ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXI, № 5, 1986 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.547

А. О. КАРАПЕТЯН

ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ДЕКАРТОВОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ

1 (а). Обозначим через $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{R}^n$ (где $n \geqslant 1$ любое) обычные координатные пространства комплексных и действительных чисел соответственно. Кроме того, при произвольном $n \geqslant 1$ пусть

$$\Pi_+^n = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n, \ \operatorname{Im} z_j > 0 \ (1 \leqslant j \leqslant n)\} \tag{1.1}$$

обозначает декартово произведение полуплоскостей в $\mathbf{C}^n$, а

$$\mathbf{R}_+^n = \{y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \ y_j > 0 \ (1 \leqslant j \leqslant n)\} \tag{1.2}$$

обозначает декартово произведение положительных полуосей в $\mathbf{R}^n$. Далее, для $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ мы часто будем использовать следующие сокращенные обозначения:

$$z = x + iy, \tag{1.3}$$

где $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$, $z_j = x_j + iy_j \ (1 \leqslant j \leqslant n)$,

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \tag{1.4}$$

где $r = (r_1, \cdots, r_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, $z_j = r_j e^{i\varphi_j} \ (1 \leqslant j \leqslant n)$. Договоримся также, что если $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ или $r = (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbf{R}_+^n$, то

$$dx = dx_1 \cdots dx_n, \ dr = dr_1 \cdots dr_n. \tag{1.5}$$

Пусть $p \in (0; +\infty)$. Обозначим через $H^p(\Pi_+^n)$ и $G^p(\Pi_+^n)$ пространства голоморфных в Π_+^n функций $f(z) \equiv f(z_1, \cdots, z_n)$, для которых

$$\|f\|_{H^p} \equiv \sup_{y_j > 0} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x + iy)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty \tag{1.6}$$

и соответственно

$$\|f\|_{G^p} \equiv \sup_{0 < \varphi_j < \pi} \left(\int_{\mathbf{R}_+^n} |f(r \cdot e^{i\varphi})|^p dr \right)^{1/p} < +\infty. \tag{1.7}$$

В данной статье анонсируется следующее основное утверждение

$$H^p(\Pi_+^n) = G^p(\Pi_+^n), \ p \in (1; +\infty) \tag{1.8}$$

и намечается краткая схема его доказательства.

Отметим, что эта важная теорема впервые была установлена М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [1] для $p = 2$ и $n = 1$, затем С. А. Акопяном [2] и А. М. Седлецким [3] для $p \in (0; +\infty)$ и $n = 1$. Позже эти результаты были повторены в работе А. Б. Кевички [4], где равенство (1.8) вновь было доказано для $n = 1$, но другим методом и лишь для значений $p \in (1; +\infty)$. Предлагаемое нами доказательство утверждения (1.8) проводится способом, сходным с тем, который применен в работе [4]. Отметим, наконец, что только ради упрощения записи изложение в статье проводится для $n = 2$.

(б). Введем необходимые для дальнейшего обозначения

$$\Pi_+ = \{z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Im} z > 0\},\ \Pi_- = \{z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Im} z < 0\}. \tag{1.9}$$

В этих обозначениях будем иметь $\Pi^1_+ = \Pi_+$, $\Pi^2_+ = \Pi_+ \times \Pi_+$. Ядро Пуассона для Π^2_+ определяется формулой

$$P(t,\ y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y_1}{t_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y_2}{t_2^2 + y_2^2}, \tag{2.10}$$

где $t = (t_1,\ t_2) \in \mathbf{R}^2$, $y = (y_1,\ y_2) \in \mathbf{R}^2_+$.

Далее, если $y = (y_1,\ y_2) \in \mathbf{R}^2_+$, то договоримся писать $y \to 0$, если и $y_1 \to 0$ и $y_2 \to 0$. Кроме того, полагаем всюду дальше, что $p \in (1; +\infty)$.

в). Справедлива следующая теорема, все утверждения которой в явной или неявной форме содержатся в монографии [5].

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = f(x + iy) \in H^p(\Pi^2_+)$ *Тогда*:

1°. *Для почти всех* $x \in \mathbf{R}^2$ *существует предел*

$$\lim_{y \to 0} f(x + iy) = F(x) \in L^p(\mathbf{R}^2), \tag{1.11}$$

при этом

$$\|f\|_{H^p} = \|F\|_{L^p},\quad \lim_{y \to 0} \int_{\mathbf{R}^2} |f(x + iy) - F(x)|^p\, dx = 0. \tag{1.12}$$

2°. *Имеют место формулы*

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{F(t_1,\ t_2)\, dt_1 dt_2}{(t_1 - z_1)\cdot(t_2 - z_2)} = \begin{cases} f(z_1,\ z_2),\ (z_1,\ z_2) \in \Pi_+ \times \Pi_+ \\ 0,\ (z_1,\ z_2) \in \Pi_+ \times \Pi_- \cup \Pi_- \times \Pi_+ \cup \Pi_- \times \Pi_-, \end{cases} \tag{1.13}$$

$$f(z) = f(x + iy) = \int_{\mathbf{R}^2} F(t)\cdot P(x - t,\ y)\, dt,\ z \in \Pi^2_+. \tag{1.14}$$

2 (а). Введем новые обозначения. Пусть для $j = 1, 2$

$$\Delta_j = \{z_j \in \mathbf{C},\ z_j \neq 0,\ \theta_{j1} < \operatorname{Arg} z_j < \theta_{j2}\} \tag{2.1}$$

суть угловые области, а $\Delta^*_j = C\bar{\Delta}_j$ $(j = 1,\ 2)$ — их дополнения. При этом предполагается, что $0 < \theta_{j2} - \theta_{j1} \leq 2\pi$ $(j = 1,\ 2)$. Обозначим через $G^p(\Delta_1 \times \Delta_2)$ пространство голоморфных в $\Delta_1 \times \Delta_2 \subset \mathbf{C}^2$ функций $f(z) \equiv f(z_1,\ z_2)$, для которых

$$\|f\|_{G^p} = \sup_{\theta_{j1} < \varphi_j < \theta_{j2}} \left(\int_{\mathbf{R}^2_+} |f(r \cdot e^{i\varphi})|^p\, dr \right)^{1/p} < +\infty, \tag{2.2}$$

где $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)$. Таким образом, при специальном выборе Δ_1 и Δ_2 будем иметь $G^p(\Delta_1\times\Delta_2)=G^p(\Pi_+^2)$.

б) В дальнейшем нам понадобится следующее полезное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $f\in G^p(\Delta_1\times\Delta_2)$ *и при* $j=1, 2: \theta_{j1}<\varepsilon_{j1}<\varepsilon_{j2}<\theta_{j2}$. *Тогда существует положительное число* $M<+\infty$, *зависящее лишь от выбора* ε_{j1}, ε_{j2} *и такое, что*:

$$(r_1\cdot r_2)^{1/p}\cdot|f(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})|\leqslant M\cdot\|f\|_{G^p} \tag{2.3}$$

при всех $0<r_j<+\infty$, $\varepsilon_{j1}\leqslant\varphi_j<\varepsilon_{j2}$ $(j=1, 2)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(w_1, w_2)=e^{w_1/p}\cdot e^{w_2/p}\cdot f(e^{w_1}, e^{w_2}), \tag{2.4}$$

где $\theta_{j1}<\operatorname{Im} w_j<\theta_{j2}$ $(j=1, 2)$. Тогда F, как функция комплексных переменных w_1, w_2 голоморфна во всей области своего определения, при этом

$$\|F\|_{H^p}\equiv\sup_{\theta_{j1}<v_j<\theta_{j2}}\left(\int_{R^2}|F(u+iv)|^p\,du\right)^{1/p}=\|f\|_{G^p}<+\infty, \tag{2.5}$$

где $w_j=u_j+iv_j$ $(j=1, 2)$. Но для таких функций справедливо следующее неравенство (см. [5]):

$$|F(u_1+iv_1, u_2+iv_2)|\leqslant M\cdot\|F\|_{H^p} \tag{2.6}$$

при всех $-\infty<u_j<+\infty$, $\varepsilon_{j1}\leqslant v_j\leqslant\varepsilon_{j2}$ $(j=1, 2)$. Переходя в (2.6) обратно к функции f, получим нужное неравенство (2.3). На этой лемме основано доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Если* $f\in G^p(\Delta_1\times\Delta_2)$, *то существуют функции* $\Phi_{km}\in L^p(\mathbf{R}_+^2)$ $(k, m=1, 2)$, *такие, что*:

1°.

$$\|\Phi_{km}\|_{L^p}\leqslant\|f\|_{G^p}\ (k, m=1, 2), \tag{2.7}$$

2°.

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{k, m=1}^{2}\int_{R_+^2}\frac{(-1)^{k+m}\cdot e^{i\theta_{1k}}\cdot e^{i\theta_{2m}}\cdot\Phi_{km}(r_1, r_2)\,dr_1dr_2}{(r_1e^{i\theta_{1k}}-z_1)\cdot(r_2e^{i\theta_{2m}}-z_2)}=$$

$$=\begin{cases} f(z_1, z_2), & (z_1, z_2)\in\Delta_1\times\Delta_2\\ 0, & (z_1, z_2)\in\Delta_1\times\Delta_2^{*}\cup\Delta_1^{*}\times\Delta_2\cup\Delta_1^{*}\times\Delta_2^{*}.\end{cases} \tag{2.8}$$

Доказательство. Так как $f\in G^p(\Delta_1\times\Delta_2)$, то найдутся последовательности $\{\theta_{j1}^n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\theta_{j2}^n\}_{n=1}^{\infty}$ $(j=1, 2)$, такие, что:

1)
$$\theta_{j1}^n\downarrow\theta_{j1},\ \theta_{j2}^n\uparrow\theta_{j2},\ \text{при } n\to\infty\ (j=1, 2), \tag{2.9}$$

2) при $k, m=1, 2$ существуют

$$\lim_{n\to\infty}f\left(r_1e^{i\theta_{1k}^n}, r_2e^{i\theta_{2m}^n}\right)=\Phi_{km}\in L^p(\mathbf{R}_+^2), \tag{2.10}$$

где пределы понимаются в смысле слабой сходимости функции в пространстве $L^p(\mathbf{R}_+^2)$. Покажем, что функции Φ_{km} и являются искомыми. Пусть, например, $z^0=(z_1^0,\ z_2^0)\in\Delta_1\times\Delta_2$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). При $j=1,\ 2$ окружим точками z_j^0 специально подобранными контурами Γ_j и запишем обычную интегральную формулу Коши

$$f(z_1^0,\ z_2^0)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_1\times\Gamma_2}\frac{f(\zeta_1,\ \zeta_2)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{(\zeta_1-z_1^0)\cdot(\zeta_2-z_2^0)}.\tag{2.11}$$

Специальным образом расширяя контуры Γ_j, в правой части (2.11) совершим предельный переход. Если при этом воспользуемся леммой 1, соотношением (2.10) и тем, что $f\in G^p(\Delta_1\times\Delta_2)$, то получим формулу (2.8).

Замечание к теореме 2. Если $p=2$, то в качестве функций Φ_{km} $(k,\ m=1,\ 2)$ можно взять остовные граничные значения исходной функции f, которые существуют.

Следствие. *Если $f\in G^p(\Pi_+^2)$, то существуют функции $\Phi_{km}\in\in L^p(\mathbf{R}_+^2)$ $(k,\ m=1,\ 2)$, такие, что*

1°. $$\|\Phi_{km}\|_{L^p}\leqslant\|f\|_{G^p}\ (k,\ m=1,\ 2),\tag{2.12}$$

2°.

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{k,\,m=1}^{2}\int\limits_{\mathbf{R}_+^2}\frac{\Phi_{km}(r_1,\ r_2)\,dr_1dr_2}{[(-1)^{k+1}\cdot r_1-z_1]\cdot[(-1)^{m+1}\cdot r_2-z_2]}=$$

$$=\begin{cases}f(z_1,\ z_2),\ (z_1,\ z_2)\in\Pi_+\times\Pi_+\\ 0,\ (z_1,\ z_2)\in\Pi_+\times\Pi_-\cup\Pi_-\times\Pi_+\cup\Pi_-\times\Pi_-.\end{cases}\tag{2.13}$$

(в) Теорема 3.1°. $G^p(\Pi_+^2)\subset H^p(\Pi_+^2)$, *и если $f\in G^p(\Pi_+^2)$, то*

$$\|f\|_{H^p}\leqslant 4\cdot\|f\|_{G^p}.$$

2° $H^p(\Pi_+^2)\subset G^p(\Pi_+^2)$, *и если $f\in H^p(\Pi_+^2)$, то $\|f\|_{G^p}\leqslant A_p^2\cdot\|f\|_{H^p}$, где*

$$A_p=\sup_{0<\varphi<\pi}\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\varphi\,ds}{|s|^{1/p}\cdot(1+s^2-2s\cdot\cos\varphi)}<+\infty.\tag{2.14}$$

Доказательство. Если $f\in G^p(\Pi_+^2)$, то воспользуемся следствием из теоремы 2, гарантирующим существование функций $\Phi_{km}\in\in L^p(\mathbf{R}_+^2)$ $(k,\ m=1,\ 2)$, удовлетворяющих (2.12) и (2.13). Тогда нетрудно построить функцию $\Phi\in L^p(\mathbf{R}_+^2)$, обладающую свойствами:

$$\|\Phi\|_{L^p}\leqslant 4\cdot\|f\|_{G^p},\tag{2.15}$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{\Phi(t_1,\ t_2)\,dt_1dt_2}{(t_1-z_1)\cdot(t_2-z_2)}=\begin{cases}f(z_1,\ z_2),\ (z_1,\ z_2)\in\Pi_+\times\Pi_+\\ 0,\ (z_1,\ z_2)\in\Pi_+\times\Pi_-\cup\Pi_-\times\Pi_+\cup\Pi_-\times\Pi_-.\end{cases}\tag{2.16}$$

Из формулы (2.16) следует, что

$$f(z)=\int\limits_{\mathbf{R}^2}\Phi(t)\cdot P(x-t,\ y)\,dt,\ z=x+iy\in\Pi_+^2.\tag{2.17}$$

Пользуясь затем свойствами свертки двух функций, из (2.17) получим

$$\left(\int_{R^2}|f(x+iy)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant\|\Phi(t)\|_{L^p}\cdot\|P(t,\ y)\|_{L^1}\leqslant 4\cdot\|f\|_{G^p}. \tag{2.18}$$

Переходя в левой части к sup по всем $y\in\mathrm{R}^2_+$, получим, что

$$f\in H^p(\Pi^2_+)\ \text{ и }\ \|f\|_{H^p}\leqslant 4\cdot\|f\|_{G^p}.$$

Пусть теперь $f\in H^p(\Pi^2_+)$ и $F(x)\in L^p(\mathrm{R}^2)$ является граничной функцией для f (см. теорему 1). Тогда

$$|f(z)|\leqslant\int_{R^2}|F(t)|\cdot P(x-t,\ y)\,dt,\ z=x+iy\in\Pi^2_+. \tag{2.19}$$

Если в обеих частях (2.19) положим $z=r\cdot e^{i\varphi}$ и затем в правой части сделаем замену переменных $t_1=r_1\cdot s_1$, $t_2=r_2\cdot s_2$, то получим

$$|f(re^{i\varphi})|\leqslant\int_{R^2}|F(r_1\cdot s_1,\ r_2\cdot s_2)|\,d\mu(s),\ s=(s_1,\ s_2), \tag{2.20}$$

где

$$d\mu(s)=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\sin\varphi_1}{1+s_1^2-2\,s_1\cdot\cos\varphi_1}\cdot\frac{\sin\varphi_2\cdot ds_1ds_2}{1+s_2^2-2\,s_2\cdot\cos\varphi_2}. \tag{2.21}$$

Применим к (2.20) обобщенное интегральное неравенство Минковского:

$$\left(\int_{R^2_+}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\right)^{1/p}\leqslant\int_{R^2}d\mu(s)\left\{\int_{R^2_+}|F(r_1\cdot s_1,\ r_2\cdot s_2)|^p\,dr\right\}^{1/p}. \tag{2.22}$$

Из (2.22) легко вытекает следующее неравенство:

$$\left(\int_{R^2_+}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\right)^{1/p}\leqslant\|F\|_{L^p}\cdot\int_{R^2}\frac{d\mu(s)}{|s_1|^{1/p}\cdot|s_2|^{1/p}}. \tag{2.23}$$

Переходя в обеих частях (2.23) к sup по всем $\varphi=(\varphi_1,\ \varphi_2)$, $0<\varphi_j<\pi$ $(j=1,\ 2)$, получим, что $f\in G^p(\Pi^2_+)$ и при этом

$$\|f\|_{G^p}\leqslant A^2_p\cdot\|F\|_{L^p}=A^2_p\cdot\|f\|_{H^p}. \tag{2.24}$$

Теорема 3 доказана. Мы уже отмечали, что ограничение $n=2$ сделано лишь для упрощения записи. Поэтому окончательный результат таков:

Теорема 4. *Для любых* $n\geqslant 1$ *и* $p\in(1;+\infty)$ $H^p(\Pi^n_+)=G^p(\Pi^n_+)$. *При этом для произвольной функции* $f\in H^p(\Pi^n_+)=G^p(\Pi^n_+)$ *имеют место оценки*

$$\|f\|_{H^p}\leqslant 2^n\cdot\|f\|_{G^p},\ \|f\|_{G^p}\leqslant A^n_p\cdot\|f\|_{H^p}. \tag{2.25}$$

В заключение выражаю благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство.

Ереванский государственный университет

Поступила 26. V. 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла. ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460.
2. *С. А. Акопян.* Теорема о двух постоянных для функций класса H_p. Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., II, № 2, 1967, 123—127.
3. *А. М. Седлецкий.* Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения. Матем. сборник, 96, № 1, 1975, 75—82.
4. *Л. В. von Kevlczky.* Eine radiale Charakterisierung von $H^p(\Pi_+)$, Math. Nachr., 98, 1980, 257—268.
5. *И. Стейн, Г. Вейс.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., Мир, 1974.
6. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., Наука, 1966.