ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 6, 1986 Математика

УДК 517.53

И. О. ХАЧАТРЯН

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВЕСОВЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Для произвольного $\rho\,(1 \leqslant \rho < +\infty)$ обозначим через $\Delta(\rho)$ и $\Delta^*(\rho)$ взаимно дополнительные угловые области

$$\Delta(\rho) = \left\{z\colon |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho},\ 0 < |z| < +\infty\right\},$$

$$\Delta^*(\rho) = \left\{z\colon \frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| \leqslant \pi,\ 0 < |z| < +\infty\right\},$$

а через L_ρ — общую границу этих областей.

Пусть на L_ρ определена вещественная измеримая функция $w(t)$, удовлетворяющая условиям

$$w(t) \geqslant 1,\ \lim_{|t|\to+\infty} |t|^n w^{-1}(t) = 0,\ t \in L_\rho,\ n = 0, 1, \cdots. \tag{1}$$

Обозначим через $C_w(L_\rho)$ множество непрерывных на L_ρ функций $f(t)$, для которых

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{f(t)}{w(t)} = 0.$$

Если норму элемента $f \in C_w(L_\rho)$ определить равенством

$$\|f\| = \sup_{t \in L_\rho} \frac{|f(t)|}{w(t)},$$

то $C_w(L_\rho)$ будет нормированным пространством. Из (1) следует что полиномы входят в $C_w(L_\rho)$. Аналогично классической проблеме С. Н. Бернштейна [1, 2] для случая вещественной оси, в ряде работ [3, 4, 5] ставился вопрос о нахождении необходимого и достаточного условия, накладываемого на функцию $w(t)$, при котором полиномы составляют всюду плотное множество в $C_w(L_\rho)$. Приведем некоторые результаты, полученные в этом направлении.

Теорема (А. Л. Шагинян, М. М. Джрбашян) [3, 4]. *Если $w(t) = w(|t|)$ — нормально возрастающая функция, то для замкнутости полиномов в $C_w(L_\rho)$ необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл*

$$\int_{L_\rho} \frac{\ln w(t)}{1 + |t|^{1+\rho}} |dt| = +\infty.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_w$ множество полиномов $p(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left|\frac{p(t)}{t+1}\right| \leqslant 1,$$

а через $\tilde{w}(z) = \sup\limits_{p \in \mathfrak{M}} |p(z)|$.

Теорема (С. Н. Мергелян) [5]. *Для замкнутости системы полиномов в $C_w(L_\rho)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\tilde{w}(z) \equiv +\infty, \quad z \overline{\in} L_\rho. \tag{2}$$

Автором [6] указан интегральный критерий замкнутости полиномов в $C_w(L_0)$.

Теорема А. *Для замкнутости системы полиномов в $C_w(L_\rho)$ необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл*

$$\int\limits_{L_\rho} \frac{\ln \tilde{w}(t)}{1+|t|^{1+\rho}} |dt|.$$

В этой же работе дано полное описание замыкания системы $\{t^n\}$ в случае, когда она не замкнута во всем $C_w(L_\rho)$. В частности доказана

Теорема В. *Пусть система $\{t^n\}$ не замкнута в $C_w(L_\rho)$. Тогда любая функция $f(t)$, принадлежащая замыканию этой системы, обладает свойствами*

а) *Она голоморфна (голоморфно продолжается) в области $\Delta(\rho)$ и $\ln|f(z)|$, имеет положительную гармоническую мажоранту в $\Delta(\rho)$;*
б) $\ln|f(x)| = o(x^\rho)$ *при* $x \to +\infty$.

Б. Я. Левиным была установлена связь между замкнутостью системы полиномов и целых функций в весовых пространствах непрерывных на вещественной оси функций и различного рода квазианалитичностью некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций. Цель настоящей работы — установить аналогичную связь в рассматриваемом случае.

Рассмотрим множество функций

$$f(u) = \mathrm{F}[E_\rho(-ut; \mu)], \tag{3}$$

где F — произвольный линейный функционал в $C_w(L_\rho)$, а $E_\rho(z; \mu)$ — функция типа Миттаг—Лефлера, которая определяется разложением

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right)}, \tag{4}$$

Из асимптотики функции типа Миттаг—Лефлера [7] (стр. 133):

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(\mu-1)} e^{z^\rho} + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |\arg z| \leqslant \alpha,$$

$$E_\rho(z; \mu) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad \alpha \leqslant |\arg z| \leqslant \pi,$$

где α — любое вещественное число, удовлетворяющее условию

$$\frac{\pi}{2\rho} < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi}{\rho}\right),$$

следует, что при $\rho > 1$ (этим случаем мы и ограничимся, т. к. случай $\rho = 1$ детально исследован Б. Я. Левиным) $f(u)$ определена на объединении полуоси $]-\infty, 0]$, где она бесконечно дифференцируема, и угловой области $|\arg u| < \pi(1 - 1/\rho)$, где она голоморфна.

Если $\mathbf{F}$ будет пробегать сопряженное пространство, то по формуле (3) определится некоторое множество функций.

Обозначим через $K_1(w)$ класс функций

$$f(u) = \mathbf{F}[E_\rho(-ut; \mu)], \quad u \in]-\infty, 0], \tag{3'}$$

определенных и бесконечно дифференцируемых на полуоси $]-\infty, 0]$, а через $K_2(w)$ — класс функций

$$f(u) = \mathbf{F}[E_\rho(-ut; \mu)], \quad |\arg u| < \pi(1 - 1/\rho), \tag{3''}$$

голоморфных в области $\Delta(\alpha)$, $\alpha = \dfrac{\rho}{2(\rho - 1)}$.

Класс $K_i(w)$ назовем квазианалитическим, если из $f \in K_i(w)$, $g \in K_i(w)$, $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, \cdots$, следует, что $f(u) \equiv g(u)$ в соответствующей области.

Теорема 1. *Для того, чтобы система степеней $\{t^n\}$ была замкнута в $C_w(L_\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы класс $K_1(w)$ был квазианалитическим.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система $\{t^n\}$ замкнута в $C_w(L_\rho)$, и пусть $f_1(u)$ и $f_2(u)$—две функции из $K_1(w)$, для которых $f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, \cdots$. Рассмотрим функцию $f_0(u) = f_1(u) - f_2(u)$. Из линейности класса $K_1(w)$ следует, что $f_0(u) \in K_1(w)$, т. е.

$$f_0(u) = \mathbf{F}_0[E_\rho(-ut; \mu)].$$

С одной стороны имеем $f_0^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, \cdots$. С другой стороны, легко видеть, что

$$f_0^{(n)}(0) = c_n \mathbf{F}_0[t^n],$$

причем $c_n \neq 0$, $n = 0, 1, \cdots$, т. к. все коэффициенты Тейлора функции типа Миттаг—Лефлера отличны от нуля. Следовательно $\mathbf{F}_0[t^n] = 0$, $n = 0, 1, \cdots$. Но по предположению система $\{t^n\}$ замкнута в $C_w(L_\rho)$. Отсюда следует, что $\mathbf{F}_0 = 0$, т. е. $f_0(u) \equiv 0$ или $f_1(u) \equiv f_2(u)$.

Достаточность. Пусть класс $K_1(w)$ квазианалитичен и пусть $\mathbf{F}$—произвольный линейный функционал, изчезающий на всех степенях $\{t^n\}$, $n = 0, 1, \cdots$

$$\mathbf{F}[t^n] = 0, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

Рассмотрим ту функцию $f(u)$, которая порождается этим функционалом по равенству (3'). Имеем $f^{(n)}(0) = c_n \mathbf{F}[t^n] = 0$ и т. к. класс $K_1(w)$ квазианалитичен по предположению, то $f(u) \equiv 0$, $u \in]-\infty, 0]$, т. е.

$$\mathbf{F}[E_\rho(-ut; \mu)] \equiv 0, \quad u \in]-\infty, 0].$$

Это означает, что функция $E_\rho(-u_0t;\ \mu)$, $u_0<0$ принадлежит замыканию системы $\{t^n\}$. Но из асимптотики функции типа Миттаг-Лефлера следует, что для функции $E_\rho(-u_0t;\ \mu)$, $u_0<0$ заключение б) теоремы В не имеет места. Значит условие теоремы В не выполняется, т. е. система $\{t^n\}$ замкнута в $C_w(L_\rho)$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к вопросу о квазианалитичности класса $K_2(w)$ в предположении, что класс $K_1(w)$ не квазианалитичен, т. е. при предположении, что система $\{t^n\}$ не замкнута в $C_w(L_\rho)$. Тогда нарушается равенство (2). В [5] доказано, что при $\rho>1$ возможны только два случая:

1) $\tilde{w}(z)<+\infty,\ z\in\Delta(\rho);\ \tilde{w}(z)=+\infty,\ z\in\Delta^*(\rho)$,

2) $\tilde{w}(z)<+\infty,\ z\in\mathbf{C}$.

В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением первого случая, что эквивалентно [6] условиям

$$\int\limits_{L_\rho}\frac{\ln\tilde{w}(t)}{1+|t|^{1+\rho}}|dt|<+\infty,\quad \int\limits_{L_\rho}\frac{\ln\tilde{w}(t)}{1+|t|^{1+\rho_1}}|dt|=+\infty, \tag{5}$$

$$\rho^{-1}+\rho_1^{-1}=2.$$

Покажем, что класс (3″) квазианалитичен, т. е. из условий $f_0(u)\in K_2(w)$ и

$$f_0^{(n)}(0)=0,\ n=0,1,\cdots \tag{6}$$

следует, что $f_0(z)\equiv 0,\ z\in\Delta(\alpha),\ \alpha=2^{-1}(\rho-1)^{-1}\cdot\rho$.

В самом деле, пусть $f_0(z)$ порождается функционалом F_0. Тогда условия (6) эквивалентны условиям

$$\mathrm{F}_0[t^n]=0. \tag{7}$$

Но тогда из $\tilde{w}(z)\equiv+\infty,\ z\in\Delta^*(\rho)$ будет следовать, что

$$\mathrm{F}_0\left[\frac{1}{t-z}\right]=0,\ z\in\Delta^*(\rho).$$

Теперь мы воспользуемся представлением ядра Коши с помощью функции типа Миттаг—Лефлера, установленном М. М. Джрбашяном [7], стр. 149:

$$\rho\int\limits_0^{+\infty}e^{-(|\zeta|\tau)^\rho}E_\rho(-t\tau;\ \mu)\,\tau^{\mu\rho-1}\,d\tau=e^{t^{1/\rho}}\frac{\zeta^{1-\mu\rho}}{\zeta-t}, \tag{8}$$

откуда будет следовать, что

$$e^{t^{1/\rho}}\zeta^{1-\mu\rho}\mathrm{F}_0\left[\frac{1}{\zeta-t}\right]=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(|\zeta|\tau)^\rho}\,\mathrm{F}_0\left[E_\rho(-t\tau;\ \mu)\right]\tau^{\mu\rho-1}\,d\tau.$$

Но

$$\mathrm{F}_0\left[\frac{1}{\zeta-t}\right]=0,\ \zeta<0,\ |\zeta|>\nu^{1/\rho},$$

следовательно

$$\int_0^{+\infty} e^{-(|\tau|\tau)^\rho} F_0[E_\rho(-t\tau;\mu)]\tau^{\mu\rho-1}\,d\tau = 0,$$

откуда по теореме единственности преобразования Лапласа заключаем, что

$$F_0[E_\rho(-t\tau;\mu)] = 0,\ \forall \tau \in [0, +\infty[.$$

Но функция

$$F_0[E_\rho(-tz;\mu)] = f_0(z)$$

голоморфна в области $|\arg z| < \pi(1-1/\rho)$, следовательно

$$f_0(z) \equiv 0,\ |\arg z| < \pi(1-1/\rho).$$

Таким образом, квазианалитичность класса (3″) доказана.

Но верно и обратное. В самом деле, предположим, что класс $K_2(w)$ квазианалитичен и пусть F_0 — произвольный линейный функционал, аннулирующий систему $\{t^n\}$: $F_0[t^n] = 0$, $n = 0, 1, \cdots$. Функцию, порожденную функционалом F_0 обозначим через f_0:

$$f_0(u) = F_0[E_\rho(-ut;\mu)],\ |\arg u| < \pi(1-1/\rho).$$

Имеем $f_0^{(n)}(0) = c_n F_0[t^n] = 0$ и так как класс (3″) квазианалитичен, то $f_0(z) \equiv 0$, $|\arg z| < \pi(1-1/\rho)$, т. е.

$$F_0[E_\rho(-zt;\mu)] \equiv 0,\ |\arg z| < \pi(1-1/\rho).$$

Но тогда из представления (8) ядра Коши будет следовать, что

$$F_0\left[\frac{1}{t-z}\right] = 0,\ z \in \Delta^*(\rho).$$

Таким образом, получили, что произвольный линейный функционал, аннулирующий систему $\{t^n\}$, аннулирует также все функции вида $(t-z)^{-1}$, $z \in \Delta^*(\rho)$, что, в свою очередь, означает, что $\tilde{w}(z) \equiv +\infty$, $z \in \Delta^*(\rho)$ или расходимость интеграла

$$\int_{L_\rho} \frac{\ln \tilde{w}(t)}{1+|t|^{1+\rho_1}}\,|dt| = +\infty,\ \rho^{-1} + \rho_1^{-1} = 2. \tag{9}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием квазианалитичности класса $K_2(w)$ является расходимость интеграла* (9).

Эту теорему можно сформулировать в другой, эквивалентной форме. С этой целью обозначим через $C_w^*(L_\rho)$ класс тех функций $h \in C_w(L_\rho)$, которые голоморфны в $\Delta(\rho)$ и удовлетворяют условиям:

I. $|h(z)| \leqslant \text{const} \cdot \tilde{w}(z)$,

II. $\ln|h(z)|$ имеет положительную гармоническую мажоранту в $\Delta(\rho)$,

III. $\ln|h(x)| = o(x^\rho)$ при $x \to +\infty$.

Тогда, как доказано в [6] (теорема 3 и замечание 2), расходимость интеграла (9) является необходимым и достаточным условием замкнутости системы $\{t^n\}$ в $C_w^*(L_\rho)$. Имея в виду этот результат, теорему 2 можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 3. *Для того, чтобы система степеней $\{t^n\}$, $n=0, 1, \cdots$ была замкнута в $C_w^*(L_\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы класс $K_2(w)$ был квазианалитическим.*

Вернемся к классу $K_1(w)$ при выполнении условий (5). Как мы уже знаем, этот класс не является квазианалитическим в выше определенном смысле. Мы хотим выяснить, при каких условиях этот класс будет квазианалитическим по отношению к данному порядку [8]. При этом мы будем следовать схеме доказательства соответствующих теорем Б. Я. Левина.

Для упрощения записи и некоторых выкладок будем предполагать, что $\mu=1$.

Пусть $\varphi(\alpha)$ — определенная в правосторонней окрестности нуля функция, такая, что $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n}\varphi(\alpha)=0$, $n=0, 1, \cdots$. Класс $K_1(w)$ назовем квазианалитическим по отношению к порядку $\varphi(\alpha)$, если из условий $f_0(u)\in K_1(w)$ и

$$\int\limits_0^{\alpha^{1/\rho}} |f_0(-u)|\, u^{\rho-1}\, du \leqslant \varphi(\alpha) \tag{10}$$

следует, что $f_0(u)\equiv 0$, $u\leqslant 0$.

Предположим, что

$$\beta = -\frac{1}{\alpha}\ln\varphi(\alpha)\uparrow +\infty \text{ при } \alpha\downarrow 0.$$

Обратную функцию обозначим через $\eta(\beta)$:

$$\beta = -\frac{1}{\alpha}\ln\varphi(\alpha) \Longleftrightarrow \alpha = \eta(\beta).$$

Итак, рассмотрим класс функций

$$f(u) = \mathrm{F}[E_\rho(-ut; 1)],$$

и пусть некоторая функция $f_0(u)$ из этого класса удовлетворяет условию (10).

Обозначим через F_0 функционал, которым порождается функция f_0:

$$f_0(u) = \mathrm{F}_0[E_\rho(-ut; 1)].$$

Так как $f_0^{(n)}(0)=0$, $n=0, 1, \cdots$, то $\mathrm{F}_0[t^n]=0$, $n=0, 1, \cdots$, следовательно

$$\mathrm{F}_0\left[\frac{1}{t-z}\right] = 0,\ z\in\Delta^*(\rho). \tag{11}$$

Из представления

$$\frac{1}{z-t} = \rho z^{\mu\rho-1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^\rho\tau^\rho} E_\rho(\tau t; \mu)\,\tau^{\mu\rho-1}\, d\tau,\ z\in\Delta(\rho).$$

получим (беря $\mu=1$)

$$F_0\left[\frac{1}{z-t}\right]=\rho z^{\rho-1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^\rho\tau^\rho} f_0(-\tau)\,\tau^{\rho-1}\,d\tau,\ z\in\Delta(\rho).$$

Обозначим

$$F_0\left[\frac{1}{z-t}\right]=F_0(z)$$

и в последнем равенстве, полагая z вещественным и положительным, получим

$$F_0(x)=\rho\, x^{\rho-1}\left\{\int\limits_0^{\alpha^{1/\rho}} e^{-x^\rho\tau^\rho} f_0(-\tau)\,\tau^{\rho-1}\,d\tau+\int\limits_{\alpha^{1/\rho}}^{+\infty} e^{-x^\rho\tau^\rho} f_0(-\tau)\,\tau^{\rho-1}\,d\tau\right\}. \tag{12}$$

Для первого слагаемого в (12) имеем оценку

$$\left|\int\limits_0^{\alpha^{1/\rho}} e^{-x^\rho\tau^\rho} f_0(-\tau)\,\tau^{\rho-1}\,d\tau\right|\leqslant\int\limits_0^{\alpha^{1/\rho}} |f_0(-\tau)|\,\tau^{\rho-1}\,d\tau\leqslant\varphi(\alpha).$$

Оценим второе слагаемое

$$\left|\int\limits_{\alpha^{1/\rho}}^{+\infty} e^{-x^\rho\tau^\rho} f_0(-\tau)\,\tau^{\rho-1}\,d\tau\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot\int\limits_{\alpha^{1/\rho}}^{+\infty} e^{-x^\rho\tau^\rho}\,\tau^{\rho-1}\,d\tau\leqslant\frac{c}{x^\rho}e^{-\alpha x^\rho}.$$

Таким образом, получаем оценку

$$|F_0(x)|\leqslant cx^{\rho-1}[\varphi(\alpha)+x^{-\rho}e^{-\alpha x^\rho}] \tag{13}$$

или

$$|F_0(x)|\leqslant \mathrm{const}\cdot x^{\rho-1}[\varphi(\alpha)+e^{-\alpha x^\rho}],\ x\geqslant 1.$$

Беря $\alpha=\eta(x^\rho)$, получим $x^\rho=-1/\alpha\ln\varphi(\alpha)$, $e^{-\alpha x^\rho}=\varphi(\alpha)$ и, следовательно

$$|F_0(x)|\leqslant \mathrm{const}\cdot x^{\rho-1}e^{-x^\rho\eta(x^\rho)}. \tag{14}$$

Обозначим через E множество целых функций $\Phi(z)$ порядка 2ρ и минимального типа, удовлетворяющих условию

$$|\Phi(x)|\leqslant cx^{1-\rho}e^{x^\rho\eta(x^\rho)}. \tag{15}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_\Phi$ множество тех функций из E, для которых выполняется условие

$$\left\|\frac{\Phi(t)}{t-1}\right\|\leqslant 1.$$

Наконец введем обозначение

$$F_0\left[\frac{\Phi(t)-\Phi(z)}{t-z}\right]=q_\Phi(z).$$

Нетрудно доказывается, что $q_\Phi(z)$ — целая функция порядка 2ρ и минимального типа. Имеем

$$q_\Phi(z) = \mathrm{F}_0\left[\frac{\Phi(t)}{t-z}\right] - \Phi(z)\,\mathrm{F}_0\left[\frac{1}{t-z}\right]. \tag{16}$$

Из (11) следует, что

$$q_\Phi(z) = \mathrm{F}_0\left[\frac{\Phi(t)}{t-z}\right], \quad z \in \Delta^*(\rho). \tag{17}$$

Предположим, что $\Phi \in \mathfrak{M}$. Тогда из (17) получаем

$$|q_\Phi(z)| \leqslant \|\mathrm{F}_0\| \cdot \left\|\frac{\Phi(t)}{t-z}\right\| = \|\mathrm{F}_0\| \cdot \left\|\frac{\Phi(t)}{t-1}\,\frac{t-1}{t-z}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\mathrm{F}_0\| \cdot \left\|\frac{\Phi(t)}{t-1}\right\| \cdot \max_{t \in L_\rho}\left|\frac{t-1}{t-z}\right| \leqslant \frac{c}{\delta(z)}, \quad z \in \Delta^*(\rho),$$

где $\delta(z)$ — расстояние точки z до L_ρ.

Полученное неравенство означает, что $q_\Phi(z)$ ограничена в области $|\arg(z+1)| > \frac{\pi}{2\rho}$:

$$|q^\Phi(z)| \leqslant c, \quad \pi \geqslant |\arg(z+1)| > \frac{\pi}{2\rho}. \tag{18}$$

Пусть теперь $z \in \Delta(\rho)$. Тогда из (16), предпологая опять, что $\Phi \in \mathfrak{M}$, получим

$$|q_\Phi(z)| \leqslant \frac{c}{\delta(z)} + |\Phi(z)| \cdot |F_0(z)|,$$

но $|F_0(x)| \cdot |\Phi(x)| \leqslant c$, $x \geqslant 1$, следовательно, $|q_\Phi(x)| \leqslant c$, $x \geqslant 1$ и понятно, что $|q_\Phi(x)| \leqslant \mathrm{const}$, $x \geqslant -1$.

Применяя принцип Фрагмена — Линделефа, заключаем, что $q_\Phi(z)$ ограничена в областях $0 < \arg(z+1) < \frac{\pi}{2\rho}$, $-\frac{\pi}{2\rho} < \arg(z+1) < 0$. Но тогда из (18) следует, что $q_\Phi(z)$ ограничена во всей плоскости и поэтому $q_\Phi(z) \equiv \mathrm{const}$. Но $q_\Phi(x) \to 0$ при $x \to -\infty$, значит $q_\Phi(z) \equiv 0$, т. е

$$\mathrm{F}_0\left[\frac{\Phi(t)-\Phi(z)}{t-z}\right] = 0, \quad \forall\, \Phi \in E.$$

Пусть теперь z_0 — нуль функции $\Phi(z)$: $\Phi(z_0) = 0$. Тогда будем иметь $\mathrm{F}_0\left[\frac{\Phi(t)}{t-z_0}\right] = 0$. Отсюда нетрудно заключить, что $\mathrm{F}_0[\Phi(t)] = 0$. Если множество E замкнуто в $C_w(L_\rho)$, то будем иметь $\mathrm{F}_0 = 0$. Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть выполняется условие (5). Если множество E всюду плотно в $C_w(L_\rho)$, то класс $K_1^-(w)$ квазианалитичен по отношению к порядку $\varphi(a)$.*

Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Джрбашяну и Б. Я. Левину за обсуждение работы и ценные советы.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 8. VII. 1985

Յ. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Կոմպլեքս տիրույթում կշռային մոտավորությունների հետ կապված հվազիանալիտիկ դասեր *(ամփոփում)*

Դիցուք L_ρ: $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho}$ $(1 < \rho < +\infty)$ *ճառագայթների վրա որոշված է* w *կշռային ֆունկցիա և* $C_w(L_\rho)$-*ն* L_ρ-*ի վրա անընդհատ ֆունկցիաների կշռային տարածությունն է։ Դիտարկվում է* $f(u) = F[E_\rho(-ut; \mu])$ *հավասարությամբ որոշվող ֆունկցիաների դասերը, որտեղ* F-*ը կամայական դծային ֆունկցիոնալ է համալուծ տարածությունից, իսկ* $E_\rho(z; \mu)$-*ն Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիա է։ Ապացուցվում են մի քանի թեորեմներ, որոնք կապ են հաստատում այս դասերի քվազիանալիտիկության և բազմանդամների լրիվության միջև* C_w-*ում կամ նրա որոշակի ենթատարածություններում։*

J. H. KHACHATRIAN. *Quasianalytic classes, connected with the weighted approximations in the complex domain* (summary)

Let on the rays L_ρ: $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho}$ $(1 < \rho < +\infty)$ a weight function W be defined and let $C_w(L_\rho)$ be the weighted class of continous functions on L_ρ. The classes, determined by the equality $f(u) = F[E_\rho(-ut; \mu)]$, are considered, where F is any functional from the conjugate space and $E_\rho(z; \mu)$ is a Mittag-Leffler type function. We prove some theorems, which indicate a connection between the quasianalyticity and the foolneess of polynomials in C_w or in some of its subclasses.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Bernstein* Le probleme de l'approximations des fonctions continues sur tout l'axe reel et l'une de ses applications, Bull. Soc. Math. de France, 52, 1924, 399—410.
2. *Н. И. Ахиезер.* О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси, УМН, XI, вып. 4 (70), 1956, 3—43.
3. *А. Л. Шагинян.* О полноте семейств аналитических функций в комплексной области, Сообщения Ин-та матем, и мех. АН АрмССР, 1, 1947.
4. *М. М. Джрбашян.* Некоторые вопросы взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Мат. сборник, 36, № 3, 1955, 353—440.
5. *С. Н. Мергелян.* Весовые приближения многочленами, УМН, XI, вып. 5 (71), 1956, 107—152.
6. *И. О. Хачатрян.* О взвешенно-равномерном приближении непрерывных функций полиномами на двух лучах, Изв. АН АрмССР, «Математика», 3, №№ 4—5, 1968, 301—326.
7. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления в комплексной области, М., «Наука», 1966.
8. *Б. Я. Левин, М. Левшиц.* Квазианалитические классы функций, представленных рядами Фурье, Мат. сборник, 9 (51), № 3, 1941, 693—711.