ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXII, № 6, 1987 Математика

УДК 517.518.4

А. А. СААКЯН

О СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ

Пусть $f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ — 2π-периодическая, интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция и

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx \tag{1}$$

-ряд Фурье функции $f(x)$. Хорошо известна (см., напр., [1], стр 121)

Теорема А. *Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-\pi, \pi]$, то*

а) в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ ряд (1) *сходится к значению* $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$;

б) если, кроме того, $f(x)$ непрывна в каждой точке отрезка $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, то ряд (1) *сходится к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$.*

Эта теорема обобщалась многими авторами (см. [2] — [6]), которые вместо обычной вариации рассматривали различные классы V_Φ функций ограниченной Ф-вариации (см. [1], стр. 287):

$$V_\Phi = \{f(x) : V_\Phi(f) \equiv \sup_{\{x_k\}} \sum_k \Phi(|f(x_{k+1}) - f(x_k)|) < \infty\}, \tag{2}$$

где $\Phi(t)$ $(t \geqslant 0)$ — непрерывная, строго возрастающая функция с $\Phi(0) = 0$. Окончательный результат для классов V_Φ получили Салем (в случае $f \in C(-\pi, \pi)$, [5]) и Гофман (см. [6]):

Теорема Б. *Если функция $\Phi(f)$ выпукла и $\psi(x)$ — дополнительная к ней в смысле Юнга (см.* [1], *стр 32), то при условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi\left(\frac{1}{n}\right) < \infty \tag{3}$$

для любой функции $f \in V_\Phi$ имеют место утверждения а) и б) из теоремы А.

Необходимость условия (3) в теореме Б была доказана независимо К. И. Осколковым [7] и А. Бернштейном [8].

В статье [9] Д. Ватерман рассмотрел новый класс функций ограниченной обобщенной вариации — класс функций ограниченной гармонической вариации HBV:

$$\mathrm{HBV} \equiv \mathrm{HBV}([-\pi, \pi]) = \{f(x) : \mathrm{V}_H(f) \equiv \mathrm{V}_H(f; [-\pi, \pi]) =$$

$$= \sup_n \sum_n \frac{|f(I_n)|}{n} < \infty\},$$

где $f(I)=f(b)-f(a)$, если $I=(a, b)$, а sup берется по всем системам $\{I_n\}_{n=1}^{n_0}$ попарно непересекающихся интервалов из $[-\pi, \pi]$. Справедлива (см. [9])

Теорема В. *Для произвольной функции $f\in$ HBV имеют место утверждения а) и б) теоремы А.*

Эта теорема является обобщением теорем А и Б, так как, в силу неравенства Юнга (см. [1], стр. 32) $ab\leqslant\Phi(a)+\psi(b)$, $(a, b>0)$ при условии (3) класс $V_\Phi\subset$ HBV.

Для двойных рядов Фурье в случае, когда их сходимость определяется по Прингсхейму, т. е. через прямоугольные суммы, аналог теоремы А был доказан Г. Харди (см. [10]). Для этой цели им был определен класс H функций двух переменных ограниченной вариации на прямоугольнике. Б. И. Голубовым были введены классы $H^{\Phi_3}_{\Phi_1\Phi_2}$, обобщающие класс H Харди и доказан аналог теоремы Б для функций двух переменных; им найдены достаточные условия на функции $\Phi_j(x)$, $j=1, 2, 3$, обеспечивающие сходимость по Прингсхейму двойных рядов Фурье функций из классов $H^{\Phi_3}_{\Phi_1\Phi_2}$ (см. подробнее [11]).

В данной работе определяется класс HBV функций ограниченной гармонической вариации для функций двух переменных и доказывается аналог теоремы В для двойных рядов Фурье, обобщающий результат Б. И. Голубова.

§ 1. Определение и вспомогательные результаты

Всюду ниже функция $f(x, y)$ считается измеримой и 2π-периодической по переменным x и y. Пусть I—интервал или отрезок на $(-\infty, \infty)$ с концами a и b. Через $\Omega(I)$ обозначим множество всех (конечных) систем попарно непересекающихся интервалов $I_n=(a_n, b_n)$ с условием $[a_n, b_n]\subset I$. При фиксированном y_0 положим $f(I, y_0)=f(b, y_0)-f(a, y_0)$, через $V_x(f(x, y_0); I)$ обозначим гармоническую вариацию функции $f(x, y_0)$ на I относительно переменной x:

$$V_x(f(x, y_0); I)=\sup_{\{I_n\}\in\Omega(I)}\sum_n\frac{|f(I_n, y_0)|}{n}.$$

Аналогично, при фиксированном x_0 определяются $f(x_0; I)$ и $V_y(f(x_0, y); I)$. Положим также (Δ—отрезок или интервал с концами α и β)

$$f(I, \Delta)=f(a, \alpha)-f(a, \beta)-f(b, \alpha)+f(b, \beta),$$

$$V_{x,y}(f; I\times\Delta)=\sup_{\substack{\{I_n\}\in\Omega(I)\\ \{\Delta_k\}\in\Omega(\Delta)}}\sum_{n,k}\frac{|f(I_n, \Delta_k)|}{n\cdot k}.$$

Определение. *Скажем, что функция $f(x, y)$ имеет ограниченную гармоническую вариацию на прямоугольнике* $D=I\times\Delta$ *($f\in HBV(D)$), если*

---

* Здесь и ниже мы рассматриваем прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат.

$$V_H(f;D)\equiv V_{x,y}(f;D)+V_x(f(x,\alpha);I)+V_y(f(a,y);\Delta)<\infty.$$

Через HBV и $V_H(f)$ обозначим, соответственно, $HBV([-\pi,\pi]^2)$ и $V_H(f;[-\pi,\pi]^2)$.

Лемма 1.1. *Если $f(x,y)\in HBV(D)$, $D=I\times\Delta=[a,b]\times[\alpha,\beta]$, то для произвольных (x,y), $(x',y')\in D$*

а) $V_y(f(x,y);\Delta)\leqslant V_H(f;D)$, $V_x(f(x,y);I)<V_H(D)$,

б) $|f(x,y)-f(x',y')|\leqslant 2\,V_H(f;D)$.

Доказательство. Пусть $x\in I$ и $\{\Delta_k\}\in\Omega(\Delta)$, тогда

$$\sum_k\frac{1}{k}|f(x,\Delta_k)|\leqslant\sum_k\frac{1}{k}|f([a,x]\times\Delta_k)|+\sum_k\frac{1}{k}|f(a,\Delta_k)|\leqslant$$
$$\leqslant V_{x,y}(f;D)+V_y(f(a,y);\Delta)\leqslant V_H(f;D).$$

Следовательно $V_y(f(x,y);\Delta)\leqslant V_H(f;D)$. Аналогично доказывается и второе неравенство а), а б) непосредственно вытекает из а):

$$|f(x,y)-f(x',y')|\leqslant|f(x,y)-f(x',y)|+|f(x',y)-f(x',y')|\leqslant$$
$$\leqslant V_x(f(x,y);I)+V_y(f(x,y);I)\leqslant 2\,V_H(f;D).$$

Лемма 1.2 *Если $f(x,y)\in HBV(D)$, $D=I\times\Delta$ и $g(x)\in HBV(I)$, то функция $F(x,y)=f(x,y)\,g(x)\in HBV(D)$ и*

$V_H(F;D)<\|g\|_{C(I)}V_H(f;D)+\|f\|_{C(D)}\;V_H(g;I)+V_H(f;D).\;V_H(g;I)$

(*здесь* $\|h\|_{C(E)}=\sup\limits_{z\in E}|h(z)|$).

Доказательство леммы 1.2 сразу вытекает из следующих равенств (см. также а) из леммы 1.1)

$$F([a,b],[\alpha,\beta])=g(b)\,f([a,b],[\alpha,\beta])+f(a,[\alpha,\beta])\;g([a,b]);$$
$$F([a,b],\alpha)=g(b)\,f([a,b],\alpha)+f(a,\alpha)\;g([a,b]);$$
$$F(a,[\alpha,\beta])=g(a)\;f(a,[\alpha,\beta]).$$

Замечание. Легко видеть, что если функция $F(x,y)$ принадлежит классу HBV на прямоугольниках D_i, $i=1,2,\cdots,i_0$ и $D=\bigcup\limits_i D_i$ -прямоугольник, то $F(x,y)\in HBV(D)$ и

$$V_H(F;D)\leqslant C\sum_{i=1}^{i_0}V_H(F;D_i). \tag{4}$$

Отсюда и из леммы 1.2 вытекает, что если $F(x,y)=f(x,y)\,g(x,y)$, где $f,g\in HBV(D)$, $D=\bigcup\limits_i^{i_0}D_i$ и на каждом прямоугольнике D_i функция $g(x,y)$ зависит только от x (или от y), то $F(x,y)\in HBV(D)$ и

$$V_H(F;D)\leqslant C(f,g), \tag{5}$$

где $C(f,g)$ зависит только от $\|f\|_{C(D)}$, $\|g\|_{C(D)}$, $V_H(f;D)$. $V_H(g;D)$.

Лемма 1.3 *Пусть $f(x,y)\in HBV(D)$, $D=I\times\Delta$. Если в точке $(x,y)\in D$ существует предел $f(x+0,y+0)=\lim\limits_{\substack{t\to+0\\ s\to+0}}f(x+t,s+t)$, то для любого $p=1,2,\cdots$*

$$I_p^{(q)}(\varepsilon)=\sup\sum_{k=1}^{n_2}\sum_{n=1}^{n_1}\frac{1}{nk}\,|f(I_n,\Delta_k)|\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0\quad (q=1,\,2),$$

где sup *берется по системам* $\{I_n\}_{n=1}^{n_1}\in\Omega((x,\,x+\varepsilon))$, $\{\Delta_k\}_{k=1}^{n_2}\in\Omega\,((y,\,y+\varepsilon))$ *с условием* $n_q\leqslant p$.

Замечание. Как показывает пример функции

$$f\,(x,\,y)=\begin{cases}1, \text{ при } 0<y<x<\pi\\ 0, \text{ в остальных точках квадрата } [-\pi,\,\pi]^2\end{cases},\tag{6}$$

для функции $f\,(x,\,y)\in HBV$ предел $f\,(x+0,\,y+0)$ может не существовать.

Доказательство леммы. Достаточно рассмотреть случай $p=q=1$. Допустим противное, а именно

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, I_1^{(1)}(\varepsilon)=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sup_{\substack{\{\Delta_k\}\in\Omega\,(y,\,y+\varepsilon)\\ I_1\subset(x,\,x+\varepsilon)}}\sum_{k=1}^{k_1}\frac{1}{k}\,|f(I_1,\,\Delta_k)|=\delta>0.\tag{7}$$

Построим по индукции последовательность интервалов

$$I_n=(a_n,\,b_n),\ \Delta_k^{(n)}=(\alpha_k^{(n)},\,\beta_k^{(n)});\ k=1,\,2,\cdots,\,k_n,\ n=1,\,2,\,\cdots.\tag{8}$$

Положим $I_1=(x,\,x+1)$, $\Delta_1^{(1)}=(y,\,y+1)$, $k_1=1$. Допустим, что построены интервалы

$$\{I_m\}_{m=1}^{n-1}\in\Omega\,(x,\,x+1),\ \{\{\Delta_k^{(m)}\}_{k=1}^{k_m}\}_{m=1}^{n-1}\in\Omega\,(y,\,y+1)\tag{9}$$

и построим интервалы I_n, $\{\Delta_k^{(n)}\}_{k=1}^{k_n}$ (при $n=2$ выполнение условий (9) очевидно). Положим

$$\varepsilon_0=\min_{\substack{1<k<k_m\\ 1<m<n}}\{\rho\,(I_m,\,x),\ \rho\,(\Delta_k^{(m)},\,y)\},\tag{10}$$

где $\rho(I,\,x)=\inf\limits_{t\in I}|t-x|$ и учитывая, что существует предел $f\,(x+0,\,y+0)$, найдем число ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ такое, что

$$|f(t,\,s)-f\,(t',\,s')|<\delta\left(6\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\frac{1}{k}\right)^{-1} \text{при } t,\,t'\in(x,\,x+\varepsilon);\ s,\,s'\in(y,\,y+\varepsilon).\tag{11}$$

В силу (7) существуют интервалы

$$I_n\subset(x,\,x+\varepsilon),\ \{\Delta_k^{(n)}\}_{k=1}^{k_n}\in\Omega\,(y,\,y+\varepsilon)\tag{12}$$

такие, что

$$\sum_{k=1}^{k_n}\frac{1}{k}\ \ |f\,(\,I_n,\,\Delta_k^{(n)})\,|>\frac{2}{3}\,\delta.\tag{13}$$

Интервалы (8) построены. Выполнение условия (9) для любого $n=2,\,3,\cdots$ вытекает из (10) и (12). Отметим также, что в силу (11)

$$\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\frac{1}{k}\,|\,f\,(I_n,\,\Delta_k^{(n)}\,)\,|\ \leqslant 2\,\delta\left(6\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\frac{1}{k}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\frac{1}{k}=\frac{\delta}{3}$$

и поэтому

$$\sum_{k=k_{n-1}+1}^{k_n} \frac{1}{k} \, | f (I_n, \Delta_k^{(n)}) | > \frac{\delta}{3} \cdot \tag{14}$$

Положим

$$\Delta_k = \Delta_k^{(n)}, \text{ при } k_{n-1} < k \leqslant k_n, \quad n = 2, 3, \cdots . \tag{15}$$

Согласно (9) для любого $N = 1, 2, \cdots$

$$\{I_n\}_{n=1}^{N} \in \Omega (x, x+1), \quad \{\Delta_k\}_{k=1}^{k_N} \in \Omega (y, y+1),$$

а в силу (14) и (15) при $N = 2, 3, \cdots$

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{k_N} \frac{1}{kn} | f (I_n, \Delta_k) | \geqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \sum_{k=k_{n-1}+1}^{k_n} \frac{1}{k} \, | f (I_n, \Delta_k^{(n)}) | \geqslant \frac{\delta}{3} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n},$$

что противоречит условию $f \in \mathrm{HBV}\,(D)$. Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Пусть $f(x, y) \in \mathrm{HBV}\,(D)$, $D = I \times \Delta$. Тогда*

а) если в точке $(x, y) \in D$ существует предел $f(x+0, y+0)$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V_H (f; (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)) = 0; \tag{16}$$

б) *если $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке открытого множества $E \subset D$, то для любого компакта $K \subset E$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V_H (f; (x - \varepsilon, x+\varepsilon) \times (y - \varepsilon, y+\varepsilon)) = 0 \tag{17}$$

равномерно по $(x, y) \in K$.

Доказательство. а) Так как (см. [12], теорема 3) для $(x, y) \in D$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V_t (f (t, y); (x, x+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} V_s (f (x, s); (y, y+\varepsilon)) = 0,$$

то достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V_{t,s} (f (t, s); (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)) = 0. \tag{17'}$$

Допустим противное:

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \, V_{t,s} (f (t, s); (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)) = \delta, \quad 0 < \delta < \infty. \tag{18}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Согласно (18) существуют системы интервалов

$$\{I_n\} \equiv \{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{n_0} \in \Omega \, (x, x+\varepsilon),$$

$$\{\Delta_k\} \equiv \{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^{k_0} \in \Omega \, (y, y+\varepsilon) \tag{19}$$

такие, что

$$\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{nk} | f (I_n, \Delta_k) | \geqslant \frac{3}{4} \delta. \tag{20}$$

Используя лемму 1.3, найдем число ε_0,

$$0 < \varepsilon_0 < \min_{\substack{1 < n < n_0 \\ 1 < k < k_0}} \{a_n - x, \alpha_k - y\} \tag{21}$$

такое, что

$$I_{n_0}^{(1)}(\varepsilon_0)+I_{k_0}^{(2)}(\varepsilon_0)\leqslant\frac{\delta}{4}. \tag{22}$$

Теперь, учитывая (18), найдем системы интервалов

$$\{I_n^{(1)}\}_{n=1}^{n_1}\in\Omega(x,\ x+\varepsilon_0),\quad \{\Delta_k^{(1)}\}_{k=1}^{k_1}\in\Omega\ (y,\ y+\varepsilon_0) \tag{23}$$

такие, что

$$\sum_{n=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{k_1}\frac{1}{nk}|f(I_n^{(1)},\Delta_k^{(1)})|\geqslant\frac{3}{4}\delta. \tag{24}$$

Из (22) и (24) следует, что $n_1>n_0$, $k_1>k_0$ и

$$\sum_{n=n_0+1}^{n_1}\sum_{k=k_0+1}^{k_1}\frac{1}{nk}|f(I_n^{(1)},\Delta_k^{(1)})|\geqslant\frac{3}{4}\delta-$$

$$-\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{k=1}^{k_1}\frac{1}{nk}|f(I_n^{(1)},\Delta_k^{(1)})|-\sum_{n=n_0+1}^{n_1}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{nk}|f(I_n^{(1)},\Delta_k^{(1)})|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{3}{4}\delta-I_{n_0}^{(1)}(\varepsilon)-I_{k_0}^{(2)}(\varepsilon)\geqslant\frac{1}{2}\delta. \tag{25}$$

Положим

$$I_n^{(2)}=\begin{cases}I_n & \text{при } 1\leqslant n\leqslant n_0\\ I_n^{(1)} & \text{при } n_0+1\leqslant n\leqslant n_1\end{cases},\quad \Delta_k^{(2)}=\begin{cases}\Delta_k & \text{при } 1\leqslant k\leqslant k_0\\ \Delta_k^{(1)} & \text{при } k_0+1\leqslant k\leqslant k_1\end{cases}. \tag{26}$$

Тогда, согласно (19), (21) и (23) $\{I_n^{(2)}\}\in\Omega(x,\ x+\varepsilon)$, $\{\Delta_n^{(2)}\}\in\Omega(y,\ y+$ $+\varepsilon)$ и в силу (20), (25) и (26)

$$\sum_{n=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{k_1}\frac{1}{nk}|f(I_n^{(2)},\Delta_k^{(2)})|>\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{nk}|f(I_n,\Delta_k)|+$$

$$+\sum_{n=n_0+1}^{n_1}\sum_{k=k_0+1}^{k_1}\frac{1}{nk}|f(I_n^{(1)},\Delta_k^{(1)})|>\frac{3}{4}\delta+\frac{\delta}{2}=\frac{5}{4}\delta.$$

Следовательно, $V_{t,s}(f;\ (x,\ x+\varepsilon)\times(y,\ y+\varepsilon))\geqslant\frac{5}{4}\delta$, что, в силу произвольности числа $\varepsilon>0$, противоречит условию (18).

б) Аналогично п. а) можно доказать, что для $(x,\ y)\in D$

$$\lim_{\varepsilon\to0}V_H(f;\ (x,\ x\pm\varepsilon)\times(y,\ y\pm\varepsilon))=0.$$

Отсюда и из (4), учитывая, что для непрерывных функций

$$V_H(f;\ [x,\ x+\varepsilon]\times[y,\ y+\varepsilon])=V_H(f;\ (x,\ x+\varepsilon)\times(y,\ y+\varepsilon)),$$

вытекает равенство (16) для $(x,\ y)\in E$. Докажем, что (16) итеет место равномерно по $(x,\ y)\in K$. Допустим противное: существует число $\delta_0>0$ и последовательности $(x_i,\ y_i)\in K$, $i=1,\ 2,\cdots$ и $\varepsilon_i\to0$ такие, что

$$V_H(f;\ (x_i-\varepsilon_i,\ x_i+\varepsilon_i)\times(y_i-\varepsilon_i,\ y_i+\varepsilon_i))>\delta_0.$$

В силу компактности K, можем считать, что $(x_i,\ y_i)\to(x_0,\ y_0)\in K$ при $i\to\infty$. Но тогда для произвольного $\varepsilon>0$ при достаточно больших i будем иметь, что $(x_i-\varepsilon_i,\ x_i+\varepsilon_i)\times(y_i-\varepsilon_i,\ y_i+\varepsilon_i)\subset(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)\times(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$ и следовательно

$$V_H(f;\ (x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)\times(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon))\geqslant$$
$$\geqslant V_H(f;(x_i-\varepsilon_i,\ x_i+\varepsilon_i)\times(y_i-\varepsilon_i,\ y_i+\varepsilon_i))\geqslant\delta_0,$$

что противоречит (16). Лемма 1. 4 доказана.

Нам потребуется также следующая лемма, которая фактически доказана в работе [13] (см. стр. 45—47).

Лемма 1. 5. *Если* $g(x)\in HBV$, *то для произвольных* a *и* b, $-\pi\leqslant a<b\leqslant\pi$

$$\left|\int_a^b g(t)\frac{\sin nt}{t}\,dt\right|\leqslant C\,[V_H(g;(a,\ b))+\|g\|_{C\,(a,\,b)}].$$

§ 2. Основная теорема

Обозначим через $S_{N,M}(f,\ x,\ y)$ прямоугольную частичную сумму ряда Фурье функции $f(x,\ y)\in L^1([-\pi,\ \pi]^2)$:

$$S_{N,M}(f,\ x,\ y)=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-M}^{M}c_{n,m}\,e^{i\,(nx+my)},\quad N,\ M=0,1,\cdots,$$

где

$$c_{n,m}=c_{n,m}(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,\ y)\,e^{-i\,(nx+my)}\,dx\,dy$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x,\ y)$. Положим также

$$\sum f(x\pm0,\ y\pm0)=f(x+0,\ y+0)+f(x+0,\ y-0)+$$
$$+f(x-0,\ y+0)+f(x-0,\ y-0),\tag{27}$$

если все пределы в (27) существуют.

Теорема. *Если* $f(x,\ y)\in HBV$, *то*

1) *в каждой точке, где существуют пределы (27) имеет место равенство*

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}S_{N,M}(f,\ x,\ y)=\frac{1}{4}\sum f(x\pm0,\ y\pm0);\tag{28}$$

2) *если, кроме того,* $f(x,\ y)$ *непрерывна в точках открытого множества* $E\subset[-\pi,\ \pi]^2$, *то (28) имеет место равномерно на каждом компакте* $K\subset E$.

Замечание. Пример функции (6) показывает, что если в некоторой точке $(x,\ y)$ не существует один из пределов (27), то ряд Фурье функции $f(x,\ y)\in HBV$ может не сходиться по Прингсхейму в этой точке (см. [14]).

Лемма 2.1. *Пусть* $f(x,\ y)$, $g(x,\ y)\in HBV$, *при этом на прямоугольниках* D_i, $i=1,\ 2,\cdots,\ i_0$, $\bigcup D_i=[-\pi,\ \pi]^2$ *функция* $g(x,\ y)$

зависит только от x или только от y. Тогда для произвольных $x, y\in[-\pi, \pi]$, $N, M=2, 3,\cdots$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s)\, g(t, s)\frac{\sin Nt}{t} e^{iMs}\, dt\, ds\right|\leqslant C\frac{C(f, g)}{\ln M}, \quad (29)$$

где C—абсолютная постоянная, а $C(f, g)$—постоянная из неравенства (5).

Пусть x, y, N, M фиксированы и $F(t, s)=f(x+t, y+s)\, g(t, s)$, $t, s\in[-\pi, \pi]$. Положим

$$\varphi(s)=\int_{-\pi}^{\pi} F(t, s)\frac{\sin Nt}{t}\, dt.$$

В силу неравенства (см. [15])

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(s)\, e^{iMs}\, ds\right|\leqslant C\frac{V_H(\varphi; [-\pi, \pi])}{\ln M}, \ M=2, 3,\cdots,$$

нам достаточно доказать, что

$$V_H(\varphi; [-\pi, \pi])\leqslant C\cdot C(f, g). \quad (30)$$

Пусть $\{\Delta_k\}\equiv\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^{k_0}\in\Omega([-\pi, \pi])$. Тогда, обозначив $\varepsilon_k=\operatorname{sign}\varphi(\Delta_k)$, мы будем иметь

$$I\equiv\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{k}|\varphi(\Delta_k)|=\sum_{k=1}^{k_0}\frac{\varepsilon_k}{k}\int_{-\pi}^{\pi}[F(t, \beta_k)-F(t, \alpha_k)]\frac{\sin Nt}{t}\, dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\frac{\sin Nt}{t}\, dt,$$

где

$$\psi(t)=\sum_{k=1}^{k_0}\frac{\varepsilon_k}{k}[F(t, \beta_k)-F(t, \alpha_k)].$$

Следовательно (см. лемму 1.5)

$$I\leqslant C[V_H(\psi; [-\pi, \pi])+\|\psi\|_{C(-\pi, \pi)}]. \quad (31)$$

В силу леммы 1. 1, п. а)

$$\|\psi\|_{C(-\pi, \pi)}\leqslant\sup_{t\in[-\pi, \pi]} V_s(F(t, s); [-\pi, \pi])\leqslant V_H(F; [-\pi, \pi]^2). \quad (32)$$

Оценим $V_H(\psi; [-\pi, \pi])$. Пусть $\{I_n\}_{n=1}^{n_0}\in\Omega([-\pi, \pi])$, тогда

$$\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{n}|\psi(I_n)|\leqslant\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{nk}|F(I_n, \Delta_k)|\leqslant V_H(F; [-\pi, \pi]^2).$$

Отсюда, из (31) и (32), в силу замечания после леммы 1.2, (см. (5)) получим, что

$$I\leqslant C\, V_H(F; [-\pi, \pi]^2)\leqslant C\cdot C(f, g).$$

Оценка (30), а следовательно и лемма 2.1 доказаны.

Лемма 2.2 *Если* $f(x, y) \in HBV$, *то для любого* $\varepsilon > 0$

$$S_{N,M}(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \cdot \frac{\sin Ms}{s} \, dt \, ds + o(1), \quad (33)$$

где $o(1)$ *стремится к нулю при* $N, M \to \infty$ *равномерно по* $(x, y) \in \in [-\pi, \pi]^2$.

Замечание. Из леммы 2.2, в частности вытекает, что для функций из класса HBV имеет место принцип локализации: если $f(x, y) = 0$ на открытом множестве $E \subset [-\pi, \pi]^2$, то $S_{N,M}(f, x, y) \to \to 0$ при $N, M \to \infty$ равномерно на каждом компакте $K \subset E$. Этот факт для функций $f(x, y)$ с условием $V_x(f(x, y)) \in L^1(-\pi, \pi)$, $V_y(f(x, y)) \in \in L^1(-\pi, \pi)$ был доказан Г. Гофманом и Д. Ватерманом, однако доказательство равномерной сходимости в этой работе неполное.

Доказательство леммы. Имеем равенство

$$S_{N,M}(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) D_N(t) D_M(s) \, dt \, ds, \quad (34)$$

где $D_N(t) = \left[\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right] \Big/ 2 \sin \frac{t}{2}$ — ядро Дирихле. Обозначив

$$g(t) = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, \quad 0 < |t| \leqslant \pi, \quad g(0) = 0,$$

мы находим, что

$$D_N(t) = \frac{\sin Nt}{t} + g(t) \sin Nt + \frac{1}{2} \cos Nt, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

и, согласно (34)

$$\pi^2 S_{N,M}(f, x, y) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \frac{\sin Ms}{s} \, dt \, ds +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\varepsilon < |t| < \pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \frac{\sin Ms}{s} \, dt \, ds +$$

$$+ \int_{\varepsilon < |s| < \pi} \int_{|t| < \varepsilon} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \frac{\sin Ms}{s} \, dt \, ds +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t, y+s) \frac{\sin Nt}{t} \left[g(s) \sin Ms + \frac{1}{2} \cos Ms \right] dt \, ds +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,\ y+s)\frac{\sin Ms}{s}\left[g(t)\sin Nt+\frac{1}{2}\cos Nt\right]dt\,ds+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,\ y+s)\left[g(t)\sin Nt+\frac{1}{2}\cos Nt\right]\left[g(s)\sin Ms+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos Ms\right]dt\,ds\equiv\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,\ y+s)\frac{\sin Nt}{t}\frac{\sin Ms}{s}dt\,ds+$$

$$+\sum_{p=1}^{5} J_{N,M}^{(p)}(x,\ y).$$

Остается доказать, что при $p=1,\ 2,\cdots,5$

$$\lim_{N,\ M\to\infty} J_{N,M}^{(p)}(x,\ y)=0$$

равномерно по $(x,\ y)\in[-\pi,\ \pi]^2$. При $p=1,\ 2,\ 3,\ 4$ это вытекает из леммы 2.1 (при соответствующем выборе функции $g(t,\ s)$), а при $p=5$—из того, что коэффициенты Фурье $c_{n,m}(F)$ функции $F(s,\ t)=f(x+t,\ y+s)\ g(t,\ s)$, где $f(x,\ y)\in L^1([-\pi,\ \pi]^2)$, а $g(t,\ s)$ ограничена, стремятся к нулю при $|n|+|m|\to\infty$ равномерно по $(x,\ y)\in[-\pi,\ \pi]^2$ (см., например, [16]).

Доказательство теоремы. Согласно леммам 1.4 и 2.2 теорема будет доказана, если мы покажем, что для произвольных $(x,\ y)\in[-\pi,\ \pi]^2$, $\varepsilon>0$

$$\left|\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,\ y+s)\frac{\sin Nt}{t}\frac{\sin Ms}{s}dt\,ds-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sum f(x\pm 0,\ y\pm 0)\right|\leqslant C\sum V_H(f;(x,x\pm\varepsilon)\times(y,\ y\pm\varepsilon))+o(1), \quad (35)$$

где C—абсолютная постоянная, $o(1)\to 0$ при $N,\ M\to\infty$ равномерно при $(x,\ y)\in[-\pi,\ \pi]^2$. Неравенство (35) достаточно доказать в случае $(++)$, т. е. доказать, что

$$|I|\equiv\left|\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(x+t,\ y+s)\frac{\sin Nt}{t}\frac{\sin Ms}{s}dt\,ds-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}f(x+0,\ y+0)\right|\leqslant C\ V_H(f;(x,\ x+\varepsilon)\times(y,\ y+\varepsilon)).$$

Выберем натуральные числа $n_0\ k_0$ так, что

$$\frac{2n_0-1}{N}\pi\leqslant\varepsilon<\frac{2n_0+1}{N}\pi,\ \frac{2k_0-1}{M}\pi\leqslant\varepsilon<\frac{2k_0+1}{M}\pi.$$

Имеем (см. (33) при $f\equiv 1$)

$$\pi^2 I=\int\limits_0^{\varepsilon}\int\limits_0^{\varepsilon}[f(x+t,\ y+s)-f(x+0,\ y+0)]\,\frac{\sin Nt}{t}\,\frac{\sin Ms}{s}\,dt\,ds+o(1)=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{M}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{N}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{M}}\int\limits_{\frac{\pi}{N}}^{\varepsilon}+\int\limits_{\frac{\pi}{M}}^{\varepsilon}\int\limits_0^{\frac{\pi}{N}}+\int\limits_{\frac{2k_0-1}{M}}^{\varepsilon}\int\limits_{\frac{\pi}{N}}^{\varepsilon}+\int\limits_{\frac{\pi}{M}}^{\frac{2k_1-1}{M}\pi}\int\limits_{\frac{2n_0-1}{M}\pi}^{\varepsilon}\int\limits_{\frac{\pi}{M}}^{\frac{2k_0-1}{M}\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{N}}^{\frac{2n_0-1}{N}\pi}+$$

$$+o(1)\equiv\sum_{p=1}^{6}I_p+o(1).$$

Нужно доказать, что

$$|I_p|\leqslant C\ V_H\,(f;\,(x,\ x+\varepsilon)\times(y,\ y+\varepsilon)),\quad p=1,\ 2,\cdots,6. \tag{36}$$

При $p=1$ (36) непосредственно вытекает из леммы 1.1, п. 6). Согласно леммам 1.1 и 1.5 для любого $s\in[-\pi,\ \pi]$

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{N}}^{\varepsilon}\left[f(x+t,\ y+s)-f(x+0,\ y+0)\right]\frac{\sin Nt}{t}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\Big[V_t\,(f(x+t,y+s);(0,\varepsilon))+\sup_{t\in(0,\,\varepsilon)}|f(x+t,\ y+s)-f(x+0,\ y+0)|\Big]\leqslant$$

$$\leqslant C\ V_H\,(f;\,(x,\ x+\varepsilon)\times(y,\ y+\varepsilon)),$$

откуда вытекает (36) при $p=2$. Аналогично доказывается (36) при $p=3,\ 4,\ 5$. Остается рассмотреть случай $p=6$. Обозначим $\varphi(t,\ s)=f(x+t,\ y+s)-f(x+0,\ y+0)$, тогда

$$I_6=\sum_{n=1}^{2n_0-2}\sum_{k=1}^{2k_0-2}\int\limits_{\frac{k}{M}\pi}^{\frac{k+1}{M}\pi}\int\limits_{\frac{n}{N}\pi}^{\frac{n+1}{N}\pi}\varphi(t,\ s)\,\frac{\sin Nt}{t}\,\frac{\sin Ms}{s}\,dt\,ds=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{n=1}^{2n_0-1}{}'\sum_{k=1}^{2k_0-1}{}'\,Q_{nk}(t,\ s)\sin t\sin s\,dt\,ds, \tag{37}$$

где $\sum'$ означает суммирование только по нечетным значениям индекса, а

$$Q_{nk}(t,s)=\frac{\varphi\left(\dfrac{t+n\pi}{N},\ \dfrac{s+k\pi}{M}\right)}{(t+n\pi)\ (s+k\pi)}-\frac{\varphi\left(\dfrac{t+(n+1)\pi}{N},\ \dfrac{s+k\pi}{M}\right)}{(t+(n+1)\pi)\ (s+k\pi)}-$$

$$-\frac{\varphi\left(\dfrac{t+n\pi}{N},\ \dfrac{s+(k+1)\pi}{M}\right)}{(t+n\pi)\ (s+(k+1)\pi)}+\frac{\varphi\left(\dfrac{t+(n+1)\pi}{N},\ \dfrac{s+(k+1)\pi}{M}\right)}{(t+(n+1)\pi)\ (s+(k+1)\pi)}.$$

Обозначим

$$\Delta_h^{(1)}f(u,\ v)=f(u+h,\ v)-f(u,\ v),\ \Delta_h^{(2)}f(u,v)=f(u,v+h)-f(u,\ v),$$

Тогда $Q_{nk}(t, s)$ можно представить в виде

$$Q_{nk}(t, s) = \frac{1}{(t+n\pi)(s+k\pi)} \Delta^{(1)}_{\frac{\pi}{N}} \Delta^{(2)}_{\frac{\pi}{M}} \varphi\left(\frac{t+n\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right) +$$

$$+ \pi \frac{1}{(t+n\pi)(s+k\pi)(s+(k+1)\pi)} \Delta^{(1)}_{\frac{\pi}{N}} \varphi\left(\frac{t+n\pi}{N}, \frac{s+(k+1)\pi}{M}\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{(t+n\pi)(t+(n+1)\pi)(s+(k+1)\pi)} \Delta^{(2)}_{\frac{\pi}{M}} \varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right) +$$

$$+ \frac{\pi^2}{(t+n\pi)(t+(n+1)\pi)(s+k\pi)(s+(k+1)\pi)} \varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right).$$

Следовательно, при $(t, s) \in [0, \pi]^2$ (см. лемму 1.1)

$$\sum_{n=1}^{2n_0-1}{}' \sum_{k=1}^{2k_0-1}{}' |Q_{n,k}(t, s)| < \sum_n{}' \sum_k{}' \left| \Delta^{(1)}_{\frac{\pi}{N}} \Delta^{(2)}_{\frac{\pi}{M}} \varphi\left(\frac{t+n\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)\right| \cdot \frac{1}{nk} +$$

$$+ \sum_n{}' \sum_k{}' \frac{1}{nk^2} \left| \Delta^{(1)}_{\frac{\pi}{N}} \varphi\left(\frac{t+n\pi}{N}, \frac{s+(k+1)\pi}{M}\right)\right| +$$

$$+ \sum_n{}' \sum_k{}' \frac{1}{n^2 k} \left| \Delta^{(2)}_{\frac{\pi}{M}} \varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)\right| +$$

$$+ \sum_n{}' \sum_k{}' \frac{1}{n^2 k^2} \left| \varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, \frac{s+k\pi}{M}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant V_{t,s}(\varphi(t, s); (0, \varepsilon)^2) + \sum_k \frac{1}{k^2} V_t\left(\varphi\left(t, \frac{s+(k+1)\pi}{M}\right); (0, \varepsilon)\right) +$$

$$+ \sum_n \frac{1}{n^2} V_s\left(\varphi\left(\frac{t+(n+1)\pi}{N}, s\right); (0; \varepsilon)\right) +$$

$$+ \sum_{n,k} \frac{1}{n^2 k^2} \|\varphi\|_{C((0,\varepsilon)^2)} \leqslant C\, V_H(f; (x, x+\varepsilon) \times (y, y+\varepsilon)).$$

Отсюда и из (37) получаем (36) при $p=6$. Неравенство (35), а следовательно и теорема, доказаны.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 27. V. 1985

Ա. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ. Սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիաների Ֆուրյեի կրկնակի շարքերի զուգամիտության մասին) *(ամփոփում)*

Հոդվածում սահմանվում է սահմանափակ հարմոնիկ վարիացիայի ֆունկցիաների դասը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար և ապացուցվում է, որ այդ դասի ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը զուգամիտում է Պրինգսհեյմի մեթոդով ամեն մի կետում, որտեղ գոյություն ունեն $f(x \pm 0, y \pm 0)$ *սահմանները, ընդ որում, զուգամիտությունը հավասարաչափ է, եթե ֆունկցիան անընդհատ է։*

A. A. SAHAKIAN, *On convergence of double Fourier series of functions of bounded harmonic variation* (summary)

Convergence of double Fourier series of functions of bounded harmonic variation in any point where $f(x \pm 0, y \pm 0)$ exists is proved. The convergence is uniform, when $f(x, y)$ is continuous.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, Физматгиз, 1961.
2. *N. Wiener.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients Massachusetts J. Math., 3. 1924, 72—94.
3. *J. Marcinkiewicz.* On a klass of funktions and their Fourier series. Compt. Rend. Soc. Sci. Varsowie, 26, 1934, 71—77.
4. *L. C. Young.* General inequalities for Stiltjes integrals and the convergence of Fouricr series, Mat. Ann., 115, 1938, 581—612.
5. *R. Salem.* Essais sur les series trigonometriques, Actualite Sci. et industr., 862, 1940, Paris.
6. *C. Goffman.* Everyvhere convergence of Fourier series, Indiana Univ. Math. J. 20, № 2, 1970, 107—112.
7. *К. И. Осколков.* Обобщенная вариация, индикатриса Банаха и равномерная сходимость рядов Фурье, Мат. заметки, 12, № 3, 1972, 313—324.
8. *A. Baernstein.* On the Fourier series of functions of bounded Ф-variation, Studia Math., 42, № 3, 1972, 243—248.
9. *D. Waterman.* On convergence of Fourier series of functions of generalazed boun, ded variation, Studia Math., 44, № 1, 1906, 107—117.
10. *G. H. Hardy.* Oo double Fourier series and espesiasially those which represen- the double zeta-function with reale and inkommensurable parameters, Quart. J. Math., 37, № 1, 1906, 53—79.
11. *В. И. Голубов.* О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной обобщенной вариации, Сиб. мат. ж., 15, № 2, 1974, 262—292.
12. *D. Waterman.* On Λ-bounded variation, Studia Math., 57, № 1, 1976, 33—45.
13. *C. Goffman. D. Waterman.* The localization principle for Fourier series, Studia Math., 99, № 1, 1980, 41—57.
14. *F. Ustina.* Convergence of double Fourier series, Ann. Mat., pure et appl., 85, 1970, 21—47.
15. *M. Schramm, D. Waterman.* On the magnitude of Fourier coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 85, № 3, 1982, 408—410.
16. *И. Е. Жак.* О сопряженных двойных тригонометрических рядах, Мат. сб., 31, № 3, 1952, 469—484.