ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 6, 1987 Математика

УДК 517.53

В. Х. МУСОЯН

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, АППРОКСИМИРУЕМЫХ НЕПОЛНОЙ СИСТЕМОЙ ЭКСПОНЕНТ

Введение

Работа посвящена изучению экстремальных свойств функций, аппроксимируемых конечными линейными комбинациями функций из неполной в пространстве $L^2(0, \infty)$ системы экспонент

$$\{e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}, \ \mathrm{Re}\,\lambda_k > 0, \tag{1}$$

или, более общо, системы функций

$$\{e^{-\lambda_k x}, xe^{-\lambda_k x}, \cdots, x^{m_k-1} e^{-\lambda_k x}\}, \ \mathrm{Re}\,\lambda_k > 0, \tag{2}$$

где $\{\lambda_k\}$ — последовательность различных комплексных чисел.

Известная теорема Мюнца, переформулированная для системы экспоненциальных функций (1), гласит:

Пусть $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 <, \cdots, \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Тогда

a) Условия

$$\lambda_1 = 0, \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^{-1} = +\infty$$

необходимы и достаточны для полноты системы (1) в пространстве $C[0, \infty]$ непрерывных на $[0, \infty]$ функций,

b) Условия

$$\lambda_1 > 0, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = \infty$$

необходимы и достаточны для полноты той же системы в любом из пространств $L^p(0, \infty)$, $p \geqslant 1$.

Изучению класса функций, аппроксимируемых конечными линейными комбинациями функций из неполной (в пространствах $L^p(0, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $C[0, \infty]$) системы (2), посвящено много работ (см., например, [1] — [7]).

Л. Шварц [2] рассмотрел неполную (в пространствах $L^p(0, \infty)$ или $C[0, \infty]$) систему (1), при условии $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ и установил, что функции, аппроксимируемые конечными линейными комбинациями функций из неполной системы (1), аналитически продолжаются в открытую правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Более того, если последовательность конечных линейных комбинаций $P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{nk} e^{-\lambda_k x}$ сходится к функции $F(x)$ в промежутке $[0, \infty]$, то последовательность $P_n(z)$ сходится к функции $F(z)$ ($F(z)$ —аналитическое продолжение функции $F(x)$) равномерно на компактных множествах открытой правой полуплоскости.

В случае, когда λ_k—целые, тот же самый результат, независимо и почти одновременно, был получен Кларксоном и Эрдёшем. [1].

Изучению неполных в пространстве $C[0, 1]$ систем Мюнца $\{x^{\lambda_k}\}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$; $\sum \lambda_k^{-1} < \infty$ новым, отличным от метода Шварца, методом, посвящена работа А. Ф. Леонтьева [3]. В этой работе установлено, что если последовательность $P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{nk} x^{\lambda_k}$ равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$, то на любом ограниченном замкнутом подмножестве римановой поверхности $0 < |x| < 1$, $-\infty < \arg x < \infty$ она сходится равномерно.

М. М. Джрбашян в работах [4] и [7] предложил новый метод, позволивший исследовать вопросы аналитического продолжения функций, принадлежащих замыканию неполной системы (2) и разложения этих функций в ряды по этой системе. Он доказал, что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty \tag{3}$$

необходимо и достаточно для ее неполноты в пространстве $L^2(0, \infty)$

В указанных работах М. М. Джрбашян рассмотрел также неполную систему (2) при условии $|\arg \lambda_k| \leqslant \varphi_0$; $|\lambda_k| > \delta > 0$ и установил, что аппроксимируемая функция аналитически продолжается во внутренность угла $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$. Более того, если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (2) $P_n(x)$ сходится по норме пространства $L^2(0, \infty)$ к функции $f(x)$, то последовательность $P_n(z)$ на компактных подмножествах указанного угла равномерно сходится к функции $f(z)$ ($f(z)$—аналитическое продолжение функции $f(x)$.).

Таким образом, вопрос об аналитическом продолжении аппроксимируемой функции в случае, когда последовательность $\{\lambda_k\}$ имеет предельные точки на мнимой оси, оставался открытым.

Настоящая работа посвящена также изучению этого вопроса. В предположении, что последовательность показателей $\{\lambda_k\}$, кроме условия неполноты (3), удовлетворяет одному из двух условий:

1) последовательность $\{\lambda_k\}$ ограничена,

2) последовательность $\{\lambda_k\}$ неограничена и удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{|\lambda_k| \to \infty}} |\arg \lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

получено интегральное представление ортопроектора в пространстве $L^2(0, \infty)$ на подпространство $E \subset L^2(0, \infty)$, порождённое неполной системой (2).

Исходя из этого представления ортопроектора доказано, что функции, аппроксимируемые конечными линейными комбинациями функций из неполной системы (2), при условии 1) аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость, а при условии 2) — во внутренность угла $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$. Оказывается, что в первом случае аналитическое продолжение аппроксимируемой функции представляет собой целую функцию экспоненциального типа.

Изучен также вопрос сходимости в областях комплексной плоскости последовательностей конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (2), сходящихся по норме пространства $L^2(0, \infty)$.

Получены экстремальные оценки для аналитических продолжений аппроксимируемых функций.

В наших рассмотрениях мы пользуемся полученным в работе [8] интегральным представлением формулой

$$(P_n f)(x) = \int_0^\infty K_n(x, t) f(t)\, dt \tag{5}$$

ортопроектора P_n в $L^2(0, \infty)$ на подпространство, порожденное конечной системой

$$\{e^{-\lambda_k x}, xe^{-\lambda_k x}, \cdots, x^{m_k-1} e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^n. \tag{2'}$$

Здесь

$$K_n(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda x} d\lambda}{W_n(\lambda)} \overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\xi t}\, d\xi}{W_n(\xi)\,(\xi+\bar{\lambda})}\right\}}, \tag{6}$$

W_n — конечное произведение Бляшке

$$W_n(\lambda) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \bar{\lambda}_k} \cdot \frac{|1-\lambda_k^2|}{1-\lambda_k^2}\right)^{m_k}, \tag{7}$$

а Γ — замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий все корни функции $W_n(\lambda)$.

§ 1. Неполная система экспонент с ограниченной последовательностью показателей

В этом параграфе изучается неполная система (2) при условии ограниченности последовательности $\{\lambda_k\}$. Иными словами, предполагается, что последовательность $\{\lambda_k\}$ ограничена и удовлетворяет условию (3).

Как известно, условие (3) необходимо и достаточно для равномерной сходимости произведения Бляшке

$$W(\lambda) = \prod_{k=1}^\infty \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \bar{\lambda}_k} \cdot \frac{|1-\lambda_k^2|}{1-\lambda_k^2}\right)^{m_k}$$

на компактных подмножествах множества $C \setminus \{\overline{-\bar{\lambda}_k}\}$ (C—комплексная плоскость, а $\{\overline{-\bar{\lambda}_k}\}$ — замыкание множества точек последовательности $\{-\bar{\lambda}_k\}$) к аналитической на указанном множестве функции, обращающейся в нуль в точках $\{\lambda_k\}$. Кроме того, почти для всех λ на мнимой оси $\lambda \in (-i\infty, i\infty)$ существуют ее угловые граничные значения $W(i\tau) = \lim\limits_{\lambda \to i\tau} W(\lambda)$ и почти везде $|W(i\tau)| = 1$, $\tau \in (-\infty, \infty)$.

Более того (см. [9], стр. 152)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |W_n(i\tau) - W(i\tau)|^2 \frac{d\tau}{1+\tau^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

где W_n — частичное произведение Бляшке (7), следовательно, для произвольной функции $f \in L^2(-\infty, \infty)$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |W_n(i\tau) - W(i\tau)|^2 |f(\tau)|^2 d\tau \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{1.1}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G(\lambda, t, q) = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{W(\xi)(\xi+\bar{\lambda})}}, \ \mathrm{Re}\, \lambda > 0, \tag{1.2}$$

где t—произвольное комплексное число, $q(\xi)$—произвольный алгебраический полином, а контур Γ—прямоугольник, состоящий из отрезков $[-i\sigma, a-i\sigma]$, $[a-i\sigma, a+i\sigma]$, $[a+i\sigma, i\sigma]$ и $[i\sigma, -i\sigma]$, $\sigma > 0$, $a > 0$, с положительным направлением обхода. Числа a и σ выбраны так, чтобы контур Γ охватывал внутри себя все точки последовательности $\{\lambda_k\}$, а отрезки $[-i\sigma, a-i\sigma]$ и $[a+i\sigma, i\sigma]$ находились на положительном расстоянии от множества точек последовательности $\{\lambda_k\}$.

Лемма 1. *Функция $G(\lambda, t, q)$ обладает свойствами*

а) При любом комплексном значении параметра t функция $G(\lambda, t, q)$, как функция от λ, входит в класс H^2 в правой полуплоскости, следовательно, почти везде на мнимой оси существуют её угловые граничные значения

$$G(i\tau, t, q) = \lim_{\lambda\to i\tau} G(\lambda, t, q), \ -\infty < \tau < \infty,$$

причем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |G(i\tau, t, q)|^2 d\tau < \infty.$$

в) *Имеет место предельное соотношение*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |G_n(i\tau, t, q) - G(i\tau, t, q)|^2 d\tau \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{1.3}$$

где

$$G_n(\lambda, t, q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{W_n(\xi)\,(\xi+\lambda)},\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

причем на ограниченных множествах соотношение (1.3) *имеет место равномерно относительно* t.

c) *Равномерно относительно* λ *и* t, *когда* λ *изменяется в некоторой окрестности ломаной* $\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)$ *а* t — *на произвольном ограниченном множестве комплексной плоскости, имеет место*

$$G_n(\lambda, t, q) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} G(\lambda, t, q).$$

Доказательство утверждения а). Так как функции $F(\lambda)$ и $\overline{F(\bar\lambda)}$ входят в класс H^2 одновременно, то достаточно доказать, что функция $\overline{G(\bar\lambda, t, q)}$ входит в класс H^2. Для этого представим ее в виде

$$\overline{G(\bar\lambda, t, q)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[-i\sigma,\ a-i\sigma]} \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{W(\xi)\,(\xi+\lambda)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[a-i\sigma,\ a+i\sigma]} \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{W(\xi)\,(\xi+\lambda)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[a+i\sigma,\ i\sigma]} \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{W(\xi)\,(\xi+\lambda)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[i\sigma,\ -i\sigma]} \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{W(\xi)\,(\xi+\lambda)} =$$

$$= G^{(1)}(\lambda, t, q) + G^{(2)}(\lambda, t, q) + G^{(3)}(\lambda, t, q) + G^{(4)}(\lambda, t, q)$$

и докажем, что слагаемые $G^{(i)}(\lambda, t, q)$, $i = 1, 2, 3, 4$, входят в класс H^2 в правой полуплоскости. Принадлежность функций $G^{(2)}(\lambda, t, q)$ и $G^{(4)}(\lambda, t, q)$ пространству H^2 вытекает из следующего утверждения (см., например, [9], стр. 192).

Если $f \in L^2(-\infty, \infty)$, то функции

$$f_+(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\, dx}{x - w},\ \mathrm{Im}\, w > 0$$

и

$$f_-(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\, dx}{x - w},\ \mathrm{Im}\, w < 0$$

входят, соответственно, в классы H^2 в верхней и нижней полуплоскостях, причем

$$\|f_\pm\|_{H^2} < \|f\|_{L^2}. \tag{1.4}$$

Принадлежность остальных слагаемых пространству H^2 вытекает из легко проверяемого утверждения:

Если функция $\varphi(\xi)$ непрерывна на отрезке $[0, a]$, $a > 0$ и в точке $\xi = 0$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$,

$$|\varphi(\xi) - \varphi(0)| \leqslant L\,\xi^{\alpha}, \tag{1.5}$$

то функция

$$J(z) = \int_0^a \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\xi + z}$$

входит в класс H^2 в правой полуплоскости.

Перейдем к доказательству утверждения в). Для этого составим разность

$$G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q) = \frac{1}{2\pi i}\overline{\int_\Gamma \left[\frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)}\right]\frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{\xi + \bar{\lambda}}} \tag{1.8}$$

и интеграл по контуру Γ представим как сумму интегралов, распространенных по отдельным сторонам прямоугольника Γ

$$G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q) =$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{[-i\sigma,\, a-i\sigma]}} \overline{\left[\frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)}\right]\frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{\xi + \bar{\lambda}}} +$$

$$+ \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{[a-i\sigma,\, a+i\sigma]}} + \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{[a+i\sigma,\, i\sigma]}} + \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{[i\sigma,\, -i\sigma]}} = \sum_{k=1}^{4} J_n^{(k)}(\lambda, t). \tag{1.9}$$

Здесь слагаемые $J_n^{(k)}(\lambda, t)$, $k = 1, 2, 3, 4$, как функции от λ, принадлежат пространству H^2 в правой полуплоскости (см. утверждение а)). Докажем, что они стремятся к нулю по норме этого пространства равномерно относительно t при $|t| \leqslant M$. Имеем

$$|J_n^{(1)}(\lambda, t)| \leqslant \varepsilon_n \int_0^a \frac{dx}{|x - i\sigma + \bar{\lambda}|}, \ \operatorname{Re}\lambda > 0, \tag{1.10}$$

где

$$\varepsilon_n = \max_{\substack{\xi \in [-i\sigma,\, a-i\sigma] \\ |t| \leqslant M}} \left| \left[\frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)}\right] q(\xi)\, e^{-\xi t} \right|.$$

Так как отрезок $[-i\sigma, a - i\sigma]$ находится на положительном расстоянии от множества точек последовательности $\{\lambda_k\}$, то последовательность $1/W_n(\xi)$ равномерно на этом отрезке сходится к функции $1/W(\xi)$, а функция $q(\xi)\, e^{-\xi t}$ на этом отрезке ограничена, следовательно $\varepsilon_n \to 0$.

Чтобы доказать соотношение $J_n^{(1)}(\lambda, t) \to 0$ по норме пространства H^2 равномерно относительно t, в силу оценки (1. 10), достаточно доказать, что функция

$$h_\xi(\eta) = \int_0^a \frac{dx}{|x - i\sigma + \xi - i\eta|} \quad (\lambda = \xi + i\eta,\ \xi > 0)$$

при любом фиксированном $\xi > 0$ входит в класс $L^2(-\infty, \infty)$ и ее норма, как функция от ξ, ограничена. Имеем

$$h_\xi(\eta) \leqslant 2\int\limits_0^a \frac{dx}{x+|\eta+\sigma|},$$

Отсюда получаем оценку

$$h_\xi(\eta) \leqslant \begin{cases} 2\ln\dfrac{a+|\eta+\sigma|}{|\eta+\sigma|}, & |\eta| \leqslant 2\sigma \\ \dfrac{4a}{|\eta|}, & |\eta| > 2\sigma. \end{cases}$$

Из этой оценки следует требуемый результат.

Стремление к нулю слагаемого $J_n^{(3)}(\lambda, t)$ в (1.9) доказывается аналогичным образом.

Для слагаемого $J_n^{(2)}(\lambda, t)$ имеем

$$J_n^{(2)}(\lambda, t) < \max_{\substack{\xi\in[a-i\sigma,\, a+i\sigma] \\ |t|<M}} \left|\left[\frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)}\right] q(\xi)\, e^{-\xi t}\right| \int\limits_{[a-i\sigma,\, a+i\sigma]} \frac{|d\xi|}{|\xi+\bar\lambda|}. \tag{1.10'}$$

Здесь подынтегральная функция удовлетворяет условию

$$\frac{1}{|\xi+\bar\lambda|} \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|},\ \xi\in[a-i\sigma,\ a+i\sigma],\ \operatorname{Re}\lambda>0,$$

где M — постоянная.

Подставляя эту оценку в (1.10'), получим

$$|J_n^{(2)}(\lambda, t)| \leqslant \frac{2\sigma M}{1+|\lambda|} \max_{\substack{\xi\in[a-i\sigma,\, a+i\sigma] \\ |t|<M}} \left|\left[\frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)}\right] q(\xi)\, e^{-\xi t}\right|.$$

Из этой оценки следует наше утверждение для слагаемого $J_n^{(2)}(\lambda, t)$.

Чтобы доказать стремление к нулю слагаемого $J_n^{(4)}(\lambda, t)$ в (1.9), воспользуемся следующим замечанием.

Если функция $F(\lambda)$ входит в класс H^2 в правой полуплоскости, то функция $\overline{F\bar\lambda}$ тоже входит в этот класс, причем $\|F(\lambda)\| = \|\overline{F(\bar\lambda)}\|$. Поэтому, согласно (1.4), имеем

$$\|J_n^{(4)}(\lambda, t)\| \leqslant \left\{\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left|\frac{1}{W_n(i\tau)} - \frac{1}{W(i\tau)}\right|^2 \left|q(i\tau)\, e^{-i\tau t}\right|^2 d\tau\right\}^{1/2}.$$

Учитывая (1.1) и то, что $|W_n(i\tau)| = |W(i\tau)| = 1$ почти везде, из этой оценки получим требуемый результат.

Перейдем к доказательству утверждения с). Так как указанная в утверждении с) ломаная находится на положительном расстоянии от множества точек последовательности $\{\lambda_k\}$, то в интегральном представлении (1.8) разности $G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q)$ контур Γ можем заменить контуром Γ_1, состоящем из отрезков $[-i\sigma_1,\ a-i\sigma_1]$, $[a-i\sigma_1,\ a+i\sigma_1]$, $[a+i\sigma_1,\ i\sigma_1]$ и $[i\sigma_1, -i\sigma_1]$. При этом число $\sigma_1 < \sigma$ выбираем так, чтобы контур Γ_1 также охватывал внутри себя все точки последовательности

$\{\lambda_k\}$, а стороны $[-i\sigma_1,\ a-i\sigma_1]$ и $[a+i\sigma_1,\ i\sigma_1]$ находились на положительном расстоянии от множества точек последовательности $\{\lambda_k\}$. Таким образом, получаем

$$G_n(\lambda,\ t,\ q)-G(\lambda,\ t,\ q)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\overline{\left[\frac{1}{W_n(\xi)}-\frac{1}{W(\xi)}\right]\frac{q(\xi)\ e^{-\xi t}\ d\xi}{\xi+\bar{\lambda}}}. \tag{1. 11}$$

Когда λ изменяется в достаточно малой окрестности ломаной $\Gamma\setminus(i\sigma,\ -i\sigma)$, а ξ — на контуре Γ_1, функция $\xi+\bar{\lambda}$ по модулю остается большей некоторого положительного числа. Поэтому из интегрального представления (1. 11) усматриваем, что на указанном в утверждении с) множестве разность $G_n(\lambda,\ t,\ q)-G(\lambda,\ t,\ q)$ равномерно стремится к нулю. Лемма доказана.

Теперь введём в рассмотрение функцию

$$K(z,\ t,\ p,\ q)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{p(\lambda)\ e^{-\lambda z}}{W(\lambda)}\ G(\lambda,\ t,\ q)\ d\lambda,$$

где переменные z и t принимают произвольные комплексные значения, а $p(\lambda)$ — произвольный алгебраический полином.

Лемма 2. *Функция $K(z,\ t,\ p,\ q)$ обладает свойствами:*

a) Последовательность $K_n(z,\ t,\ p,\ q)$ на любом ограниченном множестве пространства C^2 равномерно сходится к функции $K(z,\ t,\ p,\ q)$:

$$K_n(z,\ t,\ p,\ q)\underset{n\to\infty}{\rightarrow}K(z,\ t,\ p,\ q);\ |z|\leqslant M,\ |t|\leqslant M, \tag{1. 12}$$

где

$$K_n(z,\ t,\ p,\ q)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{p(\lambda)\ e^{-\lambda z}\ d\lambda}{W_n(\lambda)}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{q(\xi)\ e^{-\xi t}\ d\xi}{W_n(\xi)\ (\xi+\bar{\lambda})}\right\}.$$

Поэтому функция $K(z,\ t,\ p,\ q)$ непрерывна на всем пространстве C^2 и при любом фиксированном $t\in C$ функция $K(z,\ t,\ p,\ q)$, как функция от z, целая. Кроме того, имеет место равенство

$$K'_z(z,\ t,\ p,\ q)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{-\lambda\,p(\lambda)\ e^{-\lambda z}\ d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{q(\xi)\ e^{-\xi t}\ d\xi}{W(\xi)\ (\xi+\bar{\lambda})}\right\}}. \tag{1. 13}$$

b) Для всех значений переменных z и t выполняется равенство

$$\overline{K(z,\ t,\ p,\ q)}=K(t,\ z,\ q,\ p).$$

c) При любом фиксированном $z\in C$ сужение функции $K(z,\ t,\ p,\ q)$, как функции от t, на положительную полуось $t>0$ входит в класс $L^2(0,\ \infty)$. Более того

$$\int\limits_0^\infty|K_n(z,\ t,\ p,\ q)-K(z,\ t,\ p,\ q)|^2\,dt\underset{n\to\infty}{\rightarrow}0, \tag{1. 14}$$

причем стремление к нулю на ограниченных множествах имеет место равномерно относительно z.

d) При любом фиксированном $z \in C$ сужение функции $K_z^{(k)}(z, t, p, q)$, как функции от t, на положительную полуось $t > 0$, входит в класс $L^2(0, \infty)$. Имеет место

$$\int_0^\infty \left| \frac{d^k}{dz^k} K_n(z, t, p, q) - K_z^{(k)}(z, t, p, q) \right|^2 dt \underset{n \to \infty}{\to} 0, \quad (1.15)$$

причем стремление к нулю имеет место равномерно относительно z на ограниченных множествах.

e) При любом фиксированном $z \in C$ функция $\overline{\frac{d^m}{dz^m} K(z, t, 1, 1)}$, как функция от t, целая и имеет место равенство

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[\overline{\frac{d^m}{dz^m} K(z, t, 1, 1)}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(-\lambda)^k e^{-\lambda t}\, d\lambda}{W(\lambda)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \overline{\frac{(-\xi)^m e^{-\xi t}\, d\xi}{W(\xi)\ (\xi + \bar\lambda)}} \right\}. \quad (1.16)$$

Доказательство. Чтобы доказать a) составим разность

$$K_n(z, t, p, q) - K(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma p(\lambda) e^{-\lambda z} \left[\frac{G_n(\lambda, t, q)}{W_n(\lambda)} - \right.$$

$$\left. - \frac{G(\lambda, t, q)}{W(\lambda)} \right] d\lambda.$$

Мы должны доказать, что эта разность равномерно на ограниченных множествах сходится к нулю. Для этого достаточно показать, что равномерно относительно t на ограниченных множествах

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{G_n(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W(i\tau)} \right|^2 d\tau \underset{n \to \infty}{\to} 0, \ |t| \leqslant M \quad (1.17)$$

и

$$\frac{G_n(\lambda, t, q)}{W_n(\lambda)} \underset{n \to \infty}{\to} \frac{G(\lambda, t, q)}{W(\lambda)}; \ \lambda \in \Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma), |t| \leqslant M. \quad (1.18)$$

Действительно, имеем

$$\left| \frac{G_n(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W(i\tau)} \right| < \left| \frac{G_n(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} \right| +$$

$$+ \left| \frac{G(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W(i\tau)} \right|. \quad (1.19)$$

Так как почти везде выполняется равенство $|W_n(i\tau)| = |W(i\tau)| = 1$, то из (1.19) следует, что почти везде справедлива оценка

$$\left| \frac{G_n(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W(i\tau)} \right| \leqslant |G_n(i\tau, t, q) - G(i\tau, t, q)| +$$

$$+ |G(i\tau, t, q)|\,|W(i\tau) - W_n(i\tau)|.$$

Учитывая (1.1) и лемму 1, из этой оценки получим (1.17).

Чтобы установить (1. 18), заметим, что на множестве $\Gamma\setminus(i\sigma, -i\sigma)$ последовательность $1/W_n(\lambda)$ равномерно сходится к ограничнниой функции $1/W(\lambda)$. С другой стороны, согласно лемме 1 последовательность $G_n(\lambda, t, q)$ на множестве $\lambda\in\Gamma\setminus(i\sigma, -i\sigma)$; $|t|\leqslant M$ равномерно сходится к ограниченной функции $G(\lambda, t, q)$. Поэтому последовательность произведений $G_n(\lambda, t, q)/W_n(\lambda)$ на указанном множестве будет равномерно сходится к произведению предельных функций. Тем самым, (1. 18) установлено.

Докажем равенство (1.13). Так как при любом фиксированном $t\in C$ имеем

$$\frac{d}{dz}K_n(z, t, p, q)\underset{n\to\infty}{\to}K'_z(z, t, p, q),\quad z\in C,$$

то для доказательства (1.13) мы должны показать

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{-\lambda p(\lambda)e^{-\lambda z}d\lambda}{W_n(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{q(\xi)e^{-\xi t}d\xi}{W_n(\xi)(\xi+\bar\lambda)}\right\}}\to$$

$$\to\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{-\lambda p(\lambda)e^{-\lambda z}d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{q(\xi)e^{-\xi t}d\xi}{W(\xi)(\xi+\bar\lambda)}\right\}}$$

или, что то же самое

$$K_n(z, t, p_1, q)\underset{n\to\infty}{\to}K(z, t, p_1, q),$$

где $p_1(\lambda)=-\lambda p(\lambda)$. Последнее соотношение следует из (1.12).

Докажем b). Проверим это равенство сначала для функции $K_n(z, t, p, q)$. В случае простых корней произведения Бляшке, применяя теорему о вычетах, получим

$$K_n(z, t, p, q)=\sum_{k, m=1}^{n}\frac{p(\lambda_k)e^{-\lambda_k z}\overline{q(\lambda_m)}\,\overline{e^{-\lambda_m t}}}{W'_n(\lambda_k)\overline{W'_n(\lambda_m)}(\lambda_k+\bar\lambda_m)}.$$

Отсюда следует

$$\overline{K_n(z, t, p, q)}=K_n(t, z, q, p).\qquad(1.20)$$

Случай кратных корней произведения Бляшке сводится к предыдущему случаю, поскольку функция $K_n(z, t, p, q)$ непрерывно зависит от корней функции $W_n(\lambda)$.

Переходя к пределу в (1.20) при $n\to\infty$ и учитывая (1.12), получим требуемый результат.

Докажем c). В силу b) утверждение c) равносильно соотношению

$$\int\limits_0^{\infty}|K_n(t, z, q, p)-K(t, z, q, p)|^2\,dt\underset{n\to\infty}{\to}0.\qquad(1.21)$$

Для доказательства этого соотношения представим разность K_n-K в виде

$$K_n(t, z, q, p)-K(t, z, q, p)=$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[i\sigma, -i\sigma]} e^{-\lambda t} \left[\frac{G_n(\lambda, z, p)}{W_n(\lambda)} - \frac{G(\lambda, z, p)}{W(\lambda)} \right] q(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)} =$$

$$= J_n^{(1)}(t, z) + J_n^{(2)}(t, z). \tag{1.22}$$

Чтобы доказать (1.21) достаточно показать, что слагаемые $J_n^{(1)}(t, z)$ и $J_n^{(2)}(t, z)$ в (1.22) входят в класс $L^2(0, \infty)$ и при $n \to \infty$ стремятся к нулю по норме этого пространства равномерно относительно z на ограниченных множествах.

Слагаемое $J_n^{(1)}(t, z)$ представляет собой преобразование Фурье функции

$$\varphi_n(\tau, z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{G(i\tau, z, p)}{W(i\tau)} - \frac{G_n(i\tau, z, p)}{W_n(i\tau)} \right] q(i\tau), & \tau \in [-\sigma, \sigma] \\ 0 & \tau \overline{\in} [-\sigma, \sigma]. \end{cases}$$

Так как на отрезке $[-\sigma, \sigma]$ функция $q(i\tau)$ ограничена, то из (1. 17) следует, что при $n \to \infty$ последовательность $\psi_n(\tau, z)$ стремится к нулю по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$ равномерно относительно z на ограниченных множествах. В силу того, что преобразование Фурье сохраняет норму, последовательность $J_n^{(1)}(t, z)$ будет стремится к нулю по норме пространства $L^2(0, \infty)$ равномерно относительно z на ограниченных множествах.

Обращаясь к слагаемому $J_n^{(2)}(t, z)$ заметим, что согласно утверждению с) леммы 1 функция

$$\psi_n(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{G_n(\lambda, z, p)}{W_n(\lambda)} - \frac{G(\lambda, z, p)}{W(\lambda)} \right] q(\lambda),$$

как функция от λ, регулярна в некоторой окрестности ломаной $\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)$, поэтому нитегрированием по частям можно представить $J_n^2(t, z)$ в виде

$$J_n^{(2)}(t, z) = -\frac{1}{t} \left\{ e^{-\lambda t} \psi_n(\lambda, z) \Big|_{\lambda=-i\sigma}^{i\tau} - \int\limits_{\Gamma | (i\sigma, -i\sigma)} e^{-\lambda t} \frac{d}{d\lambda} \psi_n(\lambda, z) \right\}.$$

Отсюда получаем оценку

$$|J_n^{(2)}(t, z)| \leqslant \frac{1}{t}(2 + 2a + 2\sigma)\, \varepsilon_n(z),\ t > 1, \tag{1. 23}$$

где

$$\varepsilon_n(z) = \max_{\lambda \in \Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)} |\psi_n(\lambda, z)| + \max_{\lambda \in \Gamma \setminus (i\sigma, -\sigma i)} \left| \frac{d}{d\lambda} \psi_n(\lambda, z) \right|. \tag{1. 24}$$

Убедимся, что $\varepsilon_n(z) \to 0$ равномерно по z на ограниченных множествах. Действительно, из утверждения с) леммы 1 следует, что при $n \to \infty$ последовательность $\psi_n(\lambda, z)$ стремится к нулю равномерно относительно λ и z, когда λ изменяется в некоторой окрестности ломаной $\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)$, а z—на произвольном ограниченном множестве комплексной плоскости. Поэтому первое слагаемое в (1. 24) стремится к нулю равномерно относительно z на ограниченных множествах. Функцию $\frac{d}{d\lambda}\psi_n(\lambda, z)$ можно представить с помощью интегральной формулы Коши

$$\frac{d}{d\lambda}\psi_n(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\psi_n(\xi, z)}{(\xi-\lambda)^2}d\xi, \tag{1. 25}$$

где контур γ содержит внутри себя ломаную $\Gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)$ и целиком лежит в ее указанной окрестности, следовательно, второе слагаемое в (1.24) тоже стремится к нулю равномерно относительно z на ограниченных множествах.

На отрезке [0, 1] имеем оценку

$$|J_n^{(2)}(t, z)| \leqslant (2a+2\sigma)\,\varepsilon_n(z),\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1. 26}$$

Из (1.23) и (1.26) следует наше утверждение для последовательности $J_n^{(2)}(t, z)$.

Утверждения d) и e) следуют из предыдущего.

Теорема 1.1. *В пространстве* $L^2(0, \infty)$ *ортопроектор* P *на подпространство* E, *порожденное неполной системой* (2), *представляется в виде*

$$(Pf)(x) = \int\limits_0^\infty K(x, t)\, f(t)\, dt, \tag{1. 27}$$

где $K(x, t) = K(x, t, 1, 1)$.

Доказательство. Равенство (1.27) мы докажем, совершая предельный переход в равенстве (5). Воспользуемся следующим фактом.

Пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — линейно независимая система в гильбертовом пространстве H. E_k — линейная оболочка первых k векторов этой системы $e_1, e_2, \cdots, e_k$; а E — замкнутая линейная оболочка всей системы $\{e_k\}_1^\infty$. Тогда для любого элемента $x \in H$ имеет место равенство

$$P_E\, x = \lim_{k\to\infty} P_{E_k}x, \tag{1. 28}$$

где $P_E x$ — проекция элемента x на подпространство E, а $P_{E_k}x$ — проекция элемента x на конечномерное подпространство E_k.

Действительно, обозначим через $\{\varphi_k\}_1^\infty$ ортогонализацию системы $\{e_k\}$ методом Шмидта. Тогда E_k есть линейная оболочка первых k векторов $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$, а E — замкнутая линейная оболочка всей системы $\{\varphi_k\}_1^\infty$. Имеем

$$P_E x = \sum_{m=1}^{\infty}(x, \varphi_m)\,\varphi_m = \lim_{k\to\infty}\sum_{m=1}^{k}(x, \varphi_m)\,\varphi_m = \lim_{k\to\infty} P_{E_k}x.$$

Отсюда получаем (1. 28). Согласно приведённому утверждению для любой функции $f \in L^2(0, \infty)$ в равенстве (5) $P_n f$ сходится к Pf по норме пространства $L^2(0, \infty)$. С другой стороны, имеем

$$\left|\int_0^\infty K_n(x, t) f(t)\, dt - \int_0^\infty K(x, t) f(t)\, dt\right| \leqslant \int_0^\infty |K_n(x, t) - K(x, t)|\,|f(t)|\, dt.$$

Применяя неравенство Буняковского, получим

$$\left|\int_0^\infty K_n(x, t) f(t)\, dt - \int_0^\infty K(x, t) f(t)\, dt\right| <$$

$$< \left\{\int_0^\infty |K_n(x, t) - K(x, t)|^2\, dt\right\}^{1/2} \left\{\int_0^\infty |f(t)|^2\, dt\right\}^{1/2}.$$

Согласно утверждению с) леммы 2) отсюда получаем, что для любого $x \in (0, \infty)$

$$\int_0^\infty K(x, t) f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty K_n(x, t) f(t)\, dt.$$

Таким образом доказано, что, с одной стороны, $P_n f$ сходится к Pf по норме пространства $L^2(0, \infty)$, а с другой — $(P_n f)(x)$ поточечно сходится к функции

$$\int_0^\infty K(x,t) f(t)\, dt.$$

Следовательно, предельные функции почти везде совпадают. Тем самым равенство (1.27) доказано.

Теорема 1.2. *Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы* (2)

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} x^s e^{-\lambda_k x}$$

сходится к функции $f(x)$ *по норме пространства* $L^2(0, \infty)$, *то на ограниченных множествах комплексной плоскости она равномерно сходится к функции*

$$f(z) = \int_0^\infty K(z, t) f(t)\, dt, \quad z \in C, \tag{1.29}$$

которая представляет собой целую функцию экспоненциального типа.

Доказательство. Согласно (5) имеем

$$P_n(x) = \int_0^\infty K_m(x, t) P_n(t)\, dt, \quad m \geqslant p_n.$$

В этом равенстве слева и справа фигурируют целые функции, которые почти всюду на $(0, \infty)$ совпадают, следовательно, они совпадают на всей комплексной плоскости:

$$P_n(z)=\int_0^\infty K_m(z,t)\,P_n(t)\,dt,\ z\in C,\ m\geqslant p_n.$$

При фиксированном n, устремив m в бесконечность, согласно утверждению с) леммы 2 получим

$$P_n(z)=\int_0^\infty K(z,t)\,P_n(t)\,dt.$$

Составим разность

$$P_n(z)-f(z)=\int_0^\infty K(z,t)\,[P_n(t)-f(t)]\,dt.$$

Применяя неравенство Бунякоквского, получим

$$|P_n(z)-f(z)|\leqslant\left\{\int_0^\infty |K(z,t)|^2\,dt\right\}^{1/2}\|P_n-f\|. \qquad (1.30)$$

Заметим, что из утверждения с) леммы 2 следует, что первый множитель справа в (1.30) ограничен на ограниченных множествах комплексной плоскости. Поэтому из (1.30) следует, что последовательность $P_n(z)$ на ограниченных множествах плоскости равномерно сходится к функции (1.29).

Для доказательства теоремы нам остается показать, что функция (1.29) представляет собой целую функцию экспоненциального типа.

В интегральном представлении (6) ядра $K_n(x,t)$ в качестве контура Γ выбираем контур Γ', целиком лежащий в открытой правой полуплоскости. Тогда применяя теорему Фубини, получим

$$\int_0^\infty K_n(z,t)\,f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{e^{-\lambda z}\,d\lambda}{W_n(\lambda)}\left\{\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{\hat f(\xi)\,d\xi}{W_n(\xi)\,(\xi+\bar\lambda)}}\right\}, \qquad (1.31)$$

где

$$\hat f(\xi)=\int_0^\infty \overline{f(t)}\,e^{-\xi t}\,dt,\ \operatorname{Re}\xi>0. \qquad (1.32)$$

Согласно теореме Пэли-Винера функция $\hat f(\xi)$ принадлежит классу H^2 в правой полуплоскости, поэтому почти везде на мнимой оси имеет угловые граничные значения $\hat f(i\tau)\in L^2(-\infty,\infty)$. Кроме того, функция

$$F(\lambda)=-\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\hat f(\xi)\,d\xi}{W(\xi)\,(\xi+\bar\lambda)}},\ \operatorname{Re}\lambda>0 \qquad (1.33)$$

тоже принадлежит классу H^2 в правой полуплоскости (см. [9], стр. 192) и, следовательно, почти везде на мнимой оси имеет угловые граничные значения $F(i\tau)\in L^2(-\infty, \infty)$.

Докажем тождество

$$\int\limits_0^\infty K(z, t) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda z}}{W(\lambda)} F(\lambda)\, d\lambda, \quad z\in C, \qquad (1.34)$$

где контур Γ тот же самый, что и в интегральном представлении ядра $K(z, t)$. (Ниже мы убедимся, что функция $F(\lambda)$ в точках $\pm i\sigma$ регулярна). Утверждение теоремы следует из (1.34). Функция

$$F_n(\lambda) = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\hat{f}(\xi)\, d\xi}{W_n(\xi)(\xi+\bar{\lambda})}} \qquad (1.34')$$

регулярна в замкнутой правой полуплоскости, поэтому тождество (1.31) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^\infty K_n(z, t) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda z}}{W_n(\lambda)} F_n(\lambda)\, d\lambda, \quad z\in C. \qquad (1.35)$$

Согласно лемме 2 при $n\to\infty$ интеграл слева в (1.35) стремится к интегралу слева в (1.34), поэтому для доказательства тождества (1.34) мы должны показать, что интеграл справа в (1.35) стремится к интегралу справа в (1.34), а для этого достаточно установить, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)} - \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)} \right|^2 d\tau \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (1.36)$$

и равномерно

$$\frac{F_n(\lambda)}{W_n(\lambda)} \to \frac{F(\lambda)}{W(\lambda)}, \quad \lambda\in\Gamma\setminus(i\sigma, -i\sigma). \qquad (1.37)$$

Чтобы доказать (1.36), функцию $F_n(\lambda)$ представим в виде

$$F_n(\lambda) = \overline{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\hat{f}(\xi)\, d\xi}{W_n(\xi)(\xi+\bar{\lambda})}}. \qquad (1.38)$$

Для этого мы воспользуемся следующими свойствами функций класса H^2 в правой полуплоскости (см. [9], стр. 176—178):

I) При всех $x>0$ функция $\hat{f}_x(y) = \hat{f}(x+iy)$ лежит в $L^2(-\infty, \infty)$.

II) Функция $\hat{f}_x(y)$ сходится к функции $\hat{f}(iy)$ в $L^2(-\infty, \infty)$ при $x\to 0$.

III) Функция $\hat{f}(\xi)$ стремится равномерно к нулю, когда ξ стремится к бесконечности внутри любой фиксированной полуплоскости $\operatorname{Re}\xi>\delta>0$.

В интегральном представлении (1. 34′) функции $F_n(\lambda)$ в качестве контура Γ' выберем контур, состоящий из отрезка $[x+ir, x-ir]$ и полуокружности $\xi = x + re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. При этом x берем настолько малым и r настолько большим, чтобы контур Γ' охватывал внутри себя все корни функции $W_n(\xi)$. Устремив r в бесконечность, согасно свойству III) функции $\hat{f}(\xi)$ в представлении (1. 34′), интеграл по полуокружности $\xi = x + re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, будет стремиться к нулю. В результате получим

$$F_n(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \overline{\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{f(\xi)\,d\xi}{W_n(\xi)\,(\xi+\bar{\lambda})}}.$$

Устремив теперь x к нулю, учитывая свойство II) функции $\hat{f}(\zeta)$, получим (1.38).

Приступим к доказательству соотношения (1.36). Для этого заметим, что почти везде выполняется неравенство

$$\left|\frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)} - \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)}\right| \leqslant |F_n(i\tau) - F(i\tau)| + |F(i\tau)|\,|W(i\tau) - W_n(i\tau)|.$$

Следовательно, имеем

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)} - \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)}\right|^2 d\tau\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(i\tau) - F(i\tau)|^2\, d\tau\right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |F(i\tau)|^2\, |W(i\tau) - W_n(i\tau)|^2\, d\tau\right\}^{1/2}. \qquad (1.\ 39)$$

Согласно (1.1) второе слагаемое справа стремится к нулю. Учитывая (1.38), разность $F_n(\lambda) - F(\lambda)$ можно представить в виде

$$F_n(\lambda) - F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \overline{\int_{-i\infty}^{i\infty} \left[\frac{1}{W(\xi)} - \frac{1}{W_n(\xi)}\right] \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi+\bar{\lambda}}\, d\xi}.$$

Согласно (1.4) отсюда получим оценку

$$\|F_n - F\|_{\mathcal{H}} \leqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{W(i\tau)} - \frac{1}{W_n(i\tau)}\right|^2 |\hat{f}(i\tau)|^2\, d\tau\right\}^{1/2}. \qquad (1.\ 40)$$

Здесь интеграл справа, опять согласно (1.1), стремится к нулю, и, следовательно, первое слагаемое справа в (1.39) тоже стремится к нулю. Тем самым соотношение (1.36) доказано.

Чтобы доказать (1.37), функцию $F(\lambda)$ представим в виде

$$\overline{F(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\hat{f}(\xi)\,d\xi}{W(\xi)(\xi+\bar{\lambda})}}. \tag{1. 41}$$

Для этого в интегральном представлении (1.34[1]) функции $F_n(\lambda)$ в качестве контура Γ^1 выберем контур, состоящий из отрезков $[x-i\sigma,\ a-i\sigma]$, $[a-i\sigma, a+i\sigma]$, $[a+i\sigma,\ x+i\sigma]$ и $[x+i\sigma,\ x-i\sigma]$, $x<a$. При этом числа x и σ выбираем так, чтобы контур Γ' охватывал внутри себя все корни функции $W_n(\lambda)$ и функция $\hat{f}(\xi)$ была непрерывной на отрезках $[i\sigma, a+i\sigma]$ и $[-i\sigma,\ a-i\sigma]$. Устремив x к нулю, учитывая свойство III) функции $\hat{f}(\xi)$, получим

$$\overline{F_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\hat{f}(\xi)\,d\xi}{W_n(\xi)(\xi+\bar{\lambda})}}. \tag{1. 42}$$

В этом равенстве переходя к пределу при $n\to\infty$, учитывая (1. 40) и (1. 1), получим (1. 41), ибо из $\|F_n-F\|_{H^2}\to 0$ следует $F_n(\lambda)\to F(\lambda)$, $\mathrm{Re}\,\lambda>0$.

Так как $1/W_n(\lambda)\to 1/W(\lambda)$, $\lambda\in\Gamma\setminus(i\sigma,-i\sigma)$ равномерно, то для доказательства (1. 37) достаточно показать, $F_n(\lambda)\to F(\lambda)$, $\lambda\in\Gamma\setminus(i\sigma,-i\sigma)$ равномерно. А для этого нужно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве утверждения с) леммы. 1. Теорема доказана.

Перейдем к экстремальным оценкам для функций, принадлежащих замкнутой линейной оболочке E неполной системы (2).

Согласно теореме 1.2 функции класса E аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость. Ниже функцию f и ее аналитическое продолжение будем обозначать одной и той же буквой.

Теорема 1.3. *Имеют место равенства:*

a) $$\max_{f\in E}\frac{|f(z)|}{\|f\|}=\sqrt{K(z,z)},$$

где z—произвольное комплексное число, причем равенство в точке z достигается для функции $f_z(t)=\overline{K(z,t)}$;

в) $$\max_{f\in E}\frac{\sup\limits_{x<t<\infty}|f(t)|}{\|f\|}=\sqrt{K(x,x)},\quad -\infty<x<\infty,$$

где равенство достигается для функции $f_x(t)=\overline{K(x,t)}$;

c) $$\max_{f\in E}\frac{|f^{(k)}(z)|}{\|f\|}=\sqrt{\Phi_k(z)},\quad k=1,2,\cdots;\ z\in C,$$

где

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda^k e^{-\lambda z}}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\xi^k e^{-\xi z}\,d\xi}{W(\xi)(\xi+\bar{\lambda})}\right\}}$$

(причем равенство в точке z достигается для функции $f_z(t) = \overline{\frac{d^k}{dz^k} K(z, t)}$);

$$d)\ \max_{f \in E} \frac{\sup\limits_{x<t<\infty} |f^{(k)}(t)|}{\|f\|} = \sqrt{\Phi_k(x)},\ k=1, 2, \cdots;\ -\infty < x < \infty,$$

где максимум достигается для функции $f_x(t) = \overline{\frac{d^k}{dx^k} K(x, t)}$.

Доказательство. Согласно теореме 1.2 имеем

$$f(z) = \int_0^\infty K(z, t) f(t)\, dt,\ z \in C, \tag{1.43}$$

причем, в силу утверждения c) леммы 2, при любом фиксированном z функция $\overline{K(z, t)}$, как функция от t, принадлежит подпространству E. Применяя неравенство Буняковского, получим

$$|f(z)| \leq \|K(z, t)\| \cdot \|f\|, \tag{1.44}$$

где при фиксированном z равенство достигается для функции $f_z(t) = \overline{K(z, t)}$. Подставляя эту функцию в (1.43), получим

$$K(\overline{z, z}) = \|K(z, t)\|^2$$

или, что то же самое, $\|K(z, t)\| = \sqrt{K(\overline{z, z})}$.

Вводя полученное значение нормы ядра $K(z, t)$ в неравенство (1.44), получим утверждение a).

Для доказательства утверждения b) достаточно показать, что функция $K(x, x)$ монотонно убывает на вещественной оси. В интегральном представлении (6) ядра $K_n(x, t)$, подставляя $t = x$ и дифференцируя по параметру x, получим

$$\left(K_n(x, x)\right)' = -\left|\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\lambda x}\, d\lambda}{W_n(\lambda)}\right|^2.$$

Следовательно, при фиксированном n функция $K_n(x, x)$ на вещественной оси монотонно убывает. Переходя к пределу при $n \to \infty$, имея в виду лемму 2, получим требуемый результат.

Для доказательства утверждения c) установим равенство

$$f^{(k)}(z) = \int_0^\infty \frac{d^k}{dz^k} K(z, t) f(t)\, dt, \tag{1. 45}$$

где f — произвольная функция из класса E.

В равенстве (5) слева и справа фигурируют целые функции, которые почти всюду на $(0, \infty)$ совпадают, следовательно, они совпадают на всей комплексной плоскости:

$$(P_n f)(z) = \int_0^\infty K_n(z, t) f(t)\, dt, \quad z \in C. \tag{1.46}$$

Отсюда получим

$$\frac{d^k}{dz^k}(P_n f)(z) = \int_0^\infty \frac{d^k}{dz^k} K_n(z, t) f(t)\, dt, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{1.47}$$

Докажем, что в этом равенстве можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Согласно (1.28) последовательность $P_n f$ сходится к функции f по норме пространства $L^2(0, \infty)$, в силу теоремы 1.2 она сходится равномерно на ограниченных множествах к целой функции $f(z)$. Следовательно, в любой точке комплексной плоскости $z \in C$ производная порядка k функции $(P_n f)(z)$ будет сходиться к $f^{(k)}(z)$:

$$\frac{d^k}{dz^k}(P_n f)(z) \underset{n\to\infty}{\to} f^{(k)}(z), \quad z \in C.$$

С другой стороны, согласно утверждению d) леммы 2, при $n \to \infty$ функция справа в (1.47) в каждой точке комплексной плоскости будет сходиться к функции справа в (1.45). Поэтому, переходя к пределу в (1.47) при $n \to \infty$, получим (1.45).

Применяя неравенство Буняковского, из (1.45) получим

$$|f^{(k)}(z)| < \left\| \frac{d^k}{dz^k} K(z, t) \right\| \cdot \| f \| \cdot \tag{1.48}$$

С другой стороны, функция $\overline{\frac{d^k}{dz^k} K(z, t)}$, как функция от t, принадлежит подпространству E. Действительно, согласно (1. 20) имеем

$$\overline{\frac{d^k}{dz^k} K_n(z, t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\xi t}\, d\xi}{W_n(\xi)} \left\{ \overline{\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(-\lambda)^k e^{-\lambda z}\, d\lambda}{W_n(\lambda)(\lambda + \bar{\xi})}} \right\} \cdot \tag{1.49}$$

Так как при фиксированном z функция

$$\overline{\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(-\lambda)^k e^{-\lambda z}\, d\lambda}{W_n(\lambda)(\lambda + \bar{\xi})}},$$

как функция от ξ регулярна в правой полуплоскости, то применяя теорему о вычетах на внешний интеграл в (1.49), мы убедимся что функция $\overline{\frac{d^k}{dz^k} K_n(z, t)}$ принадлежит подпространству E_n. Тогда наше утверждение следует из утверждения с) леммы 2.

Подставляя в (1.45) вместо функции f функцию $\overline{\frac{d^k}{dz^k} K(z, t)}$, получим

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[\overline{\frac{d^k}{dz^k} K(z, t)}\right] = \left\| \frac{d^k}{dz^k} K(z, t) \right\|^2 \cdot$$

Согласно утверждению e) леммы 2 отсюда получим

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}K(z,\ t)\right|=\sqrt{\Phi_k(z)}.$$

Вводя полученное значение нормы в (1.48), приходим к утверждению с).

Для доказательства утверждения d) достаточно показать, что функция $\Phi_k(x)$ монотонно убывает на вещественной оси. Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi_{kn}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda^k e^{-\lambda x}\,d\lambda}{W_n(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\xi^k e^{-\xi x}\,d\xi}{W_n(\xi)(\xi+\bar{\lambda})}\right\}}. \tag{1.50}$$

Имеем

$$\Phi'_{kn}(x)=-\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\lambda^k e^{-\lambda x}\,d\lambda}{W_n(\lambda)}\right|^2.$$

Следовательно, функция $\Phi_{kn}(x)$ монотонно убывает. Согласно утверждению a) леммы 2 $\Phi_k(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_{kn}(x)$. Следовательно, функция $\Phi_k(x)$ тоже монотонно убывает. Теорема доказана.

§ 2. Неполная система экспонент с неограниченной последовательностью показателей

В этом параграфе изучается неполная система (2) при дополнительном условии

$$\overline{\lim_{|\lambda_k|\to\infty}}|\arg\lambda_k|=\varphi_0<\frac{\pi}{2}. \tag{2.1}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G(\lambda,\ t,\ q)=\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{q(\xi)\,e^{-\xi t}\,d\xi}{W(\xi)(\xi+\bar{\lambda})}}, \tag{2.2}$$

где $q(\xi)$—алгебраический полином. Контур γ идет из бесконечности по лучу $\arg\xi=\varphi$; $\varphi_0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ до точки $a+i\sigma$, затем по прямой $\operatorname{Im}\xi=\sigma$; $\sigma>0$ до точки $i\sigma$, затем по мнимой оси до точки $-i\sigma$, затем по прямой $\operatorname{Im}\xi=-i\sigma$ до точки $a-i\sigma$ и наконец по лучу $\arg\xi=-\varphi$ опять в бесконечность. Числа a и σ выбраны так, чтобы контур γ охватывал внутри себя все точки последовательности $\{\lambda_k\}$, отрезки контура γ, лежащие на прямых $\operatorname{Im}\xi=\pm i\sigma$, находились на положительном расстоянии от множества точек последовательности $\{\lambda_k\}$ и на прямой $\operatorname{Re}\xi=a$ не было точек из последовательности $\{\lambda_k\}$.

Для изучения функции $G(\lambda,\ t,\ q)$ нам понадобится следующая

Лемма 2.1. *Для любого компактного множества K, лежащего в угле $|\arg\xi|<\frac{\pi}{2}-\varphi$ и для любого полинома $q(\xi)$ существует $\delta>0$ такое, что для больших по модулю ξ на контуре γ выполняется неравенство*

$$\left|\frac{q(\xi)\,e^{-\xi t}}{W(\xi)}\right| \leqslant e^{-\delta r};\ \xi \in \gamma,\ t \in K,\ \xi = re^{i\varphi},\ r > r_0. \tag{2.3}$$

Доказательство легко следует из леммы 6 работы [10].

Лемма 2.2. *Функция $G(\lambda, t, q)$ обладает свойствами*

a) *При любом значении параметра t, удовлетворяющего условию $|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \varphi$, функция $G(\lambda, t, q)$ входит в классе H^2 в правой полуплоскости.*

b) *Имеют место предельные соотношения*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| G_n(i\tau, t, q) - G(i\tau, t, q) \right|^2 d\tau \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{2.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{G_n(i\tau, t, q)}{W_n(i\tau)} - \frac{G(i\tau, t, q)}{W(i\tau)} \right|^2 d\tau \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{2.7'}$$

где

$$G_n(\lambda, t, q) = \overline{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{q(\xi)\,e^{-\xi t}\,d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \bar{\lambda})}},\ \operatorname{Re}\lambda > 0, \tag{2.8}$$

Γ_n—замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий все корни функции $W_n(\xi)$. При этом на компактных множествах угла $|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \varphi$ соотношения (2. 7) и (2. 7') имеют место равномерно относительно t.

c) *Равномерно относительно λ и t, когда λ изменяется в некоторой окрестности множества $\gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma)$, а t — на произвольном компактном множестве K, лежащем в угле $|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \varphi$, имеет место*

$$G_n(\lambda, t, q) \underset{n\to\infty}{\to} G(\lambda, t, q),\quad \lambda \in \gamma \setminus (i\sigma, -i\sigma),\quad t \in K.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения a) разобьем интеграл, распространенный по всему контуру γ, на сумму интегралов, распространенных по отдельным частям контура $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5$, где $\gamma_1 = [a + i\sigma, i\sigma]$, $\gamma_2 = [i\sigma, -i\sigma]$, $\gamma_3 = [-i\sigma, a - i\sigma]$, $\gamma_4 = [a - i\sigma, \infty e^{-i\varphi}]$ и $\gamma_5 = (\infty e^{i\varphi}, a + i\infty]$.

Принадлежность интегралов, распространенных по частям γ_1, γ_2 и γ_3 контура γ, пространству H^2 в правой полуплоскости было доказано в лемме 1. Докажем, что интегралы, распространенные по частям γ_4 и γ_5 контура γ, тоже принадлежат пространству H^2 в правой полуплоскости. Так как принадлежность обоих интегралов пространству H^2 доказывается одинаково, то мы проведем рассуждения только для второго из них; функция

$$G^*(\lambda, t, q) = \int\limits_{\gamma_5} \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{W(\xi)(\xi + \lambda)} \tag{2.9}$$

принадлежит пространству H^2 в правой полуплоскости. Согласно лемме 2.1 интеграл (2.9) сходится равномерно относительно λ в правой полуплоскости, следовательно, функция $G^*(\lambda, t, q)$ регулярна в правой полуплоскости. Докажем, что она входит в класс H^2. Имеем

$$|G^*(\lambda, t, q)| \leqslant \sup_{\xi \in \gamma_5} \frac{1}{|\lambda + \xi|} \int\limits_{\gamma_5} \left| \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}}{W(\xi)} \right| |d\xi|. \tag{2.10}$$

Воспользуемся оценкой

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda + \xi|} \leqslant M, \ \operatorname{Re}\lambda > 0, \ \xi \in \gamma_5, \tag{2.11}$$

где M — постоянная. Оценка (2.11) доказывается от противного. Пусть $|\lambda_n|/|\lambda_n + \xi_n| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$, $\xi_n \in \gamma_5$, или, что то же самое, $1/\left|1 + \frac{\xi_n}{\lambda_n}\right| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Это равносильно условию

$$\xi_n/\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} -1, \tag{2.12}$$

где $\xi_n = r_n e^{i\varphi}$, $\lambda_n = \rho_n e^{i\psi_n}$, $-\frac{\pi}{2} < \psi_n < \frac{\pi}{2}$. Соотношение (2.12) перепишем в виде

$$\frac{r_n}{\rho_n} e^{i(\varphi - \psi_n)} \underset{n\to\infty}{\to} -1. \tag{2.13}$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < \varphi - \psi_n < \varphi + \frac{\pi}{2}$, то (2.13) невозможно. Складывая неравенство (2.11) с очевидным неравенством

$$\frac{1}{|\lambda + \xi|} \leqslant M_1, \ \operatorname{Re}\lambda > 0, \quad \xi \in \gamma_5,$$

получим

$$\frac{1}{|\lambda + \xi|} < \frac{M_0}{1 + |\lambda|}, \ \operatorname{Re}\lambda > 0, \ \xi \in \gamma_5, \tag{2.14}$$

где M_0 и M_1 постоянные.

Принадлежность функции $G^*(\lambda, t, q)$ пространству H^2 следует из (2.10), (2.14) и (2.3).

Для доказательства утверждения b) функцию $G_n(\lambda, t, q)$ представим в виде

$$G_n(\lambda, t, q) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \lambda)}. \tag{2.15}$$

Для этого в интегральном представлении (2.8) в качестве контура

Γ_n берем контур γ_r, $r > \sqrt{a^2+\sigma^2}$, состоящий из части контура γ, лежащей в круге $|\xi| < r$, и из дуги окружности $c_r : |\xi| = r$, $-\varphi \leqslant \arg \xi \leqslant \leqslant \varphi$ (числа a, σ и φ фигурируют в описании контура γ). Затем устремим r к бесконечности. Тогда интеграл, распространенный по дуге c_r, будет стремиться к нулю и мы получим (2. 15).

Теперь составим разность

$$G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q) = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \left[\frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{\xi + \bar{\lambda}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{5} J_n^{(k)}(\lambda, t).$$

Со слагаемыми $J_n^{(1)}(\lambda, t)$ $J_n^{(2)}(\lambda, t)$ и $J_n^{(3)}(\lambda, t)$ поступаем так, как при доказательстве леммы 1. Нам остается доказать, что последние слагаемые стремятся к нулю по норме пространства H^2. Так как доказательство для обоих слагаемых одинаково, то мы проведем рассуждения только для последнего из них. Имеем

$$|J_n^{(5)}(\lambda, t)| \leqslant \sup_{\xi \in \gamma_5} \frac{1}{|\xi + \bar{\lambda}|} \int_{\gamma_5} \left| \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right| |q(\xi)\, e^{-\xi t}|\, |d\xi|. \quad (2.16)$$

Так как на ограниченных частях луча γ_5, функции $1/W_n(\xi)$ равномерно сходятся к $1/W(\xi)$ и

$$|1/W_n(\xi)| \leqslant |1/W(\xi)|, \; \xi \in \gamma_5,$$

то требуемый результат следует из (2.16), (2.14) и (2.3).

Для доказательства утверждения с) представим разность $G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q)$ в виде суммы

$$G_n(\lambda, t, q) - G(\lambda, t, q) = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \left[\frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{\xi + \bar{\lambda}}, \quad (2.17)$$

где Γ_1—контур, фигурирующий в (1.11), а Γ_2—контур, идущий из бесконечности по лучу $\arg \xi = \varphi$ до точки $a + i\sigma$, затем по прямой $\mathrm{Re}\, \xi = a$ до точки $a - i\sigma$, и затем по лучу $\arg \xi = -\varphi$ опять в бесконечность.

С первым интегралом в (2.17) поступаем как с (1.11), а для второго слагаемого имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \left[\frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right] \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{\xi + \bar{\lambda}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\xi \in \Gamma_2} \frac{1}{|\xi + \bar{\lambda}|} \int_{\Gamma_2} \left| \frac{1}{W_n(\xi)} - \frac{1}{W(\xi)} \right| |q(\xi)\, e^{-\xi t}|\, |d\xi|. \quad (2.18)$$

Так как при $\xi \in \Gamma_2$, $\mathrm{Re}\, \lambda \geqslant 0$, функция $1/|\xi + \bar{\lambda}|$ ограничена, и на ограниченных частях контура Γ_2 последовательность $1/W_n(\xi)$ равномерно сходится к функции $1/W(\xi)$, то из (2.18) и (2.3) следует, что второе слагаемое в (2.17) равномерно на указанном в утверждении с) множестве стремится к нулю. Лемма доказана.

Теперь введем в рассмотрение функцию

$$K(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{p(\lambda)\, e^{-\lambda z}}{W(\lambda)}\, G(\lambda, t, q)\, d\lambda, \tag{2.19}$$

где γ — тот же контур, что и в (2.2), $p(\lambda)$ — произвольный алгебраический полином.

Лемма 2.3. *Функция $K(z, t, p, q)$ обладает свойствами, приведенными в лемме 2.*

a) *Последовательность функций*

$$K_n(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \frac{p(\lambda)\, e^{-\lambda z}\, d\lambda}{W_n(\lambda)} \left\{\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{W_n(\xi)(\xi + \bar{\lambda})}}\right\} \tag{2.20}$$

(контур Γ_n лежит в правой полуплоскости и охватывает все корни функции $W_n(\lambda)$), на декартовом произведении $K\times K$ равномерно сходится к функции $K(z, t, p, q)$, где K—произвольное компактное множество из угла $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi$ (φ участвует в описании контура γ). Кроме того, в указанном угле имеет место равенство

$$K'_z(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{-\lambda\, p(\lambda)\, e^{-\lambda z}\, d\lambda}{W(\lambda)} \left\{\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{q(\xi)\, e^{-\xi t}\, d\xi}{W(\xi)(\xi + \bar{\lambda})}}\right\}. \tag{2.21}$$

Утверждения b), c), d), e) формулируются аналогичным образом.

Доказательство. Для доказательства утверждения a) функцию $K_n(z, t, p, q)$ представим в виде

$$K_n(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{p(\lambda)\, e^{-\lambda z}}{W_n(\lambda)}\, G_n(\lambda, t, q)\, d\lambda, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi. \tag{2.22}$$

Для этого в интегральном представлении (2.20) в качестве контура интегрирования Γ_n во внешнем интеграле берем контур γ_r, $r > \sqrt{a^2 + \sigma^2}$, состоящий из части контура γ, лежащей в круге $|\lambda| < r$, и из дуги окружности $c_r: |\lambda| = r$, $-\varphi \leqslant \arg\lambda \leqslant \varphi$ (числа a, σ и φ фигурируют в описании контура γ). Затем устремим r к бесконечности.

Так как при фиксированном t функция $G_n(\lambda, t, q)$ представляет собой рациональную функцию с полюсами в точках $\{-\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{n}$ (см. (2.8)), то на дуге c_r будем иметь оценку

$$\left|\frac{p(\lambda)\, e^{-\lambda z}}{W_n(\lambda)}\, G_n(\lambda, t, q)\right| < e^{-\delta r};\ r = |\lambda| > r_0,\ \delta > 0,\ |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Поэтому при $r \to \infty$ интеграл по дуге c_r будет стремиться к нулю, и в пределе получим (2.22).

Теперь составим разность

$$K_n(z, t, p, q) - K(z, t, p, q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} p(\lambda)\, e^{-\lambda z}\left[\frac{G_n(\lambda, t, q)}{W_n(\lambda)} - \frac{G(\lambda, t, q)}{W(\lambda)}\right] d\lambda. \tag{2.23}$$

Мы должны доказать, что эта разность стремится к нулю. Для этого контур γ разобьем на две части $\gamma=\gamma_r^{(1)}+\gamma_r^{(2)}$, где $\gamma_r^{(1)}$ —часть контура γ, лежащая внутри круга $|\lambda|<r$, а $\gamma_r^{(2)}$ — часть контура γ, лежащая вне круга $|\lambda|\leqslant r$, $r>\sqrt{a^2+\sigma^2}$, и интеграл (2.23) представим в виде суммы

$$K_n(z, t, p, q)-K(z, t, p, q)=$$
$$=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r^{(k)}}p(\lambda)\,e^{-\lambda z}\left[\frac{G_n(\lambda, t, q)}{W_n(\lambda)}-\frac{G(\lambda, t, q)}{W(\lambda)}\right]d\lambda. \qquad (2.24)$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве утверждения (1.12), убедимся, что при $n\to\infty$ интеграл в (2.24) по контуру $\gamma_r^{(1)}$ стремится к нулю равномерно на декартовом произведении $K\times K$. Нам остается доказать, что при $r\to\infty$ интеграл в (2.24) по контуру $\gamma_r^{(2)}$ стремится к нулю равномерно на декартовом произведении $K\times K$. Для этого заметим, что из утверждения c) леммы 2.2 следуют оценки

$$|G_n(\lambda, t, q)|\leqslant M;\ |G(\lambda, t, q)|\leqslant M;\ \lambda\in\gamma_r^{(2)},\ t\in K;\ n=1, 2,\cdots,$$

где постоянная M не зависит от r. Поэтому имеем

$$\left|\int_{\gamma_r^{(2)}}p(\lambda)\,e^{-\lambda z}\left[\frac{G_n(\lambda, t, q)}{W_n(\lambda)}-\frac{G(\lambda, t, q)}{W(\lambda)}\right]d\lambda\right|<2M\int_{\gamma_r^{(2)}}\left|\frac{p(\lambda)\,e^{-\lambda z}}{W(\lambda)}\right||d\lambda|.$$

Применяя лемму 2. 1, из этой оценки получим требуемый результат.

Доказательства равенства (2.21) и утверждения b) идентичны доказательствам соответствующих утверждений леммы 2. Докажем утверждение c).

В силу b), утверждение c) равносильно соотношению

$$\int_0^{\infty}|K_n(t, z, 1, p)-K(t, z, 1, p)|^2\,dt\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0. \qquad (2.25)$$

Для доказательства (2.25) представим функцию $K_n(t, z, 1, p)$ в виде

$$K_n(t, z, 1, p)=\underset{r\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m\cdot}}\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\frac{G_n(i\tau, z, p)}{W_n(i\tau)}e^{-it\tau}\,d\tau,\ t>0, \qquad (2.26)$$

где $\mathrm{l\cdot i\cdot m\cdot}$ означает предел в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$.

Для этого заметим, что при фиксированном z функция $G_n(\lambda, z, p)$, как функция от λ, представляет собой рациональную функцию с полюсами в точках $\{-\bar\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ (см. (2.8)), причем $G_n(\lambda, z, p)\underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow}0$. Поэтому в интегральном представлении (2.20) функции $K_n(t, z, 1, p)$ во внешнем интеграле в качестве контура интегрирования Γ_n мы можем взять контур γ_r, состоящий из отрезка мнимой оси $[-ir, ir]$ и полуокружности c_r: $|\xi|=r$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg\xi\leqslant\frac{\pi}{2}$, обходящийся в положительном направлении, и затем применить лемму Жордана при $r\to\infty$. Тогда интеграл по полуокружности c_r будет стремиться к нулю и в результате получим

$$K_n(t,\ z,\ 1,\ p)=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{G_n(i\tau,\ z,\ p)}{W_n(i\tau)}\,e^{-i\tau t}d\tau,\ \ t>0. \tag{2.27}$$

С другой стороны, функция

$$G_n(i\tau,\ z,\ p)\,/\,W_n(i\tau)$$

как функция от τ входит в класс $L^2(-\infty,\ \infty)$, поэтому существует предел в (2.26) и совпадает с пределом в (2.27).

Для завершения доказательства (2.25) мы воспользуемся тем, что преобразование Фурье сохраняет норму в пространстве $L^2(-\infty,\ \infty)$. Поэтому из (2.7′) и (2.26) следует

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}\left|K_n(t,\ z,\ 1,\ p)-\operatorname*{l\cdot i\cdot m}_{r\to\infty}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\frac{G(i\tau,\ z,\ p)}{W(i\tau)}\,e^{-i\tau t}\,d\tau\right|dt=0, \tag{2.28}$$

причем соотношение (2.28) имеет место равномерно относительно z на компактных множествах из угла $|\arg\ z|<\dfrac{\pi}{2}-\varphi$.

С другой стороны, согласно a) последовательность $K_n(t,\ z,\ 1,\ p)$ поточечно сходится к функции $K(t,\ z,\ 1,\ p)$. Поэтому (2.28) и (2.25) равносильны.

Доказательства остальных утверждений леммы идентичны доказательствам соответствующих утверждений леммы 1.2.

Опираясь на доказанные леммы, как и в первом параграфе получаем аналогичные теоремы. Например, аналог теоремы 1.2 формулируется так.

Теорема. 2.2. *Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы* (2)

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{p_n}\ \sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}^{(n)}\,x^s\ e^{-\lambda_k x}$$

сходится к функции f по норме пространства $L^2(0,\infty)$, то на компактных множествах угла $|\arg z|<\dfrac{\pi}{2}-\varphi_0$ она сходится равномерно к функции

$$f(z)=\int_{0}^{\infty}K(z,\ t)\,f(t)\,dt,\ \ |\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varphi_0.$$

Ереванский государственный
университет

Поступила 26. XII. 1984

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ. Էքսպոնենտների ոչ լրիվ սիստեմով մոտարկվող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակությունը և էքստրեմալ խնդիրները (*ամփոփում*)

Դիտարկվում է $L^2(0,\ \infty)$ *-ում ոչ լրիվ էքսպոնենտների սիստեմը՝*

$$\{e^{-\lambda_k x},\ \ x\,e^{-\lambda_k x},\cdots,\ x^{m_k-1}\ e^{-\lambda_k x}\},\ \mathrm{Re}\,\lambda_k>0.$$

Ենթադրելով, որ ցուցիչների $\{\lambda_k\}$ *հաջորդականությունը, բացի ոչ լրիվության պայմանից, բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններից մեկին*

1) $\{\lambda_k\}$ *հաջորդականությունը սահմանափակ է,*

2) $\{\lambda_k\}$ *հաջորդականությունը անսահմանափակ է և բավարարում է*

$$\overline{\lim_{|\lambda_k|\to\infty}} |\arg \lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$$

պայմանին, ապացուցվում է, որ նշված ոչ լրիվ սիստեմի ֆունկցիաների վերջավոր գծային կոմբինացիաներով մոտարկվող ֆունկցիան 1) պայմանի դեպքում անալիտիկ շարունակվում է ամբողջ կոմպլեքս հարթության վրա, իսկ 2) պայմանի դեպքում՝ $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ *անկյան մեջ։*

Մոտարկվող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակությունների համար ապացուցվում են էքստրեմալ գնահատականներ։

V. KCH. MUSOYAN. *Analytic continuation and extremal properties of functions approximable by a non-complete system of exponential functions* (summary)

We consider the non-complete system of functions

$$\{e^{-\lambda_k x},\ x e^{-\lambda_k x},\ \cdots,\ x^{m_k-1}\ e^{-\lambda_k x}\},\ \mathrm{Re}\,\lambda_k > 0,$$

in the space $L^2(0, \infty)$.

Supposing that the sequence of exponents $\{\lambda_k\}$ satisfy one of the following conditions

1) the sequence $\{\lambda_k\}$ is bounded,
2) the sequence $\{\lambda_k\}$ is unbounded and satisfy as the condition

$$\overline{\lim_{|\lambda_k|\to\infty}} |\arg \lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2},$$

We prove that the functions approximable by finite linear combinations of functions of the mentioned non-complete system are analytic continuable in case (1) on the whole complex plane and in case (2) in the angle $|arg\ \lambda| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$.

Extremal estimates for the analytic continuations of the approximable functions given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. A. Clarkson* and *P. Erdos.* Approximation by polynomials, Duke Math. J., 10, 1943, 5—11
2. *L. Schwartz.* Etude des sommes d'exponentielles, 1-ere ed,. Paris, Hermann, 1943, 2—eme ed., Strasbourg, 1959.
3. *А. Ф. Леонтьев.* Об одной последовательности полиномов, ДАН СССР, 72, № 4 1950, 621—624.
4. *М. М. Джрбашян.* О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
5. *В. Х. Мусоян.* Об аналитическом продолжении функций, аппроксимируемых полиномами Дирихле, ДАН Арм.ССР, XLII, № 2, 1966, 73—76.
6. *W. A. J. Luxemburg and J. Korevaar*, Entire functions and Muntz—Szasz type approximations, Transactions,···, June, 157, 1, 1971, 23—37.
7. *М. М. Джрбашян.* Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций, Мат. сб., 114 (156), № 1, 1981, 3—84.
8. *В. Х. Мусоян.* Экстремальные свойства полиномов Дирихле, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 4, 1983, 253—270.
9. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
10. *В. Х. Мусоян.* О системах Дирихле на произвольных множествах, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», IX, № 2, 1974, 121—134.