

УДК 517.53—517.948

В. Б. ДЫБИН

О БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ  
ФУНКЦИЙ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ  
СУЩЕСТВЕННО ОСОБЫХ ТОЧЕК

## Введение

За последнее десятилетие достигнуто определенное продвижение в конструктивной теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши с бесконечным индексом в пространстве  $L_p(\Gamma, \rho)$  [1—10]. Одним из наиболее интересных результатов отмеченных работ явилось установление прямых связей между проблемами явного описания всех решений интегрального уравнения при различных типах бесконечного индекса и кругом идей М. М. Джрбашяна—Б. Я. Левина, связанных с построением базисов в некоторых подпространствах целых или мероморфных функций, лежащих в пространствах Харди, Смирнова и Лебега (см., напр., [11—16]). Здесь мы будем касаться только случая так называемых стандартных почти-периодических разрывов (СПП-разрывов) [4]. Такой разрыв в точке  $t_0 \in \Gamma$  определяется функцией  $\omega(t) = \exp[\varepsilon(t - t_0)^{-1}]$ , где комплексный коэффициент  $\varepsilon$  подобран таким образом, что он обеспечивает ограниченность  $\omega(t)$  вдоль кривой  $\Gamma$ .

В простейшей ситуации, когда точка СПП-разрыва  $t_0 = \infty$ , а  $\Gamma = R$ , модельный сингулярный интегральный оператор имеет вид  $A = P^+ + \exp[ix\varepsilon] P^-$ , где  $\sigma > 0$ ,  $P^\pm = \frac{1}{2}[I \pm S]$ ,  $S$  — преобразование Гильберта. Его ядро в пространстве  $L_p(R, \rho)$ ,  $1 < p < \infty$ , бесконечномерно и определяется равенством  $\ker A = (1 - \exp[-ix\varepsilon]) \times \times P^+(L_p^\sigma(R, \rho))$ , где  $L_p^\sigma(R, \rho)$  — класс всех целых функций экспоненциального типа  $\leq \sigma$ , лежащих в пространстве  $L_p(R, \rho)$  [3], [10]. Отсюда следует, что вопрос описания базиса в  $\ker A$  в случае  $\rho \equiv 1$  решается известной теоремой Б. Я. Левина [12] о базисах в  $L_p^\sigma(R)$ , построенных на основе функций типа синуса (ф.т.с.). Следует обратить внимание на определенную популярность этой теоремы как в связи с внутренними проблемами теории функций и проблемами описания решений сингулярных интегральных уравнений, так и в связи с некоторыми аспектами спектральной теории теплицевых операторов. Следствием этого явилась сравнительно недавно выполненная серия работ [8, 14—16], где были предложены как новые ее доказательства, так и обобщение на случай степенного веса.

Основной целью настоящей работы является демонстрация действия этой теоремы (§ 2) при описании базисов в  $\ker A$  в случае бесконечного числа СПП-разрывов, т. е. когда оператор  $A$  имеет вид  $A = P^+ + \omega^+ P^-$ , где

$$\omega^-(x) = \exp \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{iz_k}{x_k - x}, \quad x_k \in R, \quad z_k > 0, \quad \sum_k \frac{z_k}{|x_k|} < \infty. \quad (1)$$

Здесь роль подпространства  $P^+(L_p^z(R, \rho))$  играет бесконечная прямая сумма его изометрических образов, каждый из которых получается, грубо говоря, «выворачиванием» ситуации из  $\infty$  в конечную точку  $x_k$  с помощью подходящего дробно-линейного преобразования таким образом, что соответствующий класс функций остается в пространстве  $P^+(L_p(R, \rho))$ .

В связи с тем, что вес  $\rho$  является ХМВ-весом, т. е. удовлетворяет условию  $(A_\rho)$  Ханта—Макенхоупта—Видена [17], мы вынуждены предварительно в § 1 провести доказательство теоремы Б. Я. Левина (ниже теорема 1.11) в случае ХМВ-весов, повторяя при этом некоторые узловые моменты работы [12].

Символами  $\blacktriangleleft$  и  $\blacktriangleright$  ниже обозначаются, соответственно, начало и конец доказательства.

### § 1. Пространства целых функций

Пусть  $\rho$  — ХМВ-вес, что эквивалентно выполнению условия

$$\left( \frac{1}{|I|} \int_I \rho \right) \left( \frac{1}{|I|} \int_I \rho^{\frac{1}{1-p}} \right)^{p-1} \leq c_p < \infty, \quad 1 < p < \infty, \quad (A_p^R)$$

где  $I$  — произвольный интервал на  $R$ , а  $c_p$  не зависит от  $I$ . Через  $L_p(R, \rho)$  обозначаем, как обычно, банахово пространство всех измеримых на  $R$  функций, суммируемых в степени  $p$  с весом  $\rho$ . Если  $z > 0$ , то через  $L_p^z(R, \rho)$  обозначаем линейал всех целых функций экспоненциального типа  $\leq z$ , принадлежащих пространству  $L_p(R, \rho)$ .

Вначале приведем сводку результатов относительно пространств  $L_p^z(R, \rho)$ , доказательства которых в случае степенных весов содержатся в работах автора [3], [10]. Минимальный комментарий призван пояснить несущественные различия, появляющиеся при переходе от степенных весов к общим ХМВ-весам.

**Предложение 1.1.** Пусть  $S$  — преобразование Гильберта. Тогда линейал  $L_p^z(R, \rho)$  инвариантен относительно оператора  $S$ .

$\blacktriangleleft$  Прежде всего, оператор  $L$  ограничен в  $L_p(R, \rho)$  [17]. Если  $\rho \equiv 1$ , то линейал  $L_p^z(R)$  лежит в бернштейновском классе  $B_z$  всех целых функций экспоненциального типа  $\leq z$ , ограниченных на  $R$ . Поэтому функции  $f \in L_p^z(R)$  допускают интегральное представление, аналогичное представлению Винера—Пэли со степенным коэффициентом ([18], с. 182), что позволяет применять технику преобразований Фурье.

Переход к случаю  $\rho \in (A_p^R)$  связан с импликацией  $f \in L_p^z(R, \rho) \Rightarrow h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \in L_p^z(R)$ . Доказательство последней сводится к исполь-

зованию неравенства Гельдера и простейших свойств ХМВ-веса [19], в частности, удовлетворяющего условию

$$\int_R |x + i_1^{-p} \rho| < \infty. \blacktriangleright$$

Проекторы  $P^\pm = \frac{1}{2} [I \pm S]$  определяют в  $L_p^\sigma(R, \rho)$  линейалы  $L_p^{\sigma\pm}(R, \rho) = P^\pm(L_p^\sigma(R, \rho))$ . Очевидно, что  $L_p^\sigma(R, \rho) = L_p^{\sigma+}(R, \rho) \oplus \oplus L_p^{\sigma-}(R, \rho)$ . Введем также оператор  $E_\sigma$  умножения на функцию  $\exp[ix\sigma]$ .

Предложение 1.2.  $E_\sigma(L_p^{\sigma-}(R, \rho)) = L_p^{\sigma+}(R, \rho)$ .

В пространстве  $L_p(R, \rho)$  рассмотрим два оператора:

$$A_\sigma = P^+ + \exp[ix\sigma]P^- \text{ и} \\ K_\sigma f = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\exp[it\sigma] - \exp[ix\sigma]}{t - x} f(t) dt. \quad (1.1)$$

Теорема 1.3. Если  $\sigma > 0$ , то оператор  $A_\sigma$  обратим справа и  $\ker A_\sigma = (I - E_\sigma^{-1})(\operatorname{im} K_\sigma) = (I - E_\sigma^{-1})(L_p^{\sigma+}(R, \rho))$ .

Если  $\sigma < 0$ , то оператор  $A_\sigma$  обратим слева и  $\operatorname{im} A_\sigma = \ker K_{|\sigma|} = L_p^+(R, \rho) \oplus E_\sigma(L_p^-(R, \rho))$ ,  $\operatorname{coker} A_\sigma = \operatorname{im} K_\sigma = L_p^{|\sigma|+}(R, \rho)$ .

В обоих случаях  $A_\sigma^{-1} = A_{-\sigma}$ .

◀ Наиболее существенной частью доказательства является установление равенства  $\operatorname{im} K_\sigma = L_p^{\sigma+}(R, \rho)$ , опирающееся на исследование интегрального представления (1.1). Вначале доказывается аналитическая продолжимость функций вида (1.1) через вещественную прямую  $R$ . Тут возможны различные рассуждения, в том числе и аналогичные «принципу устранения особенностей». Второй шаг состоит в получении оценки в окрестности бесконечно удаленной точки. Стандартным путем он сводится к неравенству

$$\sup_{\substack{x \in R \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \left| (x + re^{i\varphi} + i) \frac{\exp[ix\sigma] - \exp[i\sigma re^{i\varphi}]}{x - re^{i\varphi}} \right| \leq ce^{\sigma r},$$

которое доказывается вполне элементарными средствами. ▶

Всюду ниже в этом параграфе  $\sigma > 0$ . Следующие утверждения являются прямым следствием теоремы 1.3.

Предложение 1.4. Линейал  $L_p^\sigma(R, \rho)$  замкнут в метрике пространства  $L_p(R, \rho)$ .

Предложение 1.5.  $L_p^{\pm}(R, \rho) = P^\pm(L_p(R, \rho)) = L_p^{\sigma\pm}(R, \rho) \oplus \oplus E_\sigma^{\pm 1}(L_p^\pm(R, \rho))$ .

Предложение 1.6.  $(L_p^{\sigma\pm}(R, \rho))^* \simeq L_q^{\sigma\pm}(R, \rho^{1-q})$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Определение. Целая функция  $s(z)$  экспоненциального типа  $\sigma$  называется ф.т.с., если она удовлетворяет условиям:

1) все ее нули лежат в горизонтальной полосе

$$|y| < H(z = x + iy);$$

II) неравенство

$$0 < m \leq |s(x + iy)| \leq M < \infty$$

выполняется для некоторого фиксированного значения  $y = y_1$ ;

III) тип  $s(z)$  в верхней и нижней полуплоскостях одинаков.

Относительно множества  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  корней функции  $s(z)$  в дальнейшем будем требовать, чтобы выполнялось условие

$$0 < d_1 \leq |z_k - z_n|, \quad k \neq n.$$

Теореме 1.11 предшествует ряд вспомогательных утверждений.

**Предложение 1.7.** Пусть  $\rho \in (A_p^R)$ . Тогда существует такая функция  $\rho_+(x + iy)$ , аналитическая в полуплоскости  $\Pi_+ = \{z | y > 0\}$ , не обращающаяся там в нуль, и при надлежащем выборе ветви функции  $(x + iy + i)^{-\rho}$  удовлетворяющая условию  $(x + iy + i)^{-\rho} \rho_+(x + iy) \in H_1^+(R)$ , что  $|\rho_+| = \rho$  почти всюду на  $R$ .

◀ По лемме Рохберга—Дынькина [22—23] для любого  $\omega \in (A_p^\Gamma)$ , где  $\Gamma = \{z | |z| = 1\}$ , найдется функция  $\omega^+ \in H_1(\Gamma)$ , отличная от нуля всюду внутри  $\Gamma$  и такая, что  $|\omega^+| = \omega$  почти всюду на  $\Gamma$ . Пусть теперь  $\omega_+(z)$  — соответствующая функция класса  $H_1(\Gamma)$ , определяемая леммой Рохберга—Дынькина для веса  $\omega = |1 - t|^{p-2} \rho \left( i \frac{1+t}{1-t} \right) \in (A_p^R)$ . Тогда искомая функция  $\rho_+(x + iy)$  имеет вид

$$\rho_+(x + iy) = \left( \frac{2i}{x + iy + i} \right)^{2-\rho} \omega_+ \left( \frac{x + iy - i}{x + iy + i} \right).$$

Проверка выполнения всех утверждений леммы для указанной функции вполне элементарна ввиду того, что вес  $\rho$  локально интегрируем и для него выполняется [19] так называемое условие  $(B_p^R)$

$$\int_R \left( 1 + \frac{|x - x_0|}{|I|} \right)^{-p} \rho \leq c_p S_I \rho,$$

где  $x_0$  — центр интервала  $I$ . ▶

Через  $H_{p, \rho}^+$ ,  $1 < p < \infty$ , обозначим банахово пространство функций  $f(z)$ , аналитических в полуплоскости  $\Pi_+$  и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_{p, \rho}^+} = \sup_{y > 0} \left( \int_R |f(x + iy)|^p |\rho_+(x + iy)| dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Аналогично определяется класс  $H_{p, \rho}^-$ . Отождествляя пространства  $H_{p, \rho}^\pm$  с подпространствами  $L_{p, \rho}^\pm(R, \rho)$ , получаем [24], что

$$(H_{p, \rho}^\pm)^* \simeq H_{q, \rho}^\pm, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Предложение 1.8. Пусть  $f \in L_p^\sigma(R, \rho)$ . Тогда для любого  $T \in R$

$$e^{-\sigma|T|} \int_R |f(x+iT)|^p |\rho_+(x+i|T|)| \leq \|f\|_{L_p^\sigma(R, \rho)}^p \leq \\ \leq e^{\sigma|T|} \int_R |f(x+iT)|^p |\rho_+(x+i|T|)|.$$

◀ Если  $f \in L_p^\sigma(R, \rho)$ , то  $\exp[\pm iz\sigma] f(z) \in H_{p, \rho}^\pm$ . Поэтому для любых  $y \in R$

$$\int_R |f(x+iy)|^p e^{-\sigma|y|} |\rho_+(x+i|y|)| dx < \|f\|_p^p.$$

Для доказательства справедливости первого неравенства остается положить  $y=T$ .

Для доказательства второго неравенства введем функцию  $g(z) = f(z+iT) \in L_p^\sigma(R, |\rho_+(x+iT)|)$ ,  $T > 0$ . Тогда  $e^{-iz\sigma} g \in H_{p, \rho}^{\sim-}$ , где  $\rho = |\rho_+(x+iT)|$  и поэтому при  $-T \leq y < 0$

$$\int_R |g(x+iy)|^p e^{\sigma y} |\rho_+(x+i(y+T))| dx \leq \|g\|_p^p.$$

Полагая  $y = -T$ , получаем

$$\|f\|_p^p \leq e^{\sigma T} \int_R |f(x+iT)|^p |\rho_+(x+iT)| dx.$$

Если же  $T < 0$ , то  $g(z) = f(z+iT) \in L_p^\sigma(R, |\rho_+(x-iT)|)$ , и аналогичные рассуждения подтверждают справедливость второго неравенства и в этом случае. ▶

Предложение 1.9. Пусть  $f \in H_{p, \rho}^+$  и  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — последовательность точек, удовлетворяющих условиям:

1)  $0 < h < \operatorname{im} z_k < H < \infty$ ; 2)  $|z_k - z_n| > 2h$ ,  $k \neq n$ . Тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(z_k)|^p |\rho_+(z_k)| \leq c \|f\|_p^p.$$

Предложение 1.10. Пусть  $f \in L_p^\sigma(R, \rho)$  и  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — последовательность точек, удовлетворяющих условиям:

1)  $|\operatorname{im} z_k| < H$ ; 2)  $|z_k - z_n| \geq 2h > 0$ ,  $k \neq n$ . Тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(z_k)|^p |\rho_+(z_k + iT)| \leq c \|f\|_p^p,$$

где  $T = 2 \max\{H + h, 2h\}$ .

Предложения 1.9 и 1.10 являются прямыми следствиями предложения 1.8 и леммы 3 из [12].

Пусть  $s(z)$  — ф. т. с. типа  $\sigma$ ,  $d_1 = 2h$ ,  $T = 2 \max |H + h, 2h|$ . Через  $l_{p, \sigma}(z)$  обозначим банахово пространство последовательностей  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , суммируемых в степени  $p$  с весом  $\delta = \{\delta_k\} = \{|\rho_+(z_k + iT)|\}$ ,  $\|f\| = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^p \delta_k)^{1/p} < \infty$ .

**Теорема 1.11.** Пусть  $\{f_k\} \in l_{p, \sigma}(z)$ . Тогда ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k s(z) [s^{(1)}(z_k) (z - z_k)]^{-1} \quad (1.2)$$

- 1) сходится на  $R$  в норме пространства  $L_p(R, \rho)$ ;
- 2) представляет собой функцию класса  $L_p^\sigma(R, \rho)$ ;
- 3) дает изоморфное отображение пространства  $l_{p, \sigma}(z)$  на пространство  $L_p^\sigma(R, \rho)$ ;
- 4) решает интерполяционную задачу  $f(z_k) = f_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

◀ Так же как и при доказательстве теоремы 2 из [12] получаем, что отрезок ряда (1.2)

$$F_{l, m}(z) = \sum_{k=-l}^m f_k s(z) [s^{(1)}(z_k) (z - z_k)]^{-1}$$

оценивается следующим образом:

$$\|F_{l, m}\| \leq c \|\varphi\|_{H^+, \rho},$$

где функция  $\varphi(z) = \sum_{k=-l}^m f_k [z + iH - z_k]^{-1} \in H_{\rho, \rho}^+$  при достаточно больших значениях  $H > 0$ . Далее

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup_{\psi} \left| \int_R \varphi \bar{\psi} \right| \leq 2\pi \sup_{\psi} \left| \sum_{k=-l}^m \bar{f}_k \psi(\bar{z}_k + iH) \right| \leq \\ &\leq 2\pi \left( \sum_{k=-l}^m |f_k|^p |\rho_+(z_k + iT)| \right)^{1/p} \cdot \\ &\cdot \sup_{\psi} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi(\bar{z}_k + iH)|^q |\rho_+(z_k + iT)|^{1-q} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

где  $\sup$  берется по всем функциям  $\psi \in H_{q, \rho_1}^{1-q}(\Pi_+)$  таким, что  $\|\psi\| = 1$ ,

$\rho_1 = |\rho_+(x + iT)|$ . Покажем, что

$$\sup_{\psi} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi(\bar{z}_k + iH)|^q |\rho_+(z_k + iT)|^{1-q} \right)^{1/q} \leq c < \infty.$$

Для этого положим  $H = \frac{T}{2}$ . Очевидно, что множество точек  $\{z_k\}$  и

$\{\bar{z}_k\}$  лежит в полосе  $|\operatorname{Im} z| < \frac{T}{2}$ . Функция  $|\rho_+(x - iy + iT)|^{1-q}$  субгар-

монична в этой полосе так же как и функция  $\left| \psi \left( x + iy + i \frac{T}{2} \right) \right|^q$

([25], с. 43). Отсюда как и выше получаем, что

$$\sum_{k \in Z} \left| \psi \left( \frac{z_k + iT}{2} \right) \right|^q |p_+(z_k + iT)|^{1-q} \leq c \int_R \left| \psi(x) \right|^q \left| p_+ \left( x + i \frac{T}{2} \right) \right|^{1-q} dx \leq c \|\psi\|^q < \infty.$$

Таким образом,  $\|\varphi\| \leq c \left( \sum_{k=1}^m |f_k|^p |p_+(z_k + iT)| \right)^{1/p}$ , откуда следует сходимость ряда (1.2) в пространстве  $L_p(R, \rho)$ .

Второе утверждение теоремы является следствием предложения 1.4.

Таким образом, ряд (1.2) осуществляет линейное непрерывное отображение пространства  $l_{p, \delta}(Z)$  в пространство  $L_p^{\sigma}(R, \rho)$ . Нам осталось доказать обратимость этого отображения. Для этого покажем, что любая функция  $f \in L_p^{\sigma}(R, \rho)$  разлагается в ряд (1.2), где  $f_k = f(z_k)$ . Обозначим функцию, определяемую этим рядом, через  $g$ . В силу предложения 1.10  $\{f(z_k)\} \in l_{p, \delta}(Z)$ . Поэтому  $g \in L_p^{\sigma}(R, \rho)$ . Так как  $z^{-1}(g(z) - g(0)) \in B_{\sigma}$ , то ([18], с. 184)  $|g(z)| \leq \lambda_1 |z| e^{\sigma|y|} + |g(0)|$ . Аналогично  $|f(z)| \leq \lambda_2 |z| e^{\sigma|y|} + |f(0)|$ . Для доказательства равенства  $f = g$  рассмотрим целую функцию  $\psi = s^{-1}(f - g)$ . Повторяя с соответствующими изменениями рассуждения, использованные в теореме 3 из [12], получаем, что в силу обобщенного принципа Лиувилля  $\psi$  является линейной функцией. Но  $\psi s \in L_p(R, \rho)$ , где  $s \in B_{\sigma}$ , поэтому  $\psi \equiv 0$ . ►

Теорема 1.11 дает описание целого класса базисов в пространстве  $L_p^{\sigma}(R, \rho)$ , не зависящих от  $1 < p < \infty$  и  $\rho \in (A_p^R)$ . При описании аналогичных базисов в подпространствах  $L_p^{\sigma \pm}(R, \rho)$  оказывается полезным следующее элементарное предложение 1.12, дающее способ их построения на основе ф. т. с., имеющих как тот же самый тип  $\sigma$ , так и тип  $\sigma_1 < \sigma$ .

**Предложение 1.12.** Пусть положительные числа  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$  и  $a$  удовлетворяют соотношению  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{a} = \frac{\sigma}{2}$ . Тогда операторы  $E_{\pm}^{\pm 1}$ ,

действующие по формуле  $(E_{\pm}^{\pm 1} f)(x) = e^{\pm i x \sigma_2} f\left(\frac{x}{a}\right)$ , осуществляют

изоморфизм пространства  $L_p^{\sigma_1}(R, \rho)$  на пространство  $L_p^{\sigma \pm}(R, \rho_1)$ , где  $\rho_1 = \rho(ax)$ .

В качестве следствия этого предложения получаем следующее утверждение о базисах в  $L_p^{\sigma \pm}(R, \rho)$ .

**Предложение 1.13.** Пусть числа  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$  и  $a$  удовлетворяют условиям предложения 1.12, а ф. т. с.  $s(z)$  имеет тип  $\sigma$  и подчинена условиям теоремы 1.11. Тогда следующая система функций:

$$e_k^{\pm}(z) = \frac{a \exp[\pm i(z - az_k) \sigma_2] s\left(\frac{z}{a}\right)}{s^{(1)}(z_k)(z - az_k)}, \quad k \in Z, \quad (1.3)$$

образует базис, соответственно, в пространстве  $L_p^{\sigma \pm}(R, \rho)$ . Коэффициенты  $f_k$  разложения функции  $f \in L_p^{\sigma \pm}(R, \rho)$  по этому базису принадлежат пространству  $l_{p, \delta}(Z)$ , где  $\delta = \{\delta_k\} = \{|p_+(az_k + iT)|\}$ , и

решают интерполяционную задачу  $f^{\pm}(\zeta_k) = f_k$  на множестве  $\{\zeta_k\} = \{a z_k\}_{k \in Z}$ .

◀ Пусть  $g \in L_p^{\pm}(R, \rho_1)$ . По теореме 1.11

$$g = \sum_k g(z_k) = \frac{s(z)}{s^{(1)}(z_k)(z - z_k)}.$$

Действуя на обе части этого равенства оператором  $E_{\sigma}^{\pm 1}$ , переходим в пространство  $L_p^{\pm}(R, \rho)$  и получаем, что

$$\begin{aligned} f^{\pm} = E_{\sigma}^{\pm 1} g &= \sum_k g(z_k) \frac{a \exp[\pm i z \sigma_2] s\left(\frac{z}{a}\right)}{s^{(1)}(z_k)(z - a z_k)} = \\ &= \sum_k f^{\pm}(\zeta_k) \frac{s_1^{\pm}(z)}{s_1^{\pm(1)}(\zeta_k)(z - \zeta_k)} = \sum_k f^{\pm}(\zeta_k) e_k^{\pm}(z), \end{aligned}$$

где  $s_1^{\pm}(z) = \exp[\pm i z \sigma_2] s\left(\frac{z}{a}\right)$ ,  $s_1^{\pm(1)}(\zeta_k) = a^{-1} \exp[\pm i \zeta_k \sigma_2] s^{(1)}(z_k)$ . Остается показать, что  $|f^{\pm}(\zeta_k)| \in l_{p, \delta}(Z)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_k |f_k|^p \delta_k &= \sum_k |g(z_k) \exp[\pm i \zeta_k \sigma_2]|^p \delta_k = \\ &= \sum_k |g(z_k)|^p \exp[\pm a \rho \sigma_2 \operatorname{Im} z_k] \delta_k \leq \|g\|_{l_{p, \delta}}, \end{aligned}$$

поскольку множество  $\{z_k\}$  лежит в полосе  $|y| \leq H$ . ▶

Отметим, наконец, что формулы (1.3) содержат в себе специальный биортогональный базис, являющийся изометрическим образом тригонометрической системы. Полагая в (1.3)  $s(z) = \exp\left[\pm \frac{iz\sigma}{2}\right] - \exp\left[\mp \frac{iz\sigma}{2}\right]$ ,

$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$ ,  $a = 1$ , и нормируя получившуюся систему функций, имеем следующий базис в  $L_p^{\pm}(R, \rho)$ :

$$e_k^{\pm} = (2\pi\sigma)^{-\frac{1}{2}} \frac{\exp[\pm i x \sigma] - 1}{x - 2\pi k \sigma^{-1}}, \quad k \in Z. \quad (1.4)$$

Поскольку  $e_k^{\pm} \in L_2(R)$ , то биортогональность системы (1.4) доказывается применением преобразования Фурье.

## § 2. Счетное множество разрывов

Пусть  $Z = Z \cup \{\infty\}$ ,  $X = \{x_n, n \in Z\}$  — произвольная возрастающая последовательность вещественных чисел при стремлении  $n$  от  $-\infty$  к  $+\infty$ . Пусть далее  $\{\sigma_n, n \in Z\}$  — произвольная последовательность неотрицательных вещественных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{x_n \neq 0} \frac{\sigma_n}{|x_n|} < \infty. \quad (2.1)$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\omega^+(x) = \exp \left[ i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sigma_n}{x_n - x} \right], \quad (2.2)$$

которая определена всюду на множестве  $R \setminus X$ . Действительно, пусть для простоты  $x_n \neq 0$  и  $x_k < \tilde{x} < x_{k+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\sigma_n}{x_n - \tilde{x}} &= \sum_n \frac{\sigma_n}{x_n} + \sum_n \frac{\sigma_n \tilde{x}}{x_n (x_n - \tilde{x})} = \sum_n \frac{\sigma_n}{x_n} + \\ &+ \tilde{x} \left( \sum_{n \leq k} + \sum_{n \geq k+1} \right) \frac{\sigma_n}{x_n (x_n - \tilde{x})} \leq \left[ 1 + |\tilde{x}| \left( \frac{1}{x - x_k} + \frac{1}{x_{k+1} - \tilde{x}} \right) \right] \times \\ &\times \sum_n \frac{|\sigma_n|}{|x_n|} < \infty. \end{aligned}$$

Кроме того,  $\omega^+ \in H_-^+(R)$ , т. к.  $\operatorname{Re} \exp \left[ \frac{i\sigma_n}{x_n - x - iy} \right] = \exp \left[ \frac{-\sigma_n y}{(x_n - x)^2 + y^2} \right]$ ,  $|\omega^+(x + iy)| \leq 1$  при  $y > 0$ .

Введем обозначение  $\omega_n(x) = \exp \lambda_n(x)$ ,  $\lambda_n(x) = i\sigma_n(x_n - x)^{-1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , и рассмотрим операторы  $A = P^+ + \omega^- P^-$ ,

$$\begin{aligned} (Kf)(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\omega^+(t) - \omega^+(x)}{t - x} f(t) dt, \quad (K_n f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_R \frac{\omega_n(t) - \omega_n(x)}{t - x} f(t) dt. \end{aligned}$$

**Теорема 2.1.** В пространстве  $L_p(R, \rho)$  справедливо следующее операторное равенство:

$$K = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \sum_{k < n} \lambda_k \cdot K_n \cdot \exp \sum_{k > n} \lambda_k \cdot I, \quad (2.3)$$

где ряд, стоящий справа, сходится сильно.

◀ Поскольку операторы  $A$  и  $K$  связаны равенством  $K = P^+ A - P^-$ , то оператор  $K$  ограничен в пространстве  $L_p(R, \rho)$  а  $\operatorname{im} K \subset L_p^+(R, \rho)$ . Аналогичными свойствами обладают операторы  $K_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Введем также оператор

$$T_{j, m} = \sum_{n=-j}^m \exp \sum_{k < n} \lambda_k \cdot K_n \cdot \exp \sum_{k > n} \lambda_k \cdot I$$

и покажем, что  $\|T_{j, m}\| \leq c$ , где  $c$  не зависит от  $j, m$ . Кроме того, для любой функции  $f \in L_p(R, \rho)$  последовательность  $Kf \rightarrow T_{j, m} f$  при  $j, m \rightarrow \infty$  почти всюду на  $R$ . Поскольку  $Kf - T_{j, m} f \in L_p^+(R, \rho)$ , то по теореме Г. Ц. Тумаркина ([26], с. 268) ряд (2.3) будет сходиться сильно.

В самом деле

$$\begin{aligned}
 (T_{j,m}f)(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_R \sum_{n=-j}^m \left( \exp \left[ \sum_{k < n} \lambda_k(x) + \sum_{k > n} \lambda_k(t) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \exp \left[ \sum_{k < n} \lambda_k(x) + \sum_{k > n} \lambda_k(t) \right] \frac{f(t)}{t-x} dt = \right. \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_R \left( \exp \left[ \sum_{k < -j} \lambda_k(x) + \sum_{k > -j} \lambda_k(t) \right] - \exp \left[ \sum_{k < m} \lambda_k(x) + \sum_{k > m} \lambda_k(t) \right] \right) \frac{f(t)}{t-x} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \exp \sum_{k < -j} \lambda_k \cdot S \cdot \exp \sum_{k > -j} \lambda_k \cdot f - \frac{1}{2} \exp \sum_{k < m} \lambda_k \cdot S \cdot \exp \sum_{k > m} \lambda_k \cdot f.
 \end{aligned}$$

Поэтому  $|T_{j,m}f| \leq |Sf| \leq c\|f\|$ , где  $c$  не зависит от  $j, m$ . Далее

$$\begin{aligned}
 2\pi i (K - T_{j,m})f &= \int_R \frac{\exp \sum_{k < -j} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k < -j} \lambda_k(x)}{t-x} \exp \sum_{k > -j} \lambda_k(t) \cdot f(t) dt - \\
 &\quad - \exp \sum_{k < m} \lambda_k(x) \int_R \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} f(t) dt.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пусть  $x \in X$ . Рассмотрим функцию

$$F_m(x) = \int_R \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} f(t) dt$$

и покажем, что  $|F_m(x)| \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Для этого, прежде всего, определим такое  $N$ , что

$$|F_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{-N}^N \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} f(t) dt \right|$$

равномерно по  $m$ . Для этого введем характеристическую функцию  $1_M$  множества  $M = (-\infty, -N) \cup (N, \infty)$  и проведем следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_M \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} f(t) dt \right| \leq \\
 &\leq \|1_M f\| \left( \int_M \left| \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} \right|^q \rho^{1-q}(t) dt \right)^{1/q} \leq \\
 &\leq \|1_M f\| \left( \sup_M \left| \frac{\exp \sum_{k > m} \lambda_k(t) - \exp \sum_{k > m} \lambda_k(x)}{t-x} (t+i) \right|^q \right)^{1/q} \left( \int_M \frac{\rho^{1-q}(t)}{|t+i|^q} dt \right)^{1/q} \leq \\
 &\leq 2 \|1_M f\| \left( \int_M \rho^{1-q}(t) |t+i|^{-q} dt \right)^{1/q} \quad \text{для } N > 2|x| + 1.
 \end{aligned}$$

Увеличив, если это нужно,  $N$  и зафиксировав его, получаем далее, что

$$\begin{aligned}
 |F(x)| &\leq \left| \sum_{k>m} \exp \sum_{j=m+1}^{k-1} \lambda_j(x) \int_{-N}^N \frac{\exp \lambda_k(t) - \exp \lambda_k(x)}{t-x} \times \right. \\
 &\times \exp \sum_{j>k} \lambda_j(t) \cdot f(t) dt \left. + \frac{\varepsilon}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k>m} \int_{-N}^N \left| \frac{\exp [\lambda_k(t) - \lambda_k(x)] - 1}{t-x} \right| |f(t)| dt \leq \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + W \left( \int_R |t^{1-q}(t)| |t+i|^{-q} dt \right)^{1/q} \sum_{k>m} \left( \sup_{|t|<N} \left| \frac{t+i}{t-x} \right| \times \right. \\
 &\times \left. \sin \frac{\sigma_k(t-x)}{2(x_k-t)(x_k-x)} \right)^{1/q} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \\
 &+ c \sum_{k>m} \left( \sup_{|t|<N} \left| \frac{\sigma_k(t+i)}{2(x_k-t)(x_k-x)} \right|^q \right)^{1/q} \leq \frac{\varepsilon}{2} + c \sum_{k>m} \frac{\sigma_k}{|x_k|} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

для достаточно больших значений  $m$ .

Аналогично доказывается, что при  $j \rightarrow \infty$  первое слагаемое в равенстве (2.4) стремится к нулю. ►

Перейдем к описанию базисов в подпространстве  $K(L_p(R, \rho))$ . Следующее предложение устанавливает связь между этим вопросом и результатами предыдущего параграфа. Пусть  $\varepsilon_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Предложение 2.2.** *Оператор  $K_n$  в пространстве  $L_p(R, \rho)$  подобен оператору  $K_{\varepsilon_n}$  вида (1.1) (с заменой там  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_n$ ) в пространстве  $L_p(R, \rho_n)$ , где  $\rho_n(t) = |t|^{\sigma-2} \rho(x_n - t^{-1})$ , т. е.  $K_n = T_n K_{\varepsilon_n} T_n^{-1}$ , где*

$$(T_n f)(x) = (x_n - x)^{-1} f((x_n - x)^{-1}), \quad (T_n^{-1} g)(t) = t^{-1} g(x_n - t^{-1}).$$

◀ Поскольку оператор  $T_n^{-1}$  осуществляет изоморфизм пространства  $L_p(R, \rho)$  на пространство  $L_p(R, \rho_n)$  и  $T_n S = S T_n$  [10], то утверждение предложения является следствием формулы  $K_n = P^+ (\omega_n - 1) P^-$ . ►

Теперь мы можем описать базисы в подпространстве  $K_n(L_p(R, \rho))$ .

Пусть  $s_n(z)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , ф. т. с. типа  $\frac{\sigma_n}{2}$ , все корни которой  $z_{nj}$  лежат в полосе ширины  $H_n$ , и расстояние между которыми превышает  $2h_n$ ,  $T_n = 2 \max \{H_n + h_n, 2h_n\}$ . Пусть далее  $l_{p, \varepsilon_n}(Z)$  — пространство последовательностей, суммируемых в степени  $p$  с весом  $\delta_n = \{\delta_{nj}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , где  $\delta_{nj} = |\rho_n + (z_{nj} + iT_n)|$ , а функция  $\rho_n(z)$  определена предложением 1.7 с заменой  $\rho$  на  $\rho_n$ . Полагая в предложении 1.12  $\alpha = 1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$ ,  $\sigma = \sigma_n$ , получаем, что система функций

$$e_{nj}^+(z) = \frac{\exp \left[ \frac{i}{2} (z - z_{nj}) \varepsilon_n \right] s_n(z)}{\frac{1}{n} (z_{nj}) (z - z_{nj})}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

образует базис в пространстве  $L_p^{z_n+}(R, \rho_n)$ , а коэффициенты разложения по этому базису принадлежат пространству  $L_{p, z_n}(Z)$ . Применяя к системе функций  $\{e_{nj}^+\}$  оператор  $T_n$ , в силу предложения 2.2 получаем такое утверждение.

**Предложение 2.3.** Следующая система функций образует базис в пространстве  $K_n(L_p(R, \rho))$

$$e_{nj}^+(x) = \frac{\exp\left[\frac{i}{2}(x_n - x)^{-1} - z_{nj}\right] s_n((x_n - x)^{-1})}{s_n^{(i)}(z_{nj})(1 - z_{nj}(x_n - x))}, \quad j \in Z. \quad (2.6)$$

Коэффициенты разложения по этому базису принадлежат пространству  $L_{p, z_n}(Z)$ , где

$$\delta_n = \{\delta_{nj}\}_{j \in Z} = \{|\rho_n(z_{nj} + iT_n)|\}_{j \in Z}. \quad (2.7)$$

**Замечание.** Используя представление внешних в смысле Бьелинга функций в виде экспоненты от интеграла Шварца ([24], с. 92), для функций  $\rho_{n+}(z)$  можно получить явное выражение.

Пусть  $M = Z \times Z$ ,  $s = (n, j) \in M$ . Рассмотрим систему функций:  $\{e_s^+\}_{s \in M} \subset L_p^+(R, \rho)$  следующего вида:

$$e_s^+ = \begin{cases} e_{-j}^+, & s = (\infty, j), j \in Z, \\ \exp[i\sigma_- x] \cdot \prod_{k < n} \exp \lambda_k \cdot e_{nj}^+, & s = (n, j), n, j \in Z, \end{cases} \quad (2.8)$$

где  $e_{nj}^+$  имеет вид (2.6) для  $n \in Z$  и вид (2.5) для  $n = \infty$ .

**Теорема 2.4.** Оператор  $A = P^+ + \omega^+ P^-$ , где  $\omega^+ = \exp(i\sigma_- x) \omega^+$ , а  $\omega^+$  имеет вид (2.2), непрерывно обратим справа в пространстве  $L_p(R, \rho)$ . Один из его правых обратных операторов имеет вид  $A^{-1} = P^+ + (\omega^+)^{-1} P^-$ . Кроме того,  $\dim \ker A = \infty$ , а система функций  $\{(1 - (\omega^+)^{-1}) e_s^+\}_{s \in M}$ , где  $e_s^+$  имеет вид (2.8), образует в  $\ker A$  базис.

В доказательстве нуждается лишь утверждение о подпространстве  $\ker A$ . Вначале покажем, что  $\ker(P^+ + \omega^+ P^-) = (1 - (\omega^+)^{-1}) \operatorname{im} K$ . Заметив, что  $\omega^- = (\omega^+)^{-1} \in H_-^-(R)$ , положим  $\varphi = Kf$ . Очевидно,  $\varphi \in L_p^+(R, \rho)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \omega^- \varphi &= -\frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\omega^-(t) - \omega^-(x)}{t - x} \omega^+(t) f(t) dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\omega^-(t) - \omega^-(x)}{t - x} g^+(t) dt = -\frac{1}{2} S \omega^- g^+ + \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega^- g^+ = P^- \omega^- g^+, \end{aligned}$$

где  $g^+ = P^+[\omega^+ f]$ , т. е.  $\omega^- \operatorname{im} K \subset L_p^-(R, \rho)$ . Отсюда следует вложение  $(1 - \omega^-) \operatorname{im} K \subset \ker(P^+ + \omega^+ P^-)$ . Пусть теперь  $\varphi \in \ker(P^+ + \omega^+ P^-)$ . Тогда

$$\begin{aligned}\varphi^+ &= P^+ \varphi = -\omega^+ \varphi^- = -\frac{1}{2} \omega^+ \varphi^- - \frac{1}{2} S \omega^+ \varphi^- = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\omega^+(t) - \omega^+(x)}{t - x} \varphi^-(t) dt,\end{aligned}$$

т. е.  $\varphi^+ \in \text{im } K$ . В силу предыдущего  $\varphi^- = -(\omega^+)^{-1} \varphi^+ \in L_p^-(R, \rho)$ , т. е.  $\varphi \in (1 - (\omega^+)^{-1}) \text{im } K$  и  $\ker (P^+ + \omega^+ P^-) \subset (1 - \omega^-) \text{im } K$ .

Теперь покажем, что

$$\ker A = (1 - (\omega^+)^{-1}) (L_p^{\sigma+}(R, \rho) \oplus E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K)). \quad (2.9)$$

Здесь  $\oplus$  — знак прямой суммы. Действительно, оператор  $A$  допускает разложение в композицию

$$A = (P^+ + E_{\sigma_{\infty}} P^-) (P^+ + \omega^+ P^-) (I - (I - E_{\sigma_{\infty}}) P^+ \omega^+ P^-), \quad (2.10)$$

где оператор, стоящий справа, непрерывно обратим и  $(I - (I - E_{\sigma_{\infty}}) P^+ \omega^+ P^-)^{-1} = I + (I - E_{\sigma_{\infty}}) P^+ \omega^+ P^-$ . Элементарными рассуждениями из равенства (2.10) получаем с учетом теоремы 1.3, что  $P^-(\ker A) = -(\omega^+)^{-1} \text{im } K - (\omega^+)^{-1} L_p^{\sigma+}(R, \rho)$ . Поэтому  $P^+(\ker A) = -\omega^+$ .

$P^-(\ker A) = L_p^{\sigma+}(R, \rho) + E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K)$  и  $\ker A = (1 - (\omega^+)^{-1}) (L_p^{\sigma+} \times \times (R, \rho) + E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K))$ . Осталось показать, что сумма в последнем равенстве прямая. Поскольку  $\text{im } K = P^+(\ker (P^+ + \omega^+ P^-))$ , то линейал  $E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K)$  замкнут. Если предположить, что  $f \in L_p^{\sigma+}(R, \rho) \cap E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K)$ , то  $f = 0$ , так как из  $f \in L_p^{\sigma+}(R, \rho)$  следует, что  $E_{\sigma_{\infty}}^{-1} f \in L_p^-(R, \rho)$ , в то время как  $\text{im } K \subset L_p^+(R, \rho)$ . Таким образом, формула (2.9) доказана.

Из теоремы 2.1 следует, что

$$\begin{aligned}M^+(X) &= L_p^{\sigma+}(R, \rho) \oplus E_{\sigma_{\infty}}(\text{im } K) = \\ &= L_p^{\sigma+}(R, \rho) \oplus E_{\sigma_{\infty}} \left( \sum_{j \in Z} \left( \prod_{k < j} \exp \lambda_k \right) \cdot \text{im } K_j \right).\end{aligned}$$

Покажем, что в этом равенстве знак  $\Sigma$  можно заменить на  $\oplus$ . Нам достаточно проверить, что для всех  $j \in Z$

$$\left( \prod_{k < j} \exp \lambda_k \right) \cdot \text{im } K_j \cap \overline{M_j^+(X)} = \{0\},$$

где  $M_j^+(X) = \sum_{\substack{n \in Z \\ n > j}} \prod_{k < n} \exp \lambda_k \cdot \text{im } K_n$ . Пусть  $f \in \left( \prod_{k < j} \exp \lambda_k \right) \cdot \text{im } K_j \cap \overline{M_j^+(X)}$ .

Тогда существует последовательность  $[f_s] \subset M_j^+(X)$ , сходящаяся к  $f$ . Функция  $f_j^+ = \exp \left( - \sum_{k < j} \lambda_k \right) \cdot f \in \text{im } K_j \subset L_p^+(R, \rho)$ . Поэтому  $g_j^+ = P^+$ .

$\exp \left[ - \sum_{k < j} \lambda_k \right] f_s \rightarrow f_j^+$ . Поскольку

$$\begin{aligned}g_s^+ &\in \text{im } \sum_{n > j} \exp \sum_{k < n} \lambda_k \cdot K_n = \\ &= \exp \left[ \sum_{k < j} \lambda_k \right] \cdot P^+(\ker (P^+ + \prod_{k < j} \omega_k \cdot P^-)),\end{aligned}$$

а последнее множество замкнуто, то вопрос сведен к равенству  $\text{im } K_l \cap \text{im } \sum_{n \geq j} \exp \sum_{k < n} \lambda_k \cdot K_n = \{0\}$ , которое доказывается аналогично формуле (2.9).

Учитывая предложение 2.2 и теорему 1.3, получаем, что

$$M^+(X) = L_p^{x+}(R, \rho) \oplus E_{\infty} \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \left( \prod_{k < n} \exp \lambda_k \right) T_n (L_p^{x+}(R, \rho_n)) \right),$$

откуда в силу предложения 2.3 получаем справедливость утверждения теоремы относительно базиса в  $\ker A$ . ►

Как обычно (см., напр., [28], с. 406), проблема коэффициентов разложения функции  $\varphi \in M^+(X)$  по базису (2.8) сложнее вопроса описания самого базиса. Здесь мы остановимся лишь на двух частных случаях.

Пусть вначале  $p = 2$ ,  $\rho \equiv 1$ . Тогда стандартная техника гильбертова пространства приводит к такому результату.

**Предложение 2.5.** Если  $L_p(R, \rho) = L_2(R)$ , то система функций (2.8), где

$$e_{nj}^+ = (2\pi\sigma_n)^{-\frac{1}{2}} \frac{\exp[i\sigma_n x] - 1}{x - 2\pi j\sigma_n^{-1}}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$e_{nj}^+ = (2\pi\sigma_n)^{-\frac{1}{2}} \frac{\exp[i\sigma_n(x_n - x)^{-1}] - 1}{1 - 2\pi j\sigma_n^{-1}(x_n - x)}, \quad n, j \in \mathbb{Z},$$

образует ортогональный базис в пространстве  $M^+(X)$ .

Для того, чтобы  $\varphi \in M^+(X)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi = \sum_{s \in A} c_s e_s^+, \quad \text{где} \quad \sum_{s \in A} |c_s|^2 < \infty.$$

► Коснемся лишь ортогональности базиса. Пусть вначале  $s_1 = (n, j)$ ,  $s_2 = (m, k)$ , где  $n \neq \infty$ ,  $m \neq \infty$ ,  $n \neq m$ . Тогда по теореме Коши

$$\begin{aligned} & \langle e_{s_1}^+, e_{s_2}^+ \rangle = \\ &= c \int_R \exp[i\sigma_n x] \prod_{r < n} \exp \lambda_r \cdot e_{nj}^+ \cdot \overline{\exp[i\sigma_m x] \prod_{r < m} \exp \lambda_r \cdot e_{mk}^+} = \\ &= c \left\{ \begin{aligned} & \int_R \prod_{m < r < n} \exp \lambda_r \cdot e_{nj}^+ \cdot \overline{\exp \lambda_m \cdot e_{mk}^+}, \quad n > m, \\ & \int_R \exp[-\lambda_n] e_{nj}^+ \cdot \overline{\prod_{n < r < m} \exp \lambda_r \cdot e_{mk}^+}, \quad n < m \end{aligned} \right\} = 0, \end{aligned}$$

так как  $\exp \lambda_m \cdot e_{mk}^+ \in L_2^+(R)$ ,  $\exp[-\lambda_m] e_{nj}^+ \in L_2^-(R)$ . Для  $n = \infty$  или  $m = \infty$  доказательство аналогично. Если же  $m = n$ , то

$$\langle e_{s_1}^+, e_{s_2}^+ \rangle = \int_R e_{nj}^+ \overline{e_{nk}^+} = \delta_{kj}, \quad k, j \in \mathbb{Z},$$

поскольку операторы  $T_n$  сохраняют в  $L_2(R)$  скалярное произведение. ►

Пусть теперь  $\alpha_n = 0$  для  $n \notin [n_1, n_2]$ ,  $n_1 < n_2$ , т. е. мы имеем дело лишь с конечным числом СПП-разрывов. Результаты этого паракрафа сохраняют силу. При этом  $M = [n_1, n_2] \times Z$ ,  $X = \{x_n, n_1 \leq n \leq n_2\}$ ,

$$M^+(X) = \bigoplus_{n=n_1}^{n_2} \left( \prod_{n_1 \leq k \leq n_2} \exp \lambda_k \right) T_n(L_p^{s_n+}(R, \rho_n)). \quad (2.11)$$

Введем пространство  $l_{p, \delta}(M)$  всех последовательностей  $\{c_s\}_{s \in M}$ , суммируемых на  $M$  в степени  $p$  с весом  $\delta = \{\delta_n\}_{n=n_1}^{n_2}$  вида (2.7)

$$\| \{c_s\} \| = \left( \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{j \in Z} |c_{nj}|^p \delta_{nj} \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть  $\varphi \in M^+(X)$ . Тогда ([29], с. 46)  $\|\varphi\| \asymp \sum_{n=n_1}^{n_2} \|\varphi_n\|$ , где  $\varphi_n$  — проекция  $\varphi$  на  $n$ -ое подпространство прямой суммы (2.11). В силу предложений 1.13 и 2.3  $\|\varphi_n\| \asymp (\sum_{j \in Z} |c_{nj}|^p \delta_{nj})^{1/p}$ , где  $c_{nj}$  — коэффициенты разложения функции  $\varphi_n$  по базису (2.6). Поэтому  $\|\varphi\| \asymp \| \{c_s\} \|$ , и мы получаем, что справедливо следующее утверждение.

**Предложение 2.6.** В условиях теоремы 2.4, где  $\omega^+ = \prod_{n_1}^{n_2} \exp \lambda_n$ , система функций

$$e_s^+ = \prod_{n_1 \leq k \leq n_2} \exp \lambda_k \cdot e_{nj}^+, \quad s = (n, j), \quad n \in [n_1, n_2], \quad j \in Z,$$

образует в  $\ker A$  базис. Для того, чтобы  $\varphi \in \ker A$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\varphi = \sum_{s \in M} c_s e_s^+$ , где  $\{c_s\} \in l_{p, \delta}(M)$ .

Ростовский-на-Дону государственный  
университет

Поступила 20. VII. 1984

Վ. Բ. ԴԻԲԻՆ. Հաշվելի բովո՛ւ Լգալիւթյուններ ունեցող անալիթիկ ֆունկցիաների տարածություններում բազիսների վերաբերյալ (ամփոփում)

Հաշվելի է  $\rho$ . Ցա. Լիւնի թեորեմը էքսպոնենցիալ տիպի  $f(x)$ ,  $x \in C^1$ ,  $f(x) \in L_p(R)$ ,  $1 < p < \infty$  ամբողջ ֆունկցիաների բազիսների մասին: Այդ թեորեմը տարածվում է  $f(x) \in L_p \times \times (R, \rho)$ ,  $\rho \in A_p$  դեպքի վրա: Արդյունքը կիրառվում է  $A$  օպերատորի կորիզի բնութագրման խնդրում, որտեղ  $A$ -ն սինգուլյար օպերատոր է  $R$ -ի վրա, որի գործակիցներն ունեն հաշվելի բովո՛ւ համարյա պարբերական թռիչքներ:

#### V. B. DYBIN. Bases in analytic function spaces with a countable number of singular points (summary)

There is a well known B. Ya. Levin theorem concerning bases in the space of exponential type entire functions  $f(x)$ ,  $x \in C^1$ ,  $f(x) \in L_p(R)$ ,  $1 < p < \infty$ . This theorem is extended to the case  $f(x) \in L_p(R, \rho)$  with  $\rho \in A_p$ . An application is given to the characterization of  $\ker A$ ,  $A$  being a singular integral operator on  $R$  with the coefficients admitting a countable set of almost-periodic jumps.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, А. А. Семенчул. Теплицевы матрицы, составленные из коэффициентов Фурье функций с разрывами почти-периодического типа, Матем. исследования, Кишинев, 1970, т. 4, 63—83.
2. А. А. Семенчул. О сингулярных интегральных уравнениях с коэффициентами, имеющими разрывы почти-периодического типа, Матем. исследования, Кишинев, 1971, т. 6, в. 3 (21), 92—114.
3. В. Б. Дыбин. О сингулярном интегральном операторе на вещественной оси с почти-периодическими коэффициентами, Сб. «Теория функций, диф. ур-ия и их прилож.», Элжста, 1976, 98—108.
4. С. М. Грудский, В. Б. Дыбин. Красная задача Римана с разрывами почти-периодического типа у ее коэффициента, ДАН СССР, 1977, т. 237, № 1, 21—24.
5. С. М. Грудский, В. Б. Дыбин. Красная задача Римана в пространстве  $L_p(\Gamma, \rho)$  с почти-периодическими разрывами у ее коэффициента, Математ. исследования, Кишинев, 1980, в. 54, 36—49.
6. С. М. Грудский. Класс особых случаев красной задачи Римана, порождающих одно-сторонние обратимые сингулярные интегральные операторы, Ростов н/Д, 1980, деп. в ВИНТИ, № 2339-80 и № 2340-80.
7. С. М. Грудский. Красная задача Римана с бесконечным индексом в классах суммируемых функций, Автореферат диссертации, Ростов н/Д, РГУ, 1981.
8. В. Б. Дыбин, Г. В. Додохова. Корректная постановка красной задачи Римана на прямой с почти-периодическим разрывом коэффициента, Сб. «Мат. анализ и его прилож.», изд. РГУ, Ростов н/Д, 1982, 12—22.
9. В. Б. Дыбин, Г. В. Додохова. Корректная постановка красной задачи Римана на замкнутом контуре в случае почти-периодических разрывов у ее коэффициента, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1983, XVIII, № 5, 380—393.
10. В. Б. Дыбин. Корректные постановки красной задачи Римана при стандартных почти-периодических разрывах у ее коэффициента, Math. Nachr., т. 120, 1985.
11. М. М. Джрбашян. Разложение по системе рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1967, т. 2, № 1, 3—51.
12. Б. Я. Левин. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа, Сб. «Матем. физика, функц. анализ», ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1969, 1, 136—146.
13. М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаэлян. О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов  $L_p$ , ДАН Арм.ССР, 73, 1, 29—36.
14. Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов Харди  $H_p$  ( $1 < p < \infty$ ), Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1973, т. 8, № 6, 429—450.
15. Н. К. Никольский, П. С. Павлов, С. В. Хрущев. Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер, I—IV, препринты ЛОМИ, P-8-80-P-11-80, Ленинград, 1980.
16. С. Г. Рафаэлян. Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1983, 18, 3, 167—186.
17. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform, Trans. Amer. Soc., 1973, 176, 227—251.
18. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации, М., «Наука», 1965.
19. Е. М. Дынкин, Б. П. Осиленкер. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения, Итоги науки и техники. Математический анализ, 1983, т. 21, 42—129.
20. Б. Я. Левин. Целые функции, Изд. МГУ, Москва, 1971.
21. Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения и ряды экспонент, Изв. АН СССР, сер. матем., 1975, 39, № 3, 657—702.
22. R. Rocheberg. Toeplitz operators on weighted  $H_p$  spaces, Indiana Univ. Math. J., 1977, 21, № 2, 291—298.

23. Е. М. Дынькин. Оценки аналитических функций в жордановых областях, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1977, 73, 70—80.
24. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
25. Л. И. Ронкин. Введение в теорию целых функций многих переменных, М., «Наука», 1971.
26. И. И. Привалов. Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., «Наука», 1950.
27. Р. С. Гутер, П. Л. Ульянов. О новых результатах в теории ортогональных рядов, в кн.: С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958.
28. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник. Введение в теорию одномерных интегральных сингулярных операторов, Кишинев, «Штиинца», 1973.