ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 6, 1986 Математика

УДК 517.946

С. А. АЙРАПЕТЯН

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

1°. Пусть S—пространство Шварца бесконечно дифференцируемых и быстроубывающих функций в R^n, S'—пространство линейных непрерывных функционалов над S.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t)+f(t),\ t>0,\ x\in R^n, \tag{1}$$

где $P(\sigma)$—квадратная матрица порядка m, элементы которой полиномы по переменным $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$, $\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, i—мнимая единица. Компоненты свободного члена $f(t)=(f_1(t),\cdots,f_m(t))$ и искомого решения $u(t)=(u_1(t),\cdots,u_m(t))$, при фиксированном $t>0$ являются функционалами из S'. Производные по $x_i\,(i=1,\cdots,n)$ понимаются в обобщенном смысле, а производная по t в слабом смысле, т. е. $\left(\frac{du(t)}{dt},\varphi\right)$ —обычная производная $(u(t),\varphi)$ по t при фиксированной φ.

Будем говорить, что l раз непрерывно дифференцируемый по t вектор $u(t)=(u_1(t),\cdots,u_m(t)):[0,+\infty)\to S'^m$ принадлежит классу $\mathrm{E}_t^l(S'^m)$, если существуют положительные постоянные C, c_1, c_2 и натуральное число j такие, что имеют место следующие оценки:

$$\left|\left(\frac{\partial^i u(t)}{\partial t^i},\varphi\right)\right|\leqslant C(1+t)^{c_1}\sup_{x\in R^n}\left\{(1+|x|^2)^{c_2}\sum_{|k|<j}|D^k\varphi(x)|\right\},\ i=0,1,\cdots,l \tag{2}$$

при $t\geqslant 0$, $\varphi\in S$, где $\left|\left(\frac{\partial^i u(t)}{\partial t^i},\varphi\right)\right|=\left|\left(\frac{\partial^i u_1(t)}{\partial t^i},\varphi\right)\right|+\cdots+\left|\left(\frac{\partial^i u_m(t)}{\partial t^i},\varphi\right)\right|,\ k\in Z_+^n$.

Считаем, что заданная в полупространстве $t\geqslant 0$, $x\in R^n$ бесконечно дифференцируемая по $x=(x_1,\cdots,x_n)$ и l раз непрерывно дифференцируемая по t вектор-функция $u(t,x)=(u_1(t,x),\cdots,u_m(t,x))$ принадлежит M^l, если его компоненты удовлетворяют оценкам

$$|D_t^i D_x^k u_j(t,x)|\leqslant C_k(1+t^{c_1})(1+|x|^2)^{c_2},\ i=0,1,\cdots,l,\ j=1,\cdots,m,\ k\in Z_+^n, \tag{3}$$

где C_k, α_1, α_2—постоянные, зависящие от $u(t, x)$, причем α_1 и α_2 не зависят от k.

Пусть I—единичная m-мерная матрица, $\lambda_1(\sigma), \cdots, \lambda_m(\sigma)$—корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - P(\sigma)) = 0, \quad \sigma \in R^n, \tag{4}$$

расположенные в порядке возрастания их действительных частей, т. е.

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1(\sigma) \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_2(\sigma) \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_m(\sigma), \quad \sigma \in R^n. \tag{5}$$

Предположим, что

$$\mathrm{Re}\,\lambda_r(\sigma) \leqslant 0, \quad \mathrm{Re}\,\lambda_{r+1}(\sigma) \geqslant 0, \quad \sigma \in R^n, \tag{6}$$

причем $Re\lambda_{r+1}(\sigma) = 0$ в конечном числе точек σ, где r—постоянное целое число, не зависящее от σ.

Задача типа Коши для системы (1) в классе H, состоящем при фиксированном t из функций класса $L_2^m(R^n)$ и их обобщенных производных любого порядка, растущих при $t \to +\infty$ не быстрее полинома, исследована в работах [1—3]. Вопросы существования и единственности решения такой задачи для системы (1) и для одного уравнения высокого порядка с нулевыми свободными членами в классах $\mathbf{E}_t^l(S'^m)$ рассмотрены в работах [4-7, 11]. Отметим, что класс $\mathbf{E}_t^l(S'_m)$ шире чем класс H. В класс H не входят полиномы, в том числе и константы, а в $\mathbf{E}_t^l(S'^m)$ входят все полиномы.

Основной результат настоящей работы сформулируем в виде двух теорем.

Теорема 1. *Пусть корни характеристического уравнения* (4) *удовлетворяют условиям* (5) *и* (6), *причем* $Re\,\lambda_{r+1}(\sigma) = 0$ *в конечном числе точек* σ, *тогда система дифференциальных уравнений* (1) *имеет решение из класса* $\mathbf{E}_t^1(S'^m)$, *если свободный член* f—*функционал из класса* $\mathbf{E}_t^0(S'^m)$.

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1, *если* $f = f(t, x)$ — *обычная функция из* M^0, *то система* (1) *имеет решение из класса* M^1.

2°. Для простоты изложения будем предполагать, что равенство $Re\lambda_{r+1}(\sigma) = 0$ в (6) достигается в единственной точке $\sigma = 0$. Тогда верны следующие оценки [8]:

$$|\lambda_j(\sigma)| \leqslant C_0(1 + |\sigma|^2)^{N_0}, \quad \sigma \in R^n, \quad j = 1, \cdots, m, \tag{7}$$

$$|\mathrm{Re}\,\lambda_{r+1}(\sigma)| \geqslant c_1 |\sigma|^\alpha (1 + |\sigma|^2)^{-N_1}, \quad \sigma \in R^n, \tag{8}$$

где C_0, N_0, c_1, N_1 и α—некоторые положительные константы.

Обозначим

$$P^{\pm}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^{\pm}(\sigma)} (\lambda I - P(\sigma))^{-1} d\lambda, \quad \sigma \in R^n, \tag{9}$$

где $\gamma^+(\sigma)$—замкнутый контур в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, охватывающий все корни характеристического уравнения с $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $\gamma^-(\sigma)$—контур, охватывающий корни только с $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$. Матрицы $P^{\pm}(\sigma)$ бесконечно дифференцируемы всюду, кроме, быть может, точки нуль. Из оценок (7) и

(8) следует, что контуры $\gamma^{\pm}(\sigma)$ можно выбрать так, что для элементов матриц $P^{\pm}(\sigma)$ имеют место неравенства

$$|D^k P_{ij}^{\pm}(\sigma)| \leqslant C_k |\sigma|^{-\alpha_k} (1+|\sigma|^2)^{N_k}, \ \sigma \neq 0, \ k \in Z_+^n, \tag{10}$$

где C_k, α_k, N_k—вполне определенные положительные константы.

В дальнейшем используются следующие формулы, доказанные в [9]:

$$e^{tP(\sigma)} P^-(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^-(\sigma)} e^{\lambda t} (\lambda I - P(\sigma))^{-1} \, d\lambda, \tag{11}$$

$$e^{-tP(\sigma)} P^+(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^+(\sigma)} e^{-\lambda t} (\lambda I - P(\sigma))^{-1} d\lambda, \tag{12}$$

$$P^+(\sigma) + P^-(\sigma) = I. \tag{13}$$

Используя оценки (7), (8) и (10) в работе [11] доказывается, что элементы $e_{ij}^-(t, \sigma)$ матрицы $e^{tP(\sigma)}P^-(\sigma)$ бесконечно дифференцируемы при $t \geqslant 0$, $\sigma \neq 0$ и вместе с производными по σ удовлетворяют оценкам

$$|D_\sigma^k e_{ij}^-(t, \sigma)| \leqslant C_k (1+t^{n_k}) |\sigma|^{-\alpha_k} (1+|\sigma|^2)^{m_k}, \ \sigma \neq 0, \ t \geqslant 0. \tag{14}$$

Аналогично доказывается следующая

Лемма 1. *Элементы $e_{ij}^+(t, \sigma)$ матрицы $e^{-tP(\sigma)}$ бесконечно дифференцируемы при $\sigma \neq 0$, $t \geqslant 0$ и вместе с производными по σ удовлетворяют оценкам*

$$|D_\sigma^k e_{ij}^+(t, \sigma)| \leqslant C_k (1+t^{n_k} |\sigma|^{-\alpha_k} (1+|\sigma|^2)^{m_k} e^{-c_1 t |\sigma|^{\alpha}(1+|\sigma|^2)^{-N_1}}. \tag{15}$$

3°. Переходим к нахождению частного решения системы (1). Преобразование Фурье по x приводит эту систему к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра σ:

$$\frac{dV(t)}{dt} = P(\sigma) V(t) + g(t), \ t > 0, \ \sigma \in R^n, \tag{16}$$

где $V(t)$ и $g(t)$ — преобразования Фурье решения $u(t)$ и свободного члена $f(t)$ системы (1), соответственно. Так как функционал $f(t)$ принадлежит $\mathbf{E}_t^0(S'^m)$, то $g(t) \in \mathbf{E}_t^0(S'^m)$, $V(t)$ ищется в $\mathbf{E}_t^1(S'^m)$.

Пусть $h(\sigma)$—бесконечно дифференцируемая в R^n функция, удовлетворяющая условию: $h(\sigma) = 0$ при $|\sigma| \leqslant 1$ и $h(\sigma) = 1$ при $|\sigma| \geqslant 2$.
Обозначим

$$g^{\pm}(t) = P^{\pm}(\sigma) \, g(t), \ \sigma \neq 0, \ t \geqslant 0. \tag{17}$$

(Корректность таких обозначений следует из (10)).

Из равенства (9) вытекает, что

$$g^+(t) + g^-(t) = g(t), \text{ при } \sigma \neq 0. \tag{18}$$

Определим последовательности $V_\nu^{\pm}(t)$, $\nu = 1, 2, \cdots$ на функциях $\varphi \in S$ следующим образом:

$$(V_\nu^-(t), \varphi) = \int_0^t (e^{(t-\tau)P(\sigma)} g^-(\tau),\ h(\nu\sigma)\ \varphi(\sigma))\,d\tau, \tag{19}$$

$$(V_\nu^+(t), \varphi) = -\int_0^\infty (e^{-\tau P(\sigma)} g^+(t+\tau),\ h(\nu\sigma)\ \varphi(\sigma))\,d\tau. \tag{20}$$

Лемма 2. *Если $g(t)$—функционал из $E_t^0(S'^m)$, то функционалы $V_\nu^\pm(t)$, $\nu=1, 2, \cdots$, определяемые равенствами* (19), (20), *принадлежат* $E_t^1(S'^m)$.

Доказательство. Используя обозначения (17) для оценки подынтегрального выражения (20), оплучим

$$|(e^{-\tau P(\sigma)} g^+(t+\tau),\ h(\nu\sigma)\ \varphi(\sigma))| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,\,j=1}^m |(g_j(t+\tau)\, e_{ij}^+(\tau, \sigma)\ h(\nu\sigma)\ \varphi(\sigma))|,$$

где $g_j(t)$, $j=1,2,\cdots, m$—компоненты функционала $g(t)$, а $e_{ij}^+(\tau, \sigma)$—элементы матрицы $e^{-\tau P(\sigma)} P^+(\sigma)$. Но так $g(t) \in E_t^0(S'^m)$, то существуют положительные постоянные C, c_1, c_2 и натуральное число j_0 такие, что имеет место

$$|(g_j(t+\tau), e_{ij}^+(\tau, \sigma)\ h(\nu\sigma)\ \varphi(\sigma)| \leqslant C(1+(t+\tau)^{c_1}) \cdot$$

$$\cdot \sup_{|\sigma|>1/\nu} \{(1+|\sigma|^2)^{c_2} \sum_{|k|<j_0} |D_\sigma^k\, [e_{ij}^+(\tau, \sigma)\ h(\nu\sigma)\ \varphi(\sigma)]|\}. \tag{21}$$

Введем следующие обозначения:

$$J_\nu'(t, \tau) = C(1+(t+\tau)^{c_1}) \sup_{1/\nu<|\sigma|<2} \{(1+|\sigma|^2)^{c_2} \times$$

$$\times \sum_{|k|<j_0} |D_\sigma^k\, [e_{ij}^+(\tau, \sigma)\, h(\nu\sigma)\, \varphi(\sigma)]|\}, \tag{22}$$

$$J_\nu''(t, \tau) = C(1+(t+\tau)^{c_1}) \sup_{|\sigma|\geqslant 2} \{(1+|\sigma|^2)^{c_2} \times$$

$$\times \sum_{|k|<j_0} |D_\sigma^k\, [e_{ij}^+(\tau, \sigma)\, h(\nu\sigma)\, \varphi(\sigma)]|\}. \tag{23}$$

Из оценок (15) имеем

$$|D_\sigma^k\, [e_{ij}^+(\tau, \sigma)\ h(\nu\sigma)\ \varphi(\sigma)] \leqslant C_k'(1+\tau^{n_k})(1+|\sigma|^2)^{m_k'} \cdot$$

$$\cdot e^{-c_1\tau|\sigma|^\alpha(1+|\sigma|^2)^{-N_1}} \sum_{p<k} |\sigma|^{-\alpha_p} |D_\sigma^{k-p}[h(\nu\sigma)\varphi(\sigma)]|. \tag{24}$$

Пусть K—постоянная, превосходящая все значения $|D^k h(\sigma)|$, $|k| \leqslant j_0$, тогда $|D^k h(\nu\sigma)| \leqslant K\nu^{|k|}$, причем $D^k h(\nu\sigma)=0$, если $|k|\neq 0$ и $|\sigma| \geqslant 2/\nu$. Из этих оценок и из (24) получаем

$$J_\nu'(t, \tau) \leqslant C_\nu (1+(t+\tau)^{c_1}(1+\tau^{n_{j_0}})\, e^{-c'\tau\nu^{-\alpha}} \sup_{1/\nu<|\sigma|<2} \sum_{|k|<j_0} |D^k \varphi(\sigma)|, \tag{25}$$

$$J_\nu^{\cdot}(t, \tau) \leqslant C' \{1 + (t+\tau)^{c_1}\} (1 + \tau^{n/j_0}) \times$$

$$\times \sup_{|\sigma| \geqslant 2} \{e^{-c'' \tau (1+|\sigma|^2)^{-N_1}} (1 + |\sigma|^2)^{m_j} \sum_{|k| < j_0} |D^k \varphi(\sigma)|\}, \tag{26}$$

Отметим, что постоянные, входящие в (26), не зависят от ν.

Рассмотрим функцию

$$G_N(\rho, \tau) = \rho^{-N} e^{-c'' \tau \rho^{-N_1}}, \ \rho > 5, \ \tau \geqslant 0,$$

где N—натуральное число, а c'' и N_1 — положительные постоянные, входящие в (26). Исследуя на экстремум, можно убедиться, что функция $G_N(\rho, \tau)$ при $\tau \to +\infty$ имеет асимптотику $G_N(\rho, \tau) = O(\tau^{-N/N_1})$. Следовательно $J_\nu^{\cdot}(t, \tau)$ имеет оценку

$$J_\nu^{\cdot}(t, \tau) \leqslant C''(1 + (t+\tau)^{c_1})(1 + \tau^{n/j_0})(1+\tau)^{-N/N_1} \cdot$$

$$\cdot \sup_{\sigma \in R^n} [(1 + |\sigma|^2)^{m j_0 + N} \sum_{|k| < j_0} |D^k \varphi(\sigma)|]. \tag{27}$$

Если взять в (27) N достаточно большим, то из (25) и (27) следует сходимость интеграла (20), а также следующая оценка:

$$|(V_\nu^+(t), \varphi)| \leqslant C_\nu'(1 + t^{c_1}) \sup_{\sigma \in R^n} [(1 + |\sigma|^2)^{m j_0 + N} \sum_{|k| < j_0} |D^k \varphi(\sigma)|], \ \nu = 1, 2, \cdots \tag{28}$$

Оценка (28) для $(V_\nu^-(t), \varphi)$ получается аналогичным образом. Существование производных$\left(\frac{d}{dt} V_\nu^\pm(t), \varphi\right)$ и оценки вида (28) для них следует из определения функционалов $V_\nu^\pm(t)$. Лемма 2 доказана.

Пусть $S_j\{0\}$—класс функций из S, равных нулю вместе с производными до порядка j в точке 0.

Лемма 3. *Если* $g(t) \in \mathrm{E}_t^0(S'^m)$ и $\varphi \in S_j\{0\}$ *при достаточно большом* j, *то последовательности вектор-функций* (19), (20), *а также их производные первого порядка, имеют пределы при* $\nu \to \infty$ *для каждого* $t \geqslant 0$, *причем предельные функции удовлетворяют оценке* (2) *при* $i = 0,1$.

Доказательство. Пусть $g(t) \in \mathrm{E}_t^0(S'^m)$ и удовлетворяет оценке (2) при $j = j_0$. Пусть далее $\varphi \in S_j\{0\}$, где $j \geqslant j_0$. Тогда если $|k| \leqslant j$, то

$$|D^k \varphi(\sigma)| \leqslant |\sigma|^{j-|k|} \sup_{|\sigma'| < |\sigma|} \sum_{|p| = j} |D^p \varphi(\sigma')|. \tag{29}$$

Так как $|D^p h(\nu\sigma)| \leqslant K\nu^{|p|}$, то при $1/\nu \leqslant |\sigma| \leqslant 2/\nu$ имеем

$$|D^k h(\nu\sigma) \varphi(\sigma)| \leqslant K \left(\sum_{p \leqslant k} C_k^p 2^p\right) \cdot |\sigma|^{j-|k|} \sup_{|\sigma'| < |\sigma|} \sum_{|p| = j} |D^p \varphi(\sigma')|. \tag{30}$$

Если $|\sigma| > 2/\nu$, то $h(\nu\sigma) = 1$ и тогда $h(\nu\sigma)\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma)$ удовлетворяет оценке (29). Из оценок (24), (25), (30), используя обозначения (22), получаем

$$J'_\nu(t, \tau) \leqslant C_1(1+(t+\tau)^{c_1})\,(1+\tau^{n_{j_0}})\cdot$$

$$\cdot \sup_{1/\nu\leqslant|\sigma|\leqslant 2} [e^{-c'\tau|\sigma|^\alpha}|\sigma|^{j-\alpha'}\sum_{|k|=j} D^k\varphi(\sigma)|], \tag{31}$$

где C_1—постоянная, не зависящая от ν, а $\alpha'=\max\{j_0, \alpha_k;\ |k|\leqslant j_0\}$.

Рассмотрим функцию

$$G_j(\rho, \tau)=\rho^{j-\alpha'}e^{-c'\tau\rho^\alpha};\ \rho\in[0,2],\ \tau\geqslant 0,$$

где $j\geqslant\alpha'$—натуральное число, α и c'—константы, входящие в (31). Как и выше доказывается, что при $\tau\to+\infty$ функция $G_j(\rho, \tau)$ имеет асимптотику $O(\tau^{-\frac{j-\alpha'}{\alpha}})$. Отсюда и из оценки (31) следует, что

$$J'_\nu(t, \tau)\leqslant C_2(1+(t+\tau)^{c_1}(1+\tau^{n_{j_0}})(1+\tau)^{-\frac{j-\alpha'}{\alpha}}\sup_{|\sigma|\leqslant 2}\sum_{|k|=j}|D^k\varphi(\sigma)|. \tag{32}$$

Если взять в (32) j достаточно большим, а именно, $j>\alpha'+\alpha(c_1+n_{j_0})+1$, то из оценок (26), (32) получаем равномерную по ν оценку

$$|(V_\nu^+(t), \varphi)|\leqslant C_3(1+t^{c_1})\sup_{\sigma\in R^n}[(1+|\sigma|^2)^{c'}\sum_{|k|\leqslant j}|D^k\varphi(\sigma)|],\ \varphi\in S_j\{0\}. \tag{33}$$

Оценки вида (33) для $(V_\nu^-(t), \varphi)$, а также для производных $\left(\frac{d}{dt}V_\nu^\pm(t), \varphi\right)$ доказывается аналогично.

Из неравенства (33) и определения функции $h(\sigma)$ следует, что последовательности $\left(\frac{d^i}{dt^i}V_\nu^\pm(t), \varphi\right)$, $i=0,1$ фундаментальны при каждом $t\geqslant 0$, если $\varphi\in S_j\{0\}$, причем предельные функции

$$(V_0^\pm(t), \varphi)=\lim_{\nu\to\infty}(V_\nu^\pm(t), \varphi),\ \varphi\in S_j\{0\} \tag{34}$$

удовлетворяют оценке (2) при $i=0, 1$ и лемма 3 доказана.

Пусть

$$(V_\nu(t), \varphi)=(V_\nu^+(t), \varphi)+(V_\nu^-(t), \varphi),\ \nu=0, 1, 2,\cdots. \tag{35}$$

Из равенств (11)—(13), (19) и (20) следует, что

$$\left(\left[\frac{d}{dt}-P(\sigma)\right]V_\nu(t), \varphi\right)=(g(t), h(\nu\sigma)\varphi(\sigma)),\ \nu=1, 2,\cdots. \tag{36}$$

Если $\varphi\in S_j\{0\}$ при $j>j_0$, то из определения функции $h(\sigma)$ и оценки (30) вытекает, что последовательность функции $\varphi_\nu(\sigma)=(1-h(\nu\sigma))\varphi(\sigma)$ сходится к нулю равномерно вместе с производными до порядка j_0. Но так как $g(t)$ удовлетворяет оценке (2) при $j=j_0$ и $i=0$, то

$$\lim_{\nu\to\infty}(g(t), h(\nu\sigma)\varphi(\sigma))=(g(t), \varphi(\sigma)),\ \varphi\in S_j\{0\}. \tag{37}$$

Переходя в (36) к пределу при $\nu\to\infty$ и используя соотношения (34), (35) и (37), получаем

$$\left(\left[\frac{d}{dt} - P(\sigma)\right] V_0(t), \varphi\right) = (g(t), \varphi), \quad \varphi \in S_j\{0\} \tag{38}$$

при достаточно большом j.

Для доказательства теоремы 1 нам остается продолжить функционал $V_0(t)$ из $S_j\{0\}$ на все S, не нарушая оценки (2) так, чтобы он удовлетворял уравнению (38) при всех $\varphi \in S$.

Пусть φ — произвольная функция из S. Представим ее в виде

$$\varphi(\sigma) = \beta(\sigma) \sum_{|k|<j} D^k \varphi(0) \frac{\sigma^k}{k!} + \varphi_j(\sigma), \tag{39}$$

где $\beta(\sigma)$ —функция из S, равная 1 при $|\sigma| \leqslant \frac{1}{2}$ и 0—при $|\sigma| > 1$, а $\varphi_j \in S_j\{0\}$.

Продолжение будем искать в виде

$$(V(t), \varphi) = \sum_{|k|<j} c_k(t) D^k \varphi(0) + (V_0(t), \varphi_j), \tag{40}$$

где вектор-функции $c_k(t)$ непрерывно дифференцируемы и при $t \to +\infty$ растут не быстрее полинома, вместе с производными первого порядка.

Подставляя $(V(t), \varphi)$ из (40) в уравнение (16) и учитывая уравнение (38), для определения $c_k(t)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешимость которой в классе функций, стремящихся к бесконечности не быстрее полинома, доказана в [1], стр. 291.

4°. Пусть теперь $f(t, x)$ — обычная вектор-функция из класса M^0. Вначале докажем, что система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) + \Delta_x^{\mu} f(t, x) \tag{1'}$$

имеет решение в классе M^1, где μ — достаточно большое натуральное число, а Δ_x — оператор Лапласа в R^n по x.

Производя преобразование Фурье по x в (1′), получим систему

$$\frac{dV(t)}{dt} = P(\sigma) V(t) + |\sigma|^{2\mu} g(t), \tag{16'}$$

где $g(t) = F_x[f(t, x)]$. Так как $f(t, x)$ удовлетворяет оценке (3), то $g(t) \in \mathrm{E}_t^0(S'^m)$ и удовлетворяет оценке (2) при $j \geqslant 2\alpha_2 + n + 1$, $i = 0$. Отсюда следует, что последовательности функционалов $V_\nu^{\pm}(t)$, заданных на S равенствами

$$(V_\nu^-(t), \varphi) = \int_0^t e^{(t-\tau)P(\sigma)} g^-(\tau), |\sigma|^{2\mu} h(\nu\sigma)\varphi(\sigma))\, d\tau, \quad \nu = 1, 2, \cdots, \tag{19'}$$

$$(V_\nu^+(t), \varphi) = \int_0^\infty e^{-\tau P(\sigma)} g^+(t+\tau), |\sigma|^{2\mu} h(\nu\sigma)\varphi(\sigma))\, d\tau, \quad \nu = 1, 2, \cdots, \tag{20'}$$

определены корректно и принадлежат $\mathrm{E}_t^1(S'^m)$.

За счет выбора μ можно достичь того, чтобы функция $|\sigma|^{2\mu}\varphi(\sigma)$

принадлежала классу $S_j|0|$ при достаточно большом j для всех $\varphi \in S$, так что предельный функционал

$$V_0(t) = \lim_{\nu\to\infty} [V_\nu^+(t) + V_\nu^-(t)], \quad t \geq 0 \tag{41}$$

задан на всех функциях $\varphi \in S$, принадлежит $E_t^1(S'^m)$ и является решением системы (16′). Имеет место следующая

Лемма 4. *Если $f(t, x) \in M^0$ и μ — достаточно большое натуральное число, то обратное преобразование Фурье функционала $V_0(t)$, определяемого равенством* (41), *является обычной вектор-функцией из класса M^1.*

Доказательство. i-ая компонента вектор-функций $(V_\nu^+(t), \varphi)$ имеет вид

$$(V_\nu^+(t), \varphi)_i = -\sum_{j=1}^{m}\int_0^{\infty} (g_j(t+\tau),\ |\sigma|^{2\mu} e_{ij}^+(\tau, \sigma)\, h(\nu\sigma)\, \varphi(\sigma))\, d\tau, \quad i=1,\cdots,m,$$

где $g_j(t)$—j-тая компонента функционала $g(t) = F_x[f(t, x)]$, а $e_{ij}^+(\tau, \sigma)$ —элемент матрицы $e^{-\tau P(\sigma)} P^+(\sigma)$.

Обозначим через $z_\nu^{ij}(\tau, x)$ преобразование Фурье функции

$$\frac{|\sigma|^{2\mu}\, e_{ij}^+(\tau, \sigma)\, h(\nu\sigma)}{(1+|\sigma|^2)^s}$$

по переменным $\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$. Повторением рассуждений, примененных в леммах 2, 3 доказывается, что если μ и s-μ — достаточно большие натуральные числа, то $z_\nu^{ij}(\tau, x)$ непрерывна при $\tau \geqslant 0$, $x \in R^n$ и удовлетворяет оценке

$$|z_\nu^{ij}(\tau, x)| \leqslant \frac{C}{(1+|x^2|)^{\alpha_2 + \frac{n+1}{2}}\,(1+\tau)^{\alpha_1+2}}, \tag{42}$$

где C—некоторое постоянное число, не зависящее от ν, а α_1 и α_2—константы, входящие в оценку (3) для $f(t, x)$ при $i=0$. Из определения функции z_ν^{ij} и оценки (42) следует, что последовательность функций $z_\nu^{ij}(\tau, x)$ сходится равномерно по $x \in R^n$ и по $\tau \geqslant 0$, причем предельная функция $z_0^{ij}(\tau, x)$ также удовлетворяет оценке (42).

Функционал $\tilde{V}_\nu^+(t)$, компоненты которого определяются формулами

$$(\tilde{V}_\nu^+(t), \varphi)_i = -\sum_{j=1}^{m}\left(\int_0^{\infty} f_j^{(s)}(t+\tau, x) * z_\nu^{ij}(\tau, x)\, d\tau, \varphi(x)\right), \quad i = 1,\cdots, m, \tag{43}$$

является обратным преобразованием Фурье функционала $V_\nu^+(t)$.

Здесь $f_j^{(s)}(t, x) = (1+\Delta_x)^s f_j(t, x)$, где $f_j(t, x)$ — j-тая компонента вектор-функции $f(t, x)$. (Чтобы убедиться в этом достаточно в (43) применить преобразование Фурье). Переходя в (43) к пределу при $\nu \to \infty$, получаем

$$(\widehat{V}_0^+(t), \varphi)_i = -\sum_{j=1}^{m} \left(\int_0^{\infty} f_j^{(s)}(t+\tau) * z_0^{ij}(\tau, x)\, d\tau, \varphi(x) \right), i=1, \cdots, m, \varphi \in S,$$

где $\widehat{V}_0^+(t)$ — обратное преобразование Фурье функционала $V_0^+(t) = \lim\limits_{\nu\to\infty} V_\nu^+(t)$. А это означает, что функционал $V_0^+(t)$ эквивалентен обычной вектор-функции, компоненты которой определяются формулами

$$\widehat{V}_{0,i}(t, x) = -\sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} f_j^{(s)}(t+\tau, x) * z_0^{ij}(\tau, x)\, d\tau, \quad i=1, \cdots, m. \tag{44}$$

Из оценок (3) и (42) следует также, что производные по x_i любого порядка от функций $\overline{V}_{\nu, i}^+$ непрерывны и удовлетворяют оценке (3) при $i=0, t>0, x \in R^n$. Формула вида (44) для $\widehat{V}_{0,i}^-(t, x)$ получается аналогично.

Для завершения доказательства леммы 4 отметим, что если производные по x_i решения $u(t, x)$ системы (1) удовлетворяют оценке (3) при $i=0$, то $u(t, x) \in M^1$, так как $D_t D_x^k u(t, x)$ при $k \in Z_+^n$ выражаются через производные $D_x^k u(t, x)$ и через производные $D_x^k f(t, x)$.

Лемма 5. *Если $f(t, x)$ — одномерная функция из класса M^l, то уравнение*

$$\Delta_x u(t, x) = f(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in R^n \tag{45}$$

имеет решение из M^l.

Доказательство. Пуст $g(t) = F_x[f(t, x)]$. Тогда из определения преобразования Фурье получаем цепь следующих равенств:

$$(g(t), \varphi) = (f(t, x), F[\varphi](x)) = \int_{R^n} f(t, x) F[\varphi](x)\, dx =$$

$$= \int_{R^n} \frac{f(t, x)}{[1+|x|^2]^{\tilde{\alpha}}} \left\{ \int_{R^n} e^{-i(x,\sigma)} (1+\Delta_\sigma)^{\tilde{\alpha}} \varphi(\sigma)\, d\sigma \right\} dx,$$

где $\tilde{\alpha} = \left[\alpha_2 + \dfrac{n}{2}\right] + 1$, α_2 — постоянная, входящая в (3) для функции $f(t, x)$. Из оценки (3) следует, что в последнем интеграле можно изменить порядок интегрирования, поэтому

$$(g(t), \varphi) = \int_{R^n} f_{\tilde{\alpha}}(t, \sigma)(1+\Delta)^{\tilde{\alpha}} \varphi(\sigma)\, d\sigma, \quad t \geq 0, \tag{46}$$

где

$$f_{\tilde{\alpha}}(t, \sigma) = \int_{R^n} \frac{f(t, x)\, e^{-i(x,\sigma)}}{(1+|x|^2)^{\tilde{\alpha}}}\, dx, \quad t \geq 0, \quad \sigma \in R^n \tag{47}$$

причем ясно, что

$$|D_t^i f_{\tilde{\alpha}}(t, \sigma)| < C'(1 + t^{\alpha_1}),\ t \geqslant 0,\ \sigma \in R^n,\ i = 0,1,\cdots. l \tag{47}$$

Производя преобразование Фурье в уравнении (45) по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$, получим

$$|\sigma|^2 v(t) = g(t),\ t > 0,\ \sigma \in R^n.$$

Представим функционал $g(t)$ в следующей форме:

$$g(t) = \beta(\sigma)\ g(t) + (1 - \beta(\sigma))\ g(t),$$

где $\beta(\sigma)$—функция из S, равная 1 при $|\sigma| \leqslant \frac{1}{2}$ и 0-при $|\sigma| \geqslant 1$. Обозначим

$$(v_0(t), \varphi) = \int\limits_{R^n} f_{\tilde{\alpha}}(t, \sigma)(1 + \Delta)^{\tilde{\alpha}} \left\{\frac{\beta(\sigma)}{|\sigma|^2}\left[\varphi(\sigma) - \sum_{|k| < 2\tilde{\alpha}+2} D^k \varphi(0)\frac{\sigma^k}{k!}\right]\right\} d\sigma.$$

Из оценок (47) и равенства (46) следует, что $v_0(t)$ — линейный непрерывный функционал на S и удовлетворяет уравнению

$$(|\sigma|^2 v_0(t), \varphi) = (g(t), \beta(\sigma)\varphi(\sigma)),\ \varphi \in S_{2\tilde{\alpha}+2}\{0\}.$$

Легко установить, что существуют l раз непрерывно дифференцируемые функции $c_k(t)$ $(|k| \leqslant 2\tilde{\alpha} + 4)$, удовлетворяющие оценкам

$$|D_t^i C_k(t)| \leqslant C''(1 + t^{\alpha_1}),\ t \geqslant 0,\ |k| \leqslant 2\tilde{\alpha} + 4,\ i = 0,1,\cdots, l, \tag{48}$$

такие, что функционал $v_1(t)$, определяемый формулой

$$(v_1(t), \varphi) = (v_0(t), \varphi) + \sum_{|k| < 2\tilde{\alpha}+4} C_k(t)\ D^k \varphi(0),$$

является решением уравнения

$$|\sigma|^2 v_1(t) = \beta(\sigma)\ g(t).$$

Так как функционал $v_1(t)$ имеет компактный носитель, то его обратное преобразование Фурье представляется в форме [10, стр. 117]

$$u_1(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n}(v_1(t, \sigma),\ e^{i(x,\sigma)})$$

или

$$u_1(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{|\sigma|<1} f_{\tilde{\alpha}}(t, \sigma)(1 + \Delta_\sigma)^{\tilde{\alpha}}\left\{\frac{\beta(\sigma)}{|\sigma|^2}\left[e^{i(x,\sigma)} - \sum_{|k|<2\tilde{\alpha}+2}\frac{(i\sigma x)^k}{k!}\right]\right\} d\sigma +$$

$$+ \sum_{|k|<2\tilde{\alpha}+4} c_k(t)(i x)^k.$$

Из оценок (47) и (48) следует, что $u_1(t, x) \in M^{\varepsilon}$.

Методом доказательства леммы 4 устанавливается, что функции

$$u_2(t, x) = F_\sigma^{-1}\left\{\frac{1 - \beta(\sigma)}{|\sigma|^2}\ g(t)\right\}(x)$$

также принадлежит классу M^l и лемма доказана.

Теперь докажем утверждение теоремы 2 в общем случае. Пусть $f(t, x)$ — произвольная вектор-функция из класса M^0, $W_0(t, x)$ — вектор-функция из M^1, удовлетворяющая системе

$$\Delta_x^{\mu} W_0(t, x) = u_0(t, x), \tag{49}$$

где $u_0(t, x)$—решение системы (1′) в M^1. Подставляя $u_0(t, x)$ из (49) в систему (1′), получаем

$$\Delta_x^{\mu}\left\{\frac{\partial W_0(t, x)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)W_0(t, x) - f(t, x)\right\} = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial W_0(t, x)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)W_0(t, x) - f(t, x) = \sum_{|k|<j} d_k(t)\, x^k, \tag{50}$$

где j — некоторое натуральное число, а $d_k(t)$ — некоторая вектор-функция. Из (50) имеем

$$d_k(t) = \frac{1}{k!} D_x^k\left\{\frac{\partial W_0(t, x)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)W_0(t, x) - f(t, x)\right\}_{x=0}.$$

Так как $W_0 \in M^1$ и $f \in M^0$, то $d_k(t) \in M^0$, поэтому, как и в конце п. 3° доказывается, что система

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial t} - P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)W(t, x) = \sum_{|k|<j} d_k(t)\, x^k$$

имеет решение вида

$$W(t, x) = \sum_{|k|<j} c_k(t)\, x^k,$$

где $c_k(t) \in M^1$. Из вышесказаного следует, что $u(t, x) = W_0(t, x) + W(t, x)$ принадлежит классу M^1 и является решением системы (1).

5°. Пусть корни характеристического уравнения (4) удовлетворяют условиям

$$\mathrm{Re}\,\lambda_{r_1}(\sigma) \leqslant 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda_{r_1+1}(\sigma) = \cdots = \mathrm{Re}\,\lambda_{r_2}(\sigma) = 0,\quad \mathrm{Re}\,\lambda_{r_2+1}(\sigma) \geqslant 0,\ \sigma \in R^n,$$

где r_1 и r_2 — натуральные числа, не зависящие от σ, причем строгие неравенства $\mathrm{Re}\,\lambda_{r_1}(\sigma) < 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda_{r_2+1}(\sigma) > 0$ нарушаются только в конечном числе точек σ.

В таких предположениях систему (1) можно рассматривать во всем пространстве $-\infty < t < +\infty$, $x \in R^n$ и доказать теоремы, аналогичные теоремам 1, 2.

Для доказательства таких утверждений, вместо проекторов $P^{\pm}(\sigma)$ из (9) рассматриваются следующие проекторы:

$$P^j(\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j(\sigma)} (\lambda I - P(\sigma))^{-1}\, d\lambda,\quad \sigma \in R^n,\ i = 1, 2, 3,$$

где $\gamma_j(\sigma)$, $j = 1, 2, 3$—контуры в комплексной плоскости, охватывающие только корни характеристическо уравнения с $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ и

$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, соответственно, а вместо функционалов $V_\nu^{\pm}(t)$, $\nu = 1, 2, \cdots$ из (19), (20)—следующие функционалы:

$$(V_\nu^1(t), \varphi) = \int_0^\infty (e^{\tau P(\sigma)} g_1(t-\tau),\ h(\nu\sigma)\,\varphi(\sigma))\,d\tau,$$

$$(V_\nu^2(t), \varphi) = \int_0^t (e^{(t-\tau)P(\sigma)} g_2(\tau),\ h(\nu\sigma)\,\varphi(\sigma))\,d\tau,$$

$$(V_\nu^3(t), \varphi) = -\int_0^\infty (e^{-\tau P(\sigma)} g_3(t+\tau),\ h(\nu\sigma)\,\varphi(\sigma))\,d\tau,$$

где $t \in (-\infty, +\infty)$, $\nu = 1, 2, \cdots$, $g_j(t) = P^j(\sigma)\,g(t)$, $j = 1, 2, 3$ и $g(t) = F_x[f(t, x)]$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 25. III. 1985

Ս. Ա. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծման գոյությունը բազմանդամային աճով ֆունկցիոնալների դասում (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգը $t > 0$, $x \in R^n$ *կիսատարածությունում։* $E_t^l(S'^m)$*—ով* ($l = 0, 1, 2, \cdots$) *նշանակենք մեկ անգամ անընդհատ դիֆերենցելի և (2) գնահատականին բավարարող* $u = (u_1, u_2, \cdots, u_m) : [0, +\infty) \to S'^m)$ *արտապատկերումների դասը, իսկ* M^l *-ով* $t > 0$, $x \in R^n$ *կիսատարածությունում ըստ* x*-ի անվերջ դիֆերենցելի, ըստ* t*-ի մեկ անգամ անընդհատ դիֆերենցելի և (3) գնահատականին բավարարող* $u(t, x)$ *վեկտոր—ֆունկցիաների դասը։*

Ենթադրենք, որ (4) բնութագրիչ հավասարման արմատները բավարարում են (5) և (6) պայմաններին, ընդ որում $\mathrm{Re}\,\lambda_{r+1}(\sigma) = 0$ *միայն վերջավոր թվով* $\sigma \in R^n$ *կետերում։*

Այս պայմանի դեպքում ապացուցվում է, որ եթե $f(t) \in E_t^0(S'^m)$ ($f(t, x) \in M^0$), *ապա (1) համակարգը ունի լուծում* $E_t^1(S'^m)$ *դասից* (M^1 *դասից*)։

S. A. HAIRAPETIAN. *On existence of solutions for systems of nonhomogeneous differential equations with constant coefficients in a class of functionals with polynomial growth* (summary)

A system of differential equations with constant coefficients (1) is investigated Under conditions that the roots of characteristic equation (4) satisfy (5), (6), and the equation $Re\,\lambda_{r+1}(\sigma) = 0$ has only finite number of roots $\sigma \in R^n$ we prove that system (1) has a solution in $E_t^1(S'^m)$, $f(t) \in E_t^0(S'^m)$ and M^1 if $f(t, x) \in M^0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Е. Шилов*. Математический анализ. Второй специальный курс, М., «Наука», 1965.
2. *Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов*. О корректных краевых задачах для уравнения в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, «Математика», 24, 1960, 369—380.
3. *В. П. Паламодов*. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, «Математика», 24, 1960, 381—386.

4. *Н. Е. Товмасян.* Задача Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве в классе обобщенных функций, Дифф. уравнения, 18, № 1, 1982, 132—138.
5. *Н. Е. Товмасян.* Общая граничная задача для системы дифференциальных уравнений в полуплоскости с нарушением условия Я. Б. Лопатинского, Дифф. уравнения, 20, № 1, 1984, 132—141.
6. *Г. В. Дикополов.* О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 59 (101), 1962, 215—228.
7. *А. Л. Павлов.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 103 (145), № 3 (7), 1977, 367—391.
8. *Е. А. Горин.* Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных, УМН, 16, № 1, 1961, 91—117.
9. *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн.* Устойчивость решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., «Наука», 1970.
10. *С. Мизохата.* Теория уравнений с частными производными, М., «Мир», 1977.
11. *Н. Е. Товмасян.* Общие краевые задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными в полупространстве в класс обобщенных функций, Дифф. уравнения, 20, № 12, 1984, 2138—2147.