подалгебру $\mathfrak{M}$ (индуктивный предел условных ожиданий на алгебрах A_n , которые в свою очередь, являются прямым интегралом проекторов на диагональ в соответствующих матричных алгебрах слоя).

Доказательство. Ясно, что для алгебр A_n выполнены условия предложения 1.5. В силу леммы 1.3' для любого $\tau \in \xi_n \bmod \mu_{\xi_n}$ существует условное ожидание p_{τ} (определенное по существу на $B(L^2(\tau, \mu_{\tau}))$)

$$\text{Пусть } a \in A_n, \quad a = \int_{X/\xi}^{\oplus} a_{\tau} d\mu_{\xi}(\tau), \quad \text{положим } p_n(a) = \int_{X/\xi}^{\oplus} p_{\tau}(a_{\tau}) d\mu_{\xi}(\tau). \quad \text{Этот оператор корректно определен, причем } \operatorname{ess\,sup} \|p_{\tau}(a_{\tau})\| \leq \|a\|,$$

откуда, заодно $\|p_n(a)\| \leq \|a\|$. Ясно, что p_n — точное условное ожидание. Из транзитивности канонической системы условных мер следует, что операторы p_n согласованы между собой (в том смысле, что $p_{n+1}|_{A_n} = p_n$). Зададим оператор условного ожидания p_{∞} на $\bigcup_n A_n$ следующим образом: если $a \in \bigcup_n A_n$, $a \in A_{n_0}$, при некотором n_0 , положим $p_{\infty}(a) = p_{n_0}(a)$. Ввиду того, что при всех n , $\|p_n(a)\| \leq \|a\|$, можно считать, что p_{∞} определен на всей алгебре A_{∞} .

Определение 1.7. Состоянием типа меры на алгебре A_{∞} называется состояние, определяемое формулой $\omega_{\infty}(a) = \int \widehat{a}(x) d\mu(x)$,

где $a \in A_{\infty}$, $\widehat{a}$ — функция из $L^{\infty}(X, \mu)$, отвечающая мультипликатору $p_{\infty}(a)$. Представление $\pi_{\infty} = \pi_{\omega_{\infty}}$, построенное в силу конструкции ГНС по состоянию ω_{∞} , называется *регулярным*.

Положим $\mathcal{W}_{\infty}(X, \mu, T) = \{\pi_{\infty}(A_{\infty})\}$. Эта алгебра изучена в п. п 2, 3.

Замечание. Точно так же можно определить состояние типа меры ω_{ξ} и ω_n на алгебрах $[\mathfrak{M}, P_{\xi}]$ и A_n (см. доказательства предл. 1.5 и теор. 1.6), а также отвечающие им регулярное представление и алгебры фон Неймана $\mathcal{W}(X, \mu, \xi)$ и $\mathcal{W}_n(X, \mu, T)$.

Теперь наша цель — определить условное ожидание с алгебры A на подалгебру $\mathfrak{X}$, а следовательно и регулярное представление.

Лемма 1.8. Пусть $\hat{A}$ — множество конечных линейных комбинаций вида

$$V_n a_{-n} + \dots + V a_{-1} + a_0 + a_1 U + \dots + a_m U^m, \quad (1.6)$$

где $a_k \in A_n$, $k = -n, -n+1, \dots, 0, \dots, m$. Тогда

- (i) алгебра A есть равномерное замыкание $*$ -алгебры $\hat{A}$.
- (ii) при $n = 1, 2, \dots$, $a U^n = b U^n$ (соотв. $V^{-n} a = V^{-n} b$) тогда и только тогда, когда $a - b \in J_n$ (соотв. $a - b \in J_{-n}$), $a, b \in A_n$.
- (iii) Равенство $a U^n = b U^n$ (соотв. $V^{-n} a = V^{-n} b$) при $a, b \in I_n$ (соотв. I_{-n}) эквивалентно $a = b$, $n = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Учитывая соотношения коммутации (v) леммы 1.2 и замечание после леммы, проверка (i) тривиальна. Следующие два утверждения вытекают из свойств J_n, I_n и того, что $I_n \cap J_n = \{0\}$.

Определение 1.9. Полу группа G несингулярных преобразований пространства Лебега (X, μ) действует свободно, если для любого $g \in G$, отличного от тождественного эндоморфизма и любого измеримого $E \subset X, \mu(E) > 0$, существует $F \subset E, \mu(F) > 0$, для которого $\mu(F \cap g^{-1}(F)) = 0$. Будем говорить, что преобразование T действует свободно, если свободно действует полу группа $\{T^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Заметим, что эргодический эндоморфизм действует свободно.

Следующее утверждение играет решающую роль в дальнейших рассуждениях.

Теорема 1.10. Пусть несингулярное преобразование T пространства Лебега (X, μ) действует свободно, причем почти каждая точка X имеет не более счетного числа прообразов. Тогда, если $a \in \hat{A}$, $a = V^n a_{-n} + \dots + a_0 + \dots + a_m U^m$, где $a_k \in I_k, k = -n, -n+1, \dots, m$, то

$$\sup_k \|p_-(a_k)\| \leq \|a\|, \quad (1.7)$$

где p_- — оператор, определенный теоремой 1.6. Формула $p_-(a) = p_-(a_0)$ определяет отображение алгебры $\hat{A}$ на подалгебру $\mathfrak{X}$, допускающее продолжение до условного ожидания на алгебре A .

Доказательство. (i) Достаточно показать, что $\|p_-(a_0)\| \leq \|a\|$. В самом деле, пусть $k < 0$, тогда из этого неравенства получаем

$$\|a\| > \|U^{-k} a\| > \|p_-(U^{-k} a)_0\| = p_-(P_{-k} a_k) = p_-(a_k).$$

При $k > 0$ имеем $\|a\| = \|a^*\| \geq \|p_-(a_k^*)\| = \|p_-(a_k)\|$.

(ii) Можно предположить, что все $a_k \in A_l$ при достаточно большом l . В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$, тогда, для любого $k = -n, \dots, m$ существуют p_k и $\hat{a}_k \in A_{n_k}$, для которого $\|\hat{a}_k - a_k\| < \frac{\varepsilon}{2(n+m)}$. Если

$$\hat{a} = V^n \hat{a}_{-n} + \dots + \hat{a}_0 + \dots + \hat{a}_m U^m, \text{ то } \|a\| \geq \|\hat{a}\| - \frac{\varepsilon}{2} \geq \|p_-(\hat{a}_k)\| - \frac{\varepsilon}{2} \geq$$

$\geq |p_-(a_0)| - \varepsilon$. Осталось заметить, что нужно взять $l = \max\{n_k, k = -n, \dots, m\}$.

Итак, пусть $a \in \hat{A}$ имеет вид (1.6), причем $a_k \in A_l \cap I_l$ при всех k . Наша цель — установить неравенство $\|a\| \geq |p_-(a_0)| = p_l(a_0)$.

(iii) Покажем, вначале, что существует семейство взаимно ортогональных проекторов $M_E = M_{\chi_E}$, где χ_E — характеристическая функция множества $E \subset X$, $\mu(E) > 0$, $E \cap E' = \emptyset$ при $E \neq E'$, $\cup E = X$, для которого

$$M_E a M_E = M_F a_0 M_E. \quad (1.8)$$

Действительно, из свободного действия преобразования T следует, что для любого $F \subset X$, $\mu(F) > 0$ существует $E \subset F$, $\mu(E) > 0$, такое, что $\mu(E \cap T^{-k}E) = 0$ и, кроме того, E и $T^{-k}E$ не пересекают одновременно одна и тот же элемент разбиения ξ_r , где $r = \max\{m, n, l\}$, $k = 1, 2, \dots, r$. Выделим из X подмножество E , обладающее указанным свойством. Элементы a_k (при $k > 0$) являются равномерными пределами конечных сумм операторов вида $M_\varphi P_{k+l} M_\psi$, $i = 0, 1, \dots, l - k$, поэтому

$$\begin{aligned} (M_E M_\varphi P_{k+l} M_\psi M_{T^{-k}E} f)(x) &= \\ &= \chi_E(x) \varphi(x) \int_{\xi_{k+l}(x)} \chi_{T^{-k}E}(y) \psi(y) f(y) d\mu_{\xi_{k+l}(x)}(y) = \\ &= \chi_E(x) \varphi(x) \int_{\xi_{k+l}(x) \cap T^{-k}E} \psi(y) f(y) d\mu_{\xi_{k+l}(x)}(y) = 0, \end{aligned}$$

т. к. либо $x \notin E$, либо $\mu_{\xi_{k+l}(x)}(\xi_{k+l}(x) \cap T^{-k}E) = 0$. Отсюда, учитывая соотношения (v) леммы 1.2, следует, что $M_F a_k U^k M_E = 0$. Точно так же $M_E V^{-k} a_k M_E = 0$ и, следовательно, получаем (1.8). Теперь, если на чать с множества $X \setminus E$ придем к множеству E' , $E \cap E' = \emptyset$, обладающему тем же свойством. Воспользовавшись леммой Цорна, можно доказать существование указанного в (iii) семейства, обладающего в силу максимальности свойством $\cup E = X$.

(iv) Заметим, что для семейства, рассмотренного в (iii) можно предполагать, что все E пересекают почти каждый элемент разбиения только в одной точке. Чтобы понять это, достаточно рассмотреть дополнительное к ξ_r разбиение ξ_1 и взять в качестве E пересечение его с каким-нибудь элементом $\xi_r^\perp$, для которого мера такого пересечения отлична от нуля (такой обязательно существует, т. к. $\xi_r^\perp$ состоит из счетного числа элементов). Пусть E взято из этого семейства, тогда, в силу предложения 1.5 и леммы 1.3',

$$M_E(a_0 - p_r(a_0)) M_E = \int_{X \setminus E} M_E(\tau)(a_0 - p_r(a_0)) M_E(\tau) d\mu_r(\tau) = 0,$$

т. к. $M_E(\tau)$ — диагональная матрица с одной, отличной от нуля компонентой, а $(a_0 - p_r(a_0))$ имеет нулевую диагональ. Таким образом

$$M_E a M_E = M_E a_0 M_E = M_E p_-(a_0) M_E + M_E (a_0 - p_-(a_0)) M_E = M_E p_-(a_0) M_E.$$

(v) В силу того, что $p_-(a_0)$ — мультипликатор, имеем окончательно

$$|a| \geq \sup_E |M_E a M_E| = \sup_E |M_E p_-(a_0) M_E| = |p_-(a_0)|.$$

(vi) Корректность определения p и возможность продолжения есть непосредственное следствие установленного неравенства.

Определение 1.11. Состоянием типа меры на алгебре A называется состояние ω , определяемое формулой $\omega(a) = \int \hat{a}(x) d\mu(x)$, где

$a \in A$, $\hat{a}$ — функция из $L^{\infty}(X, \eta)$, соответствующая мультипликатору $p(a)$. Представление $\pi = \pi_{\omega}$, отвечающее состоянию ω в силу ГНС-конструкции, называется регулярным (или фон Неймана).

Положим $\mathcal{W}(X, \mu, T) = \{\pi(A)\}$. Эта алгебра подробно изучена в последующих разделах.

2°. Структура и свойства регулярного представления. Результаты этого раздела формулируются в терминах теории Фелдмана-Мура, [17], элементы которой изложены в начале.

Пусть (X, μ) — пространство Лебега, R — отношение эквивалентности на X , рассматриваемое как подмножество $X \times X$. Пусть R измеримо и в каждом слое содержит не более счетного числа точек. На R можно ввести две эквивалентные σ -конечные меры μ_l и μ_r , определяемые следующим образом: фактор-мера μ_l по разбиению $\{(x_0, y) \in R, x_0 \in X\}$ (соотв. фактор-мера μ_r по разбиению $\{(x, y_0) \in R, y_0 \in X\}$) совпадает с μ а мера в слоях — считающая. Пусть $D = \frac{d\mu_l}{d\mu_r}$ — соответствующая плотность

Радона-Никодима. Функция a на R называется левой конечной, если она ограничена и существует n такое, что при всех $x, y, \{z; a(x, z) \neq 0\} + \{z; a(z, y) \neq 0\} < n$. Функция b на R называется правой ко-

нечной, если функция $D(x, y) \cdot b(x, y)$ — левая конечная. Пусть $\psi \in L^2(R, \mu_r)$, a — левая, b — правая конечные функции, тогда формулы $(L_a \psi)(x, y) = \sum_{z: (x, z) \in R} a(x, z) \psi(z, y)$, $(R_b \psi)(x, y) = \sum_{z: (x, z) \in R} \psi(x, z) b(z, y)$

определяют ограниченные операторы на $L^2(R, \mu_r)$. Для произвольных двух левых конечных функций a, b положим $(a \cdot b)(x, y) = \sum_{z: (x, z) \in R} a(x, z) b(z, y)$, $a^*(x, y) = a(y, x)$. Тогда $L_a L_b = L_{a \cdot b}$, $L_a^* = L^* a$

и, следовательно, множество $\{L_a, a \text{ — левая конечная}\}$ образует *-алгебру с единицей. Ее слабое замыкание обозначим $\mathcal{W}_l(X, \mu, R)$ и будем называть левой алгеброй фон Неймана, отвечающей, в силу конструкции Фелдмана-Мура, отношению R . Аналогично определяются правая алгебра $\mathcal{W}(X, \mu, R)$. Эти алгебры являются коммутантами одна другой, а вектор γ_x (характеристическая функция диагонали $\delta = \{(x, x), x \in X\} \subset R$) — циклический и отделяющий. Модулярный оператор Δ (в смысле теории Томита-Такесаки, [22]) задается формулой $(\Delta \psi)(x, y) = D(x, y) \psi(x, y)$, модулярная группа автоморфизмов — соотношением

$$\psi_i(a)(x, y) = D(x, y)^{ii} a(x, y). \quad (2.1)$$

Диагональная подалгебра (отвечающая функциям с носителем на диагонали) $\mathfrak{M}$ является максимальной коммутативной в каждой из рассматриваемых алгебр, а любой элемент ее нормализатора $N(\mathfrak{M})$, например, в алгебре $\mathcal{W}(X, \mu, R)$ определяется функцией

$$\alpha_{f, \Phi}(x, y) = \delta_y^{(x)} f(x) D(x, \Phi(z))^{1/2}, \quad (2.2)$$

где $|f(x)| = 1$, а Φ — автоморфизм X с квазиинвариантной мерой, причем $(\Phi(x), x) \in R$ почти везде.

Вернемся к рассмотрению и обозначениям п. 1. Если ξ — разбиение X , то $R(\xi)$ будет обозначать соответствующее отношение эквивалентности.

Определение 2.1, ([29]). *Остаточным (или хвостовым) разбиением эндоморфизма T называется разбиение $t(T)$, каждый элемент которого вместе с точкой x содержит любую точку y , удовлетворяющую соотношению $T^n x = T^n y$ при некотором $n > 0$, т. е. $t(T) = \bigcap_n \xi_n$.*

Траекторным разбиением эндоморфизма T называется разбиение $\tau(T)$, каждый элемент которого вместе с точкой x содержит любую точку y , удовлетворяющую соотношению $T^n x = T^m y$ при некоторых $n, m > 0$.

Разбиения $t(T)$ и $\tau(T)$ вообще говоря не являются измеримыми, однако отношения, определяемые ими, измеримы. Введем обозначения: $R(\varepsilon) = \delta$, $R(\xi_n) = R_n$, $n = 1, 2, \dots$, $R_\infty = R(t(T))$, $R = R(\tau(T))$, тогда (см. п. 1) $\delta \subset R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_\infty \subset R$, причем $R_\infty = \bigcup R_n$. Заметим, что даже для сохраняющих меру преобразований, R может не быть инвариантным отношением (т. е. $D(x, y) \neq 1$). Будем писать в дальнейшем $x \sim y$, если $(x, y) \in R$, $x \approx y$ при $(x, y) \in R_\infty$, и $x \stackrel{n}{\approx} y$, если $(x, y) \in R_n$. Кроме того, введем обозначение $\mu_n(x) = \mu_{n(x)}(x)$ (см. п. 1).

Предложение 2.2. *В условиях теоремы 1.10, если $(x, y) \in R$, $T^n x = T^m y$, то $D(x, y) = s_n(T^n x) s_m(T^m y)^{-1} \mu_n(x) \mu_m(y)^{-1}$ почти везде.*

Доказательство. Корректность. Пусть $T^k x = T^l y$ и пусть для определенности $k > n$, тогда $T^l y = T^k x = T^{k-1} T x = T^{k-n+m} y$, откуда для почти всех y , $k-l = n-m$, т. к. T действует свободно и, следовательно, аperiodично. Из условия транзитивности канонической системы условных мер и соотношений (iii) леммы 1.1 следует

$$s_k(T^k x) s_l(T^l y)^{-1} \mu_k(x) \mu_l(y)^{-1} = s_n(T^n x) s_m(T^m y)^{-1} \mu_n(x) \mu_m(y)^{-1}.$$

Пусть теперь $R_{n,m} = \{(x, y) \in R, T^n x = T^m y\}$, $E_n^m(y) = \{x; T^n x = T^m y\}$. Для всякого $f \in L^1(R, \mu)$, принимая во внимание указанные соотношения и опуская некоторые детали рутинных вычислений, имеем (при $n > m$)

$$\begin{aligned}
 & \int_{R_n^m} f(x, y) s_n(T^n x) s_m(T^m y)^{-1} \mu_n(x) \mu_m(y)^{-1} d\mu_\tau(x, y) = \\
 & = \int s_m(T^m y)^{-1} \mu_m(y)^{-1} \left[\sum_{t \in E_m^m(y)} s_{n-m}(t) s_m(T^m t) \mu_m(t) \times \right. \\
 & \times \sum_{x \in E_{n-m}^n(t)} f(x, y) \mu_{n-m}(x) \left. \right] d\mu(y) = \int_{X/\xi_m} d\mu_\tau(\tau) \left[\mu_m(y)^{-1} \times \right. \\
 & \times \left. \sum_{t \in E_m^m(y)} s_{n-m}(t) \mu_m(t) \sum_{x \in E_{n-m}^n(t)} f(x, y) \mu_{n-m}(x) \right] d\mu_\tau(y) = \\
 & = \int s_{n-m}(t) \sum_{x \in E_{n-m}^n(t)} g(x) \mu_{n-m}(x) d\mu(t) = \int (Q_{n-m}g)(t) s_{n-m}(t) d\mu(t) = \\
 & = \int_{R_n^m} g(t) d\mu(t) = \int_{R_n^m} f(t, y) d\mu_\tau(t, y),
 \end{aligned}$$

где $g(t) = \sum_{y \in E_m^m(t)} f(t, y)$. Осталось заметить, что $R = \bigcup_{n, m} R_{n, m}$

Напомним, что преобразование называется *точным*, если не существуют нетривиальные множества $E \subset X$, удовлетворяющие условию $T^{-n} T^n E = E$ при всех $n > 0$, [29].

Теорема 2.3. Пусть T — несингулярный точный эндоморфизм, с не более чем счетным числом прообразов почти каждой точки. Тогда $W_-(X, \mu, T)$ — фактор.

Доказательство. Покажем вначале, что алгебры $W_-(X, \eta, T)$ и $W_-(X, \mu, R_-)$ пространственно изоморфны.

(i) В самом деле, пусть ξ — измеримое разбиение со счетными элементами, $P_\xi, \mathcal{W}(X, \mu, \xi)$ — соответствующие проектор и алгебра фон Неймана (см. замечание после опр. 1.7). Покажем, что алгебры $\mathcal{W}(X, \eta, \xi)$ и $\mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$ пространственно изоморфны. Рассмотрим на $R(\xi)$ следующие функции $p_\xi(x, y) = \mu_{\xi(x)}(x)$, $m_\varphi(x, y) = \delta_x^y \varphi(x)$ (отвечающие P_ξ и M_φ). Легко проверить, что $R_{p_\xi} B = B R_{p_\xi}$ для любого $B \in \mathcal{W}_\tau(X, \mu, R(\xi))$ и, следовательно, $\{R_{p_\xi}, R_{m_\varphi}; \varphi \in L^-\} \subset \mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$. Чтобы доказать обратное включение, заметим, что центр алгебры $\mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$ есть подалгебра диагональной подалгебры $\{R_{m_\varphi}\}$, отвечающей функциям, постоянным на элементах разбиения ξ . Поэтому $\mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$ допускает разложение в прямой интеграл факторов

$$\int_{X/\xi} \mathcal{W}(\tau, \mu_\tau, \varepsilon(\tau)) d\mu_\tau(\tau), \text{ что сводит задачу к проверке вложения}$$

$\mathcal{W}(\tau, \mu_\tau, \varepsilon(\tau)) \subset \{\mathcal{W}_\tau, R_{p_\tau}\}$ в слоях. Для этого необходимо убедиться, что для любого автоморфизма Φ пространства с мерой τ , оператор из $\mathcal{W}(\tau, \mu_\tau, \varepsilon(\tau))$, отвечающий функции $u_\Phi(x, y) = \delta_{\Phi(x)}^y \mu_\tau(\Phi(x))^{-\frac{1}{2}} \mu_\tau(x)^{-\frac{1}{2}}$

принадлежит $\{\mathfrak{M}_\xi, R_{\rho_\xi}\}$. Итак, $\{R_{\rho_\xi}, R_{m_\xi}\} = \mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$. Пусть χ_i — характеристическая функция диагонали δ . Для любого оператора $B \in \mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$ положим $\gamma(B) = (B\chi_i, \chi_i)$. Элементарным подсчетом можно получить, что состояния γ и ω_ξ совпадают на образующих, $\gamma(R_{m_\varphi}, R_{\rho_\xi}, R_{m_\psi}) = \omega_\xi(M_\varphi, P_\xi, M_\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in L^\infty(X, \mu)$, откуда и следует $\mathcal{W}(X, \mu, \xi) \cong \mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$.

(ii) Покажем теперь, что если ξ, η — измеримые разбиения со счетными элементами, $\eta \leq \xi$, то $\mathcal{W}(X, \mu, \xi) \subset \mathcal{W}(X, \mu, \eta)$ (с точностью до пространственного изоморфизма). В силу (i) для этого достаточно проверить, что $\mathcal{W}(X, \mu, R(\xi)) \subset \mathcal{W}(X, \mu, R(\eta))$, а это, в свою очередь, следует из того, что нормализатор диагональной подалгебры алгебры $\mathcal{W}(X, \mu, R(\xi))$ содержится в нормализаторе соответствующей подалгебры $\mathcal{W}(X, \mu, R(\eta))$, поскольку автоморфизмы X , переставляющие точки в элементах разбиения ξ содержатся среди автоморфизмов, переставляющих точки в элементах разбиения η .

(iii) Пусть, наконец, T — преобразование, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда из (i) (ii), а также определения алгебр A_n (см. п. 1.), следует, что $\mathcal{W}_n(X, \mu, T)$ и $\mathcal{W}(X, \mu, R_n)$ пространственно изоморфны. Для завершения доказательства осталось заметить, что обе алгебры $\mathcal{W}_\infty(X, \mu, T)$ и $\mathcal{W}(X, \mu, R_\infty)$ являются индуктивными пределами изоморфных алгебр, следовательно они сами изоморфны.

Далее, эргодичность отношения B по определению ([17]) означает, что каждое $E \subset X$, совпадающее с $B(E) = \{x, (x, y) \in B \text{ для некоторого } y \in E\}$ имеет либо нулевую, либо полную меру. Пусть $E = R_\infty(E)$, если $x \in T^{-n} T^n E$, то $T^n x \in T^n E$, т. е. найдется $y \in E$ такой, что $T^n x = T^n y$. Поэтому $x \in R_\infty(E)$, т. е. $x \in E$. Ввиду точности эндоморфизма, E тривиально. Отсюда следует, что отношение R_∞ эргодично, а простые аргументы (см., напр., [17]) позволяют заключить, что $\mathcal{W}_r(X, \mu, R_\infty)$, а следовательно и $\mathcal{W}_\infty(X, \mu, T)$ — фактор.

Замечание. В этой и следующей теоремах пространственный изоморфизм алгебр доказывается без предположения о точности или эргодичности эндоморфизма — достаточно, чтобы эндоморфизм удовлетворял условиям теоремы 1.10.

Теорема 2.4. Пусть T — несингулярный эргодический эндоморфизм с не более чем счетным числом прообразов почти каждой точки. Тогда алгебра $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ — фактор.

Доказательство. Легко проверить, что эргодичность эндоморфизма эквивалентна эргодичности отношения $R = R(\tau(T))$. Поэтому, как и в предыдущей теореме, достаточно проверить пространственный изоморфизм алгебр $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ и $\mathcal{W}_r(X, \mu, R)$.

Пусть $R^n = \{(x, y) \in R, x \approx T^n y\}$, $n > 0$; $R^0 = \{(x, y) \in R, T^{-n} x \approx y\}$, $n < 0$, $R^0 = R_\infty$; очевидно, что $\mu_l(R^k \cap R^l) = 0$ при $k \neq l$ и $\bigcup_n R^n = R$.

Рассмотрим на R функции $u(x, y) = \delta_x^{T^y} s_1(Ty)^{-1}$ и $m_\tau(x, y) = \delta_x^y \varphi(x)$. Как легко проверить $R_u B = B R_u$ для любого $B \in \mathcal{W}_l(X, \mu, R)$,

откуда $R_n \in \mathcal{W}(X, \mu, R)$ и, следовательно, $\{R_n, R_{m_n}, \varphi \in L^-\} \subset \mathcal{W}(X, \mu, R)$. Покажем, что верно обратное включение. Пусть $R_a \in \mathcal{W}(X, \mu, R)$, тогда $R_a = \sum_n R_{a_n}$, где $a_n(x, y) = a(x, y)$ при $(x, y) \in R^n$ и $a_n(x, y) = 0$ в противном случае, а ряд сходится в сильной операторной топологии. Достаточно проверить, что $R_{a_n} \in \{R_u, R_{m_\varphi}\}$ при всех n . В силу того, что $R_u^n R_u^n = R_{p_n}$, где $p_n = p_{i_n}$ (см. часть (i) доказательства теор. 2.3), учитывая теорему 2.3, $\mathcal{W}(X, \mu, R_\infty) \subset \{R_u, R_{m_\varphi}\}$. Кроме того, $(R^n)^* = R^{-n}$, поэтому необходимо лишь убедиться, что $R_{a_n} \in \{R_u, R_{m_\varphi}\}$ при $n < 0$. В этом случае легко установить, что $R_{u^{-n} \cdot a_n} \in \mathcal{W}(X, \mu, R_-)$, откуда, в силу того, что $R_{a_n} = R_{u^{-n}} R_{u^{-n} \cdot a_n}$, получаем $R_{a_n} \in \{R_u, R_{m_\varphi}\}$. Итак, $\mathcal{W}(X, \mu, R) = \{R_u, R_{m_\varphi}\}$. Для $B \in \mathcal{W}(X, \mu, R)$

положим $\gamma(B) = (B\chi_i, \chi_i)$. Пусть $a \in \hat{A}$ (см. лемму 1.8), тогда a есть линейная комбинация операторов вида bU^k или $V^k b$ с $b \in A$. Пусть B — соответствующий оператор из $\mathcal{W}(X, \mu, R_-)$ (в силу теоремы 2.3). Легко убедиться, что, например, $\gamma(BR_{u^k}) = \omega(bU^k)$ и из совпадения γ и ω на образующих следует изоморфизм алгебр $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ и $\mathcal{W}(X, \mu, R)$.

З а м е ч а н и е. Поскольку условие точности сильнее эргодичности, в случае точного эндоморфизма, обе алгебры $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ и $\mathcal{W}_-(X, \mu, T)$ являются факторами.

Напомним, что коммутативная подалгебра M алгебры фон Неймана $\mathcal{W}$ называется *картановской*, если она максимальна, регулярна (нормализатор порождает всю алгебру $\mathcal{W}$) и существует состояние Ω на $\mathcal{W}$, такое, что $\Omega(ma) = \Omega(am)$ для $a \in \mathcal{W}, m \in M$, [8]. Последнее условие (см. [17]) можно заменить на эквивалентное условие существования точного нормального условного ожидания с алгебры $\mathcal{W}$ на подалгебру M .

Предложение 2.5. *В условиях теоремы 1.10 образ $\mathfrak{M}$ в регулярном представлении является картановской подалгеброй $\mathcal{W}_-(X, \mu, T)$ и $\mathcal{W}(X, \mu, T)$.*

Доказательство. В силу изоморфизма (см. замечание теоремы 2.3) достаточно проверить, что $\mathfrak{M}$ — картановская подалгебра в $\mathcal{W}(X, \mu, R)$ и $\mathcal{W}(X, \mu, R_-)$, учитывая, конечно, что $\mathfrak{M} = \pi(\mathfrak{M})$ (по существу используются те же аргументы, что в [17]). Регулярность максимальной подалгебры $\mathfrak{M}$ сразу следует из описания ее нормализатора (см. начало п. 2). Пусть γ — состояние на $\mathcal{W}(X, \mu, R)$, задаваемое формулой $\gamma(R_a) = \int a(x, x) d\mu(x)$. Если $m \in \mathfrak{M}, R_a \in \mathcal{W}(X, \mu, R)$,

то $\gamma(R_a \cdot m) = \int (a \cdot m)(x, x) d\mu(x) = \int a(x, x) m(x) d\mu(x) = \int (m \cdot a)(x, x) d\mu(x) = \gamma(m \cdot R_a)$, что завершает доказательство.

Как уже отмечалось во введении, эта теорема означает, что $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ (соотв. $\mathcal{W}_-(X, \mu, T)$) есть скрещенное произведение коммутативной алгебры $L^-(X, \mu)$ и некоторой группы ее автоморфизмов, которую легко описать: это множество автоморфизмов X , переставляющих точки в элементах разбиения $\tau(T)$ (соотв. $t(T)$). Разумеется, действие этой группы, вообще говоря, не свободное. Следующая теорема показывает, что на деле $G = Z$.

Теорема 2.6. Пусть эндоморфизм T удовлетворяет условиям теоремы 2.4 тогда фактор $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ инъективный; если T — точный эндоморфизм, то фактор $\mathcal{W}_-(X, \mu, T)$ также инъективен.

Доказательство. В силу замечания после теоремы 2,3, достаточно установить инъективность факторов $\mathcal{W}_+(X, \mu, R)$ и $\mathcal{W}_-(X, \mu, R_-)$.

Напомним, (см. [15]), что разбиение пространства Лебега называется *ручным*, если оно представляется в виде (неизмеримого или теоретико-множественного) пересечения убывающей последовательности измеримых разбиений. Заметим, что ручное разбиение со счетными элементами представимо в виде убывающей последовательности измеримых разбиений с конечными элементами. По теореме Вершика, [16], траекторное разбиение эндоморфизма — ручное, разбиение $t(T)$ — ручное по определению. Поэтому оба они представимы в виде пересечения убывающей последовательности измеримых разбиений с конечными элементами. Соответственно, отношения R и R_- представляются в виде объединения возрастающей последовательности отношений с конечными слоями. Это означает, что каждая из алгебр $\mathcal{W}(X, \mu, R)$ и $\mathcal{W}(X, \mu, R_-)$ является слабым замыканием объединения возрастающей последовательности алгебр фон Неймана типа I_n , что и доказывает их инъективность.

Теорема 2.7. Пусть T_i — преобразование пространства Лебега (X_i, μ_i) , удовлетворяющее условиям теоремы 1.10, $i = 1, 2$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

(i) разбиение $\tau(T_1)$ изоморфно некоторому измельчению разбиения $\tau(T_2)$

(ii) алгебра $\mathcal{W}(X_1, \mu_1, T_1)$ изоморфна некоторой подалгебре алгебры $\mathcal{W}(X_2, \mu_2, T_2)$, при этом соответствующие картановские подалгебры изоморфны.

Доказательство. Пусть $R_1 = R(\tau(T_1))$ и $R_2 = R(\tau(T_2))$ — соответствующие отношения эквивалентности. В силу теорем об изоморфизме (2.3, 2.4), достаточно доказать утверждение для алгебр $\mathcal{W}(X_1, \mu_1, R_1)$ и $\mathcal{W}(X_2, \mu_2, R_2)$.

(i) Условие (i) гарантирует существование отношения $\widehat{R}_1 \subset R_2$ и изоморфного R_1 , откуда немедленно следует (i).

(ii) Из условия (ii) следует существование подалгебры $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}(X_2, \mu_2, R_2)$, изоморфной $\mathcal{W}(X_1, \mu_1, R_1)$. При этом картановская подалгебра алгебры $\mathcal{W}_1$ совпадает с $\widehat{\mathfrak{M}}_2$. Следовательно, нормализатор $N^1(\widehat{\mathfrak{M}}_2)$ алгебры $\widehat{\mathfrak{M}}_2$ относительно $\mathcal{W}_1$ вложен в нормализатор $N(\widehat{\mathfrak{M}}_2)$ алгебры $\widehat{\mathfrak{M}}_2$ относительно $\mathcal{W}(X_2, \mu_2, R_2)$.

Введем следующее отношение эквивалентности: $(x, y) \in \bar{R}_1$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $\Phi: X_2 \rightarrow X_2$, переставляющий точки в элементах разбиения $\tau(T_2)$ и такой, что отвечающий ему унитарный оператор в алгебре $\mathcal{W}(X_2, \mu_2, K_2)$ содержится в $\mathcal{W}_1$, причем $x = \Phi(y)$.

Тогда, очевидно, $\bar{R}_1 \subset R_2$ и $\mathcal{W}_1 \cong (X_2, \mu_2, \bar{R}_1)$. Осталось заметить, что условие совпадения картановских подалгебр гарантирует изоморфизм пространств (X_1, μ_1) и (X_2, μ_2) . Следовательно, отношения R_1 и $\bar{R}_1$ изоморфны, т. е. верно (i).

В частности $\mathcal{W}(X_1, \mu_1, T_1)$ изоморфно $\mathcal{W}(X_2, \mu_2, T_1)$ тогда и только тогда, когда изоморфны разбиения $\tau(T_1)$ и $\tau(T_2)$.

3°. Алгебраический тип преобразования. В этом разделе мы рассматриваем вопросы, связанные с типом факторов, ассоциированных с эргодическими эндоморфизмами с инвариантной мерой. По теореме 2.7 изоморфизм факторов эквивалентен изоморфизму траекторий исходных преобразований, поэтому инварианты фактора (в частности его тип) автоматически являются траекторными инвариантами преобразований. Таким образом, под алгебраическим типом (или просто типом) эргодического преобразования мы понимаем тип соответствующего фактора (совпадающий с типом его траекторного отношения, [17]). Будучи траекторным инвариантом, тип преобразования является грубым инвариантом (относительно метрического изоморфизма), однако как показывают примеры (см. замечание), он независим от энтропии. По поводу других инвариантов для эндоморфизмов см., напр., [34]—[36]).

Вернемся к рассмотрению и обозначениям п. 2.

Предложение 3.1. Пусть $\mathcal{W}(X, \mu, R)$ —алгебра, построенная по измеримому отношению R с помощью конструкции Фелдмана-Мура, $\hat{R} = \{(x, y) \in R, D(x, y) = 1\}$. Если измеримое отношение $\hat{R}$ эргодично, то тип фактора $\mathcal{W}(X, \mu, R)$ определяется множеством $\sigma(D)$ существенных значений модулярной функции D , при этом фактор $\mathcal{W}(X, \mu, \hat{R})$ имеет тип II_1 .

Доказательство. Ввиду того, что D есть 1-коцикл, $D(x, y) = D(x, z)D(z, y)$, $\hat{R}$ —измеримое отношение. Если $\hat{R}$ эргодично, то эргодично и R , откуда следует, что обе алгебры $\mathcal{W}(X, \mu, R)$ и $\mathcal{W}(X, \mu, \hat{R})$ являются факторами. По определению, централизатор ζ состояния $\tau(\cdot \chi_i, \chi_i)$ (ср. доказательство теоремы 2.4) состоит из неподвижных точек группы модулярных автоморфизмов ψ_i , откуда, из (2.1) получаем $\zeta = \mathcal{W}(X, \mu, \hat{R})$. Известно ([21], следствие 3.2.7), что тип фактора, для которого централизатор ζ также является фактором, определяется спектром соответствующего модулярного оператора, точнее, в этом случае, инвариант S Конна совпадает с $\text{Sp } \Delta$. Осталось заметить, что в рассматриваемой ситуации этот оператор является мультипликатором (неограниченным) и, следовательно, его спектр совпадает с множеством существенных значений D . Легко понять, что централизатор ζ в факторе

$\mathcal{W}(X, \mu, R)$ совпадает с ним самим, а сужение Δ на эту алгебру есть единственный оператор, откуда и следует последняя часть утверждения.

Пусть теперь R — отношение эквивалентности, отвечающее траекторному разбиению сохраняющего меру эргодического эндоморфизма T , т. е. $R = R(\tau(T))$. Воспользовавшись предложениями 3.1 и 2.2, можно заклю-

чить, что $(x, y) \in \bar{R}$ тогда и только тогда, когда для соответствующих условных мер $\mu_n(x) = \mu_n(y)$.

Пусть $X_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ — конечное множество, рассматриваемое как дискретное топологическое пространство, $X = \prod_1 X_0$ — тихоновское произведение счетного числа экземпляров X_0 , представляющее собой вполне несвязный компакт. Элементы X суть последовательности вида $x = (x_1, x_2, \dots)$, где $x_k \in X_0$, $k = 1, 2, \dots$, а преобразование T одностороннего сдвига $(Tx)_k = x_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, является непрерывным отображением X на себя. В случае двустороннего преобразования T является обратимым преобразованием и по любой инвариантной мере имеет тип II₁.

Марковская T -инвариантная мера μ на X задается первоначальным распределением $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ на X_0 и стохастической матрицей перехода $s = [c_{ij}]$. Для простоты мы предполагаем всюду, что компоненты матрицы s и вектора p положительны — это гарантирует эргодичность рассматриваемых эндоморфизмов. Сдвиг Бернулли (частный случай эндоморфизма Маркова) характеризуется матрицей перехода, где $c_{ij} = p_j$.

Пусть R^n — множества, определенные в доказательстве теоремы 2.4. Каждое из них состоит из однослойных множеств, что позволяет ввести на них структуру локально компактного топологического пространства. Поэтому $\bar{R} = \sqcup R^n$ (дизъюнктное объединение) также является локальным компактом, причем однозначно определена проекция $\pi: \bar{R} \rightarrow R$. В топологической ситуации $\bar{R}$ отлично от R (эти два объекта совпадают почти всюду по любой невырожденной мере, ср. доказательство теоремы 2.4), причем на $\bar{R}$ существует структура Γ -дискретного группоида (см. [6]).

Теорема 3.2. Пусть T — сдвиг Маркова с матрицей перехода $s = [c_{ij}]$ с положительными компонентами, $L(s)$ — множество всевозможных произведений вида $a = c_{k_1 k_2} c_{k_2 k_3} \dots c_{k_n k_1}$. Тогда, если существует $\lambda \in]0, 1[$, такое, что для любого $a \in L(s)$, $a = i^{m_a}$, с взаимно простыми $m_a \in \mathbb{N}$, то тип эндоморфизма T есть III _{λ} , в противном случае T имеет тип III₁.

Доказательство. Пусть D — модулярная функция (см. п. 2). Покажем, что D продолжается до непрерывной функции $\bar{D}$ (1-коцикл) на $\bar{R}$, в том смысле, что для почти всех $z \in R$, $D(z) = \bar{D}(x^{-1}(z))$. Действительно, как легко проверить, функция $\bar{D}(x, y) = \mu_n(x) \mu_m(y)^{-1}$, где $T^n x = T^m y$ непрерывна на R^{n-m} , $n > m$, (здесь как обычно $\mu_n(x)$)

—условная мера точки x в разбиении ξ_n), поэтому она непрерывна и на $\widehat{R}$. Осталось заметить, что почти везде R^{m_1} и R^{m_2} не пересекаются и привлечь предложение 2.2.

Пусть Σ_0 — полуалгебра цилиндрических множеств F вида $F(y_1, \dots, y_n) = \{x \in X, x_i = y_i, i=1, \dots, n\}$. Тогда инвариант Конна S можно вычислить по формуле $S(T) = \int \sigma(D|F \times F)$, где пересечение берется по всем $F \in \Sigma_0$ (вместо σ -алгебры всех измеримых подмножеств, ср. [17]). Это вытекает из предыдущего замечания и является следствием замкнутости множества существенных значений. Легко проверить, что условная мера $\mu_n(x)$ точки $x = (x_1, x_2, \dots)$ в элементе разбиения $\xi_n(x) \in \xi_n$ равна $p(x_1) p(x_{n+1})^{-1} c_{x_1, x_2} \dots c_{x_n, x_{n+1}}$, откуда следует, что $S(T)$ состоит из множества всевозможных отношений $\alpha\beta^{-1}$, где $\alpha, \beta \in L(c)$. При этом несложные построения показывают, что $L(c) \subset S(T)$, откуда и следует заключение теоремы.

Следствие 3.3. Пусть T — эндоморфизм Бернулли с n состояниями и мерами $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда его тип есть III_λ , если среди $p_1, p_2, \dots, p_n$ есть мультипликативно несоизмеримые числа и тип III_λ , если существуют $\lambda \in]0, 1[$ и взаимно простые $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, такие, что $p_i = \lambda^{k_i}$.

Доказательство. Очевидно, что $L(c)$ содержит диагональ $\{c_{ii}, i=1, \dots, n\}$ (см. предыдущую теорему), совпадающую с распределением $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, откуда и вытекает утверждение.

Заметим, что в этом случае $S(T) = \sigma(D)$. Действительно, на пространстве X естественным образом действует группа Σ финитных подстановок. Это действие эргодическое, поэтому траекторному разбиению этой группы отвечает эргодическое отношение R_Σ . Легко проверить, что $R_\Sigma \subset \widehat{R}$, следовательно и $\widehat{R}$ эргодично, откуда по предложению 3.1, $\mathcal{W}_\sigma(X, \mu, \widehat{R})$ — фактор, а $S(T) = \sigma(D)$.

Следствие 3.4. Пусть T — эндоморфизм Бернулли с n состояниями равной меры. Тогда тип фактора $\mathcal{W}_\sigma(X, \mu, T)$ есть II_λ , а тип фактора $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ есть $III_{\frac{1}{n}}$.

Доказательство. Утверждение о типе фактора $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ вытекает из следствия 3.3, а тип фактора $\mathcal{W}_\sigma(X, \mu, T)$ вычисляется на основании предложения 3.1 (в этом случае $\widehat{R} = R_-$).

Заметим, что конечность образующей в следствии 3.3 предположена для простоты. Тот же результат (с очевидными изменениями в формулировке) верен и для эндоморфизма Бернулли со счетной образующей.

Теорема 3.5. Пусть $\lambda \in]0, 1[$, тогда существует сдвиг Бернулли с конечной или счетной образующей, имеющий тип III_λ .

Доказательство. Если $\lambda = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $\lambda \in]0, 1[$. Покажем, что существует последовательность натуральных чисел $k_1, k_2, \dots$ без общих делителей и таких, что $\sum_1^\infty \lambda^{k_i} = 1$. Пусть $m_1 \in \mathbb{N}$, $m_1 \lambda \leq 1$, но $(1 + m_1) \lambda > 1$. Положим $k_1 = k_2 = \dots = k_{m_1} = 1$.

Далее, пусть $m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 \lambda + m_2 \lambda^2 \leq 1$, но $m_1 \lambda + (m_2 + 1) \lambda^2 > 1$ при некотором $t_2 > 2$. Положим $k_{m_1+1} = \dots = k_{m_1+m_2} = t_2$. Продолжим этот процесс дальше, выбирая каждый раз t_n взаимно простым с $t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$. Построенная таким способом последовательность $k_1, k_2, \dots$ очевидно обладает требуемым свойством. Наконец, пусть (X, μ, T) — схема Бернулли со счетной образующей и мерами $p_i = \lambda^{k_i}$. Тогда, очевидно $\{\prod p_i^{k_i}\}_{k_i \in \mathbb{N}} \subset \{\lambda^k\}$, но, поскольку существуют $m'_1, \dots, m'_l$ с $\sum m'_i k_i = 1$, то $\lambda = \prod p_i^{m'_i}$, т. е. $\{\prod p_i^{k_i}\} = \{\lambda^k\}$. Это и означает, что $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ — фактор типа III_λ .

Замечание. Приведем несколько примеров, показывающих, что тип независим от энтропии. Пусть T_1, T_2 — два сдвига Бернулли с 13 состояниями $\frac{1}{4}, \frac{1}{16} (\times 12)$ и $\frac{1}{8} (\times 5), \frac{1}{16} (\times 4), \frac{1}{32} (\times 4)$, соответственно. Тогда, как легко подсчитать, энтропии этих эндоморфизмов совпадают, при этом тип T_1 есть $III_{\frac{1}{4}}$, а T_2 имеет тип $III_{\frac{1}{2}}$. Заметим,

что тип произвольного двустороннего сдвига (как и вообще, любого автоморфизма с инвариантной мерой) есть II_1 .

Пусть $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, T_3 — сдвиг Бернулли с состояниями (λ, λ^2) ,

T_4, T_5 — сдвиги Маркова с матрицами перехода $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$, соответственно. Тогда энтропии всех трех эндоморфизмов одинаковы, при этом тип T_3 совпадает с типом T_4 и равен III_λ , а тип T_5 есть III_λ . Таким образом, эндоморфизмы T_4 и T_5 неизоморфны, однако убывающие последовательности разбиений (или σ -алгебр), определяемые ими, *финишно изоморфны*, ср. [34], [35].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12. III. 1985

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ. Լեքզի տարածության ոչսիզոպյար էնդոմորֆիզմների հետ զուգորդված պերատորային հանրահաշիվներ (ամփոփում):

Դիցուք T -ն (X, μ) Լեքզի տարածության քվադր-ինվարիանտ շփով ձևափոխությունն է, այլ չիսին, որ համարյա ամեն մի կետ ունի ոչ ավել քան հաշվիի նախապատկեր: Ամեն մի այլոյիսի ազատ գործող ձևափոխությանը համապատասխանեցվում է $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ ֆուն նոյմանի հանրահաշիվ: Այս հանրահաշիվը իզոմորֆ է Ֆելդման-Մուրի կատեգորիայի ստացված հանրահաշիվին (հիսնով համապատասխան հետազոյին տրոհումի): Եթե T -ն էրզոդիկ է, ապա $\mathcal{W}(X, \mu, T)$ -ն ինվարիանտի ֆակտոր է (Կրիգերի ֆակտորի ընդհանրացում): Բնականաբար, իզոմորֆ հետազոյին տրոհումներով ձևափոխությունները ծնում են իզոմորֆ ֆակտորներ:

Հետազոյված է այս ֆակտորների տիպը (որը հանդիսանում է T -ի հետազոյին ինվարիանտ): Անգամ ինվարիանտ շփով ձևափոխությունների համար տիպը կարող է լինել III_λ , $\lambda \in]0, 1[$ և ամեն մի այլոյիսինը ստացվում է հիսնով Բերնուլլի կամ Մարկովի միակողմանի տեղաշարժից:

Այնտատանքը մանրամասն շարադրանք է ընդհանուր դեպքում [24] — [26] (տես նաև [27])-ում հայտնարված արդյունքների (ինվարիանտ շփով էնդոմորֆիզմների դեպքում):

V. A. ARZUMANIAN. *Operator algebras associated with non-singular transformations of a Lebesgue space (summary)*

Let T be a finitely or countably many to one endomorphism of a Lebesgue space (X, m) with quasi-invariant measure. With every such freely acting transformation on the von Neumann algebra $\mathcal{W}(X, m, T)$ construction is associated. The latter is isomorphic to the von Neumann algebra obtained by Feldman-Moore construction starting from the corresponding full trajectory partition. If the initial endomorphism is ergodic, $\mathcal{W}(X, m, T)$ is injective factor (which generalize the so called Krieger factor). Naturally, transformations with isomorphic trajectory partitions (weakly equivalent) generate isomorphic factors.

The type (a trajectory algebraic invariant of T) of these factors is investigated. We show that transformations with invariant measure have the type III $_{\lambda}$, $\lambda \in]0, 1[$, and every such a type can be realized by Bernoulli or Markov one-sided shift.

The paper is a detailed presentation of the results announced in [24]—[26] (see also [27]) for measure preserving transformations.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Murray, J. von Neumann. On rings of operators, Ann. Math., 37, 1936, 116—229.
2. J. von Neumann. On rings of operators, III, Ann. Math., 41, 1940, 94—161.
3. F. Murray, J. von Neumann. On rings of operators, IV, Ann. Math., 44, 1943, 716—808.
4. C. C. Moore. Invariant measure on product spaces, Proc. of the Fifth Berkeley symp., II, p. 2, 1967, 447—459.
5. G. Zeller-Meyer. Produits croisés d'une C^* -algèbre par une groupe d'automorphismes, J. Math. pure et appl., 47, 1968, 101—239.
6. J. N. Renault. A groupoid approach to C^* -algebras, Lecture Notes in Math., Springer, 793, 1980.
7. W. Arveson. Operator algebras and measure preserving automorphisms, Acta Math., 118, n. 1—2, 1967, 95—105.
8. А. М. Вершик. Некомпактные разбиения, траекторная теория, алгебры операторов, ДАН СССР, 119, № 5, 1971, 1004—1007.
9. H. Dye. On group of measure preserving transformations, I, Amer. J. of Math., 81, n. 1, 1959, 119—159.
10. H. Dye. On group of measure preserving transformations, II, Amer. J. of Math., 85, n. 4, 1963, 551—576.
11. W. Krieger. On non-singular transformations of a measure space, I, II, Z. Wahr. verw. Geb., 11, 1969, 83—119.
12. W. Krieger. On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of measure space, Lect. Notes Math., 160, 1970, 156—177.
13. W. Krieger. On constructing non $*$ -isomorphic hyperfinite factors of type III, J. of Funct. Anal., 6, 1970, 97—109.
14. W. Krieger. On ergodic flows and the isomorphism of factors, Math. Ann., 223, 1976, 19—70.
15. А. М. Вершик. Устройство ручных разбиений, УМН, 27, № 3, 1972, 195—196.
16. А. М. Вершик. Действие PSL $(2, \mathbb{Z}^*)$ в $\mathbb{R}^1$ аппроксимируемо, УМН, 33, № 1, 1978, 209—210.
17. J. Feldman, C. C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras, I, II, Trans. of A. M. S., 234, n. 2, 1977, 289—359.
18. A. Connes. Classification of injective factors, Ann. Math., 104, 1975, 73—115.
19. R. T. Powers. Representations of uniformly hyperfinite algebras and the associated von Neumann rings, Ann. Math., 86, 1967, 113—171.
20. H. Araki, E. Woods. A classification of factors, Publ. RIMS, Kyoto Univ., ser. A, 4, 1968, 51—130.

21. A. Connes. Une classification des facteurs de type III, Ann. [Ec. Norm. Sup., 6, 1973, 133—252.
22. M. Takesaki Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lect. Notes in Math., Springer, 128, 1970.
23. U. Haagerup. Connes' bicentraliser problem and uniqueness of the injective factor of type III₁, Odense Univ. Prepr., n. 10, Dec. 1984.
24. В. А. Арзуманян, А. М. Вершик. Фактор-представления скрещенного произведения коммутативной C^* -алгебры и полугруппы ее эндоморфизмов, ДАН СССР, 238, № 3, 1978, 513—516.
25. В. А. Арзуманян. Факторы, ассоциированные с эндоморфизмами пространства Лебега, ДАН Арм.ССР, 68, № 5, 1979, 262—266.
26. В. А. Арзуманян. Алгебраический тип эргодического сдвига Маркова, ДАН Арм.ССР, 80, № 2, 1985, 59—63.
27. V. A. Arzumanyan, A. M. Vershik. Star algebras associated with endomorphisms, in Operator algebras and group repr. (Proc. of 1980—OAGR Conf.), v. 1, Pitman, 1984, 17—27.
28. В. А. Рохлин. Об основных понятиях теории меры, Матем. сб., 67, № 1, 1949, 107—150.
29. В. А. Рохлин. Точные эндоморфизмы пространства Лебега, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 4, 1961, 499—530.
30. П. Халмош. Лекции по эргодической теории, М., ИЛ, 1959.
31. J. Dixmier. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars 1969.
32. J. Dixmier. Les C^* -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, 1964.
33. S. Sakai. C^* -algebras and W^* -algebras, Springer, 1971.
34. А. М. Вершик. Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения, ДАН СССР, 193, № 4, 1970, 748—751.
35. W. Parry, P. Walters. Endomorphisms of a Lebesgue space, Bull. of A. M. S., 78, n. 2, 1972, 272—276.
36. T. Kubo, H. Murata, H. Totoki. On the isomorphism problem for endomorphisms of Lebesgue space, I, II, III, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 9, n. 2, 1974, 235—317.
37. Р. М. Белинская. Разбиения пространства Лебега автоморфизмами, Функ. анализ и прил., 2, № 3, 1968, 4—16.
38. А. М. Вершик. О лакунарном изоморфизме последовательностей диадических разбиений, Функ. анализ и прил., 2, № 3, 1968, 17—21.