ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXI, № 5, 1986 Математика

УДК 517.948

Б. С. РУБИН

ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РИССОВЫ ПОТЕНЦИАЛЫ С РАДИАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ

Введение

Основы теории операторов дробного интегрирования в функциональных пространствах были заложены в классической работе Г. Харди и Дж. Литтльвуда [1]. Эти операторы широко применяются в теории функций и математической физике, в теории дифференциальных и интегральных уравнений (см. [2—11] и приведённую там библиографию). Многомерные аналоги дробных интегралов рассматривались в [12—15] и ряде других работ. Важным моментом, особенно в связи с приложениями (см., например, [16,17]), является установление зависимости между особенностями и гладкостью дробного интеграла и особенностями и гладкостью его плотности. В одномерном случае такие особенности возникают в отдельных точках, в многомерном — как в точках, так и на поверхностях. В настоящей работе указанная зависимость исследуется для пространств Лебега $L_p(\rho)$ и гёльдеровых пространств $H_\lambda(\rho)$, $H_\lambda^*(\rho)$ со степенным весом $\rho(x)=(1+|x|)^{\gamma}\times$ $\times\prod_{k=1}^{l}|x-a_k|^{\gamma_k}$ на конечных и бесконечных интервалах вещественной оси, включая и всю ось. Основные трудности здесь связаны с исследованием поведения дробных интегралов в случае, когда все берётся во внутренних точках промежутка интегрирования (в [1] такой случай не рассматривался). Эти трудности преодолеваются применением развитой автором в [10] техники «склеивания» дробных интегралов с учётом свойств сингулярных интегралов с ядром Коши. Отметим также приведенную ниже лемму 0.1 о квазикоммутации операторов дробного интегрирования со степенными функциями, позволяющую легко переносить «невесовые» результаты на случай веса на одном конце.

Полученные одномерные оценки применяются к исследованию многомерных риссовых потенциалов в весовых пространствах. При этом плотность потенциалов предполагается радиальной, что соответствует в приложениях осесимметричным задачам, а особенности рассматриваются в начале координат, на бесконечности и на $(n-1)$-мерных сферах. Обратим внимание на возникающий здесь интересный эффект, заключающийся в том, что потенциалы с радиальной плотностью обладают существенно большей гладкостью по сравнению с потенциалами, имеющими нерадиальную плотность из того же функционального пространства.

В зависимости от классов гладкости основные результаты статьи разбиты на 3 группы: оценки типа „$L_p \to L_q$" (§ 1), „$L_p \to H_{\lambda-1/p}$" (§ 2), „$H_\mu \to H_{\mu+\lambda}$" (§ 3). Указанные оценки получены при минимальных в рамках рассматриваемого класса функций ограничениях на показатели γ_k, γ_∞. § 4 посвящен исследованию изоморфизма весовых гёльдеровых пространств относительно дробного интегрирования. В § 5 указаны приложения результатов предыдущих параграфов к изучению многомерных риссовых потенциалов с радиальной плотностью.

Различные утверждения об ограниченности операторов дробного интегрирования на конечном отрезке были получены ранее в работах [8, 11, 19, 20]*.

Основные обозначения

$$(I^\lambda_{a+}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int\limits_a^x \frac{\varphi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\lambda}}, \quad (I^\lambda_{b-}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int\limits_x^b \frac{\varphi(y)\,dy}{(y-x)^{1-\lambda}} \tag{0.1}$$

— операторы дробного интегрирования Римана—Лиувилля порядка $\lambda > 0$. При $a = -\infty$, $b = \infty$ будем писать соответственно $(I^\lambda_+\varphi)(x)$, $(I^\lambda_-\varphi)(x)$. $\dot{R}^1$ — замкнутая вещественная прямая (дополненная одной бесконечно удаленной точкой), $\dot{R}^\pm = \{x \in \dot{R}^1: \pm x \geqslant 0\}$. I — единичный оператор; $L_p(\Omega)$ — пространство функций, суммируемых на $\Omega \subset R^1$ в p-й степени, $\|f\|_p = \|f, L_p(\Omega)\|$;

$$L_p(\Omega, \rho) = \{f: \rho f \in L_p(\Omega); \|f, L_p(\Omega, \rho)\| = \|\rho f\|_p\}.$$

Всюду в дальнейшем полагаем $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$.

$$\rho(x) = \begin{cases} (1+|x|)^{\gamma_\infty} \prod\limits_{k=1}^{l} |x-a_k|^{\gamma_k}, \text{ если } \operatorname{mes}\Omega = \infty, & (0.2) \\ \prod\limits_{k=1}^{l} |x-a_k|^{\gamma_k}, \text{ если } \operatorname{mes}\Omega < \infty, & (0.3) \end{cases}$$

где $x \in \Omega$, $0 = a_1 < \ldots < a_l = a$, если $\Omega = [0, a]$, $a < \infty$; $0 = a_1 < \ldots < a_l < \infty$, если $\Omega = \dot{R}^+$; $-\infty < a_1 < \ldots < a_l = 0$, если $\Omega = \dot{R}^-$; $-\infty < a_1 < \ldots < a_l < \infty$, если $\Omega = \dot{R}^1$.

$$\gamma = \gamma_\infty + \gamma_1 + \ldots + \gamma_l; \tag{0.4}$$

$$H_\mu(\Omega) = \{f: \mathrm{H}_f(x, y) \equiv \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\mu} \leqslant M_f < \infty \ \forall\, x, y \in \Omega\},$$

если $\operatorname{mes}\Omega < \infty$;

$$H_\mu(\Omega) = \{f: \mathrm{H}_f(x, y) \equiv \frac{|f(x) - f(y)|\,(1+|x|)^\mu (1+|y|)^\mu}{|x-y|^\mu} \leqslant$$
$$\leqslant M_f < \infty \ \forall\, x, y \in \Omega\},$$

если $\operatorname{mes}\Omega = \infty$.

---

* На последнюю работу автору любезно указал С. Г. Самко.

Для точек $a_1, \dots, a_m \in \Omega$ положим $\mathbf{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$. Если $\operatorname{mes}\Omega = \infty$, то среди точек $a_1, \dots, a_m$ может находиться и $\pm\infty$.

$$\mathring{H}_\mu(\Omega; \mathbf{A}) = \{f \in H_\mu(\Omega): f(a_k) = 0,\ a_k \in \mathbf{A};\ \|f\| = \|f\|_{(\mu)} = \sup_{x,y\in\Omega} \mathbf{H}_f(x, y)\}.$$

Если $\Omega = [a, b]$ и $\mathbf{A} = \{a, b\}$, то вместо $\mathring{H}_\mu(\Omega; \mathbf{A})$ будем писать $\mathring{H}_\mu[a,b]$. $H^*_\mu(\Omega) = \{f \in H_\mu(\Omega)$: $\mathbf{H}_f(x, y) = o(1)$ равномерно по $x, y \in \Omega$ при $|x - y| \to 0$, если $\operatorname{mes}\Omega < \infty$ и при $\dfrac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)} \to 0$, если $\operatorname{mes}\Omega = \infty\}$; $\mathring{H}^*_\mu(\Omega; \mathbf{A}) = \mathring{H}_\mu(\Omega; \mathbf{A}) \cap H^*_\mu(\Omega)$;

$$\mathring{H}_\mu(\Omega; \rho) = \{f: \rho f \in \mathring{H}_\mu(\Omega; \mathbf{A});\ \|f, \mathring{H}_\mu(\Omega; \rho)\| = \|\rho f\|_{(\mu)}\}$$

(предполагается, что вес берется в тех и только тех точках, которые содержатся в $\mathbf{A}$).

$$\mathring{H}^*_\mu(\Omega; \rho) = \{f: \rho f \in \mathring{H}^*_\mu(\Omega; \mathbf{A});\ \|f, \mathring{H}^*_\mu(\Omega; \rho)\| = \|\rho f\|_{(\mu)}\}.$$

Приведём некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 0.1. *Пусть* $\lambda > 0$, $\varphi \in L_p([0, a]; x^\beta)$, $0 < a \leqslant \infty$, $\beta < 1/p' + \min(\nu, 0)$. *Тогда справедливы соотношения*

$$I^\lambda_{0+} t^\nu \varphi = x^\nu I^\lambda_{0+} (\varphi + A^{(\nu,\lambda)}_1 \varphi), \tag{0.5}$$

$$x^\nu I^\lambda_{0+} \varphi = I^\lambda_{0+} t^\nu (\varphi + A^{(\nu,\lambda)}_2 \varphi),\ (I + A^{(\nu,\lambda)}_2)^{-1} = I + A^{(\nu,\lambda)}_1, \tag{0.6}$$

где операторы $A^{(\nu,\lambda)}_i$ $(i = 1,2)$ *ограничены в* $L_p([0, a]; x^\beta)$.

Лемма 0.2. *Пусть* $\varphi \in L_p([0, a]; x^\nu)$, $0 < a \leqslant \infty$, $\nu < 1/p'$. *Тогда при* $0 < \lambda < 1/p$ *интеграл* $I^\lambda_{0+} \varphi$ *принадлежит пространству* $L_q([0, a]; x^\nu)$, $q = p/(1 - \lambda p)$, *а при* $1/p < \lambda < 1/p + 1$ *и* $a < \infty$ — *пространству* $\mathring{H}^*_{\lambda-1/p}([0, a]; x^\nu)$ *и справедливы оценки*

$$\|x^\nu I^\lambda_{0+} \varphi\|_q \leqslant C \|x^\nu \varphi\|_p,\ \|x^\nu I^\lambda_{0+} \varphi\|_{(\lambda-1/p)} \leqslant C' \|x^\nu \varphi\|_p.$$

Лемма 0.3. *Пусть* $\varphi \in L_p([0, a]; \rho)$, $\gamma_1 < \dfrac{1}{p'}$, $-\dfrac{1}{p} < \gamma_k < \dfrac{1}{p'}$ $(k = 2, \dots, l-1)$, $\gamma_l > -\dfrac{1}{p}$. *Положим*

$$\rho_j(x) = \prod_{k=j}^{l} |x - a_k|^{\gamma_k},\ (S_{\lambda,j}\varphi)(x) = \frac{\sin \lambda\pi}{\pi |x - a_j|^\lambda} \int_0^{a_j} \frac{(a_j - y)^\lambda \varphi(y)}{y - x}\, dg.$$

Если в точке a_j $(j = 2, \dots, l-1)$ *выполняется неравенство* $\gamma_j > \lambda - 1/p$, *то при* $x > a_j$ *справедливо соотношение*

$$(I^\lambda_{0+} \varphi)(x) = (I^\lambda_{a_j} + \varphi_j)(x),\ \varphi_j = \varphi - S_{\lambda,j}\varphi, \tag{0.7}$$

причем $\|\rho_j \varphi_j, L_p(a_j, a)\| \leqslant C \|\rho\varphi, L_p(0, a)\|$.

Лемма 0.4. *Пусть* $\varphi \in \mathring{H}_\mu([0, a]; \rho)$, *где* $\mu > 0$, $\gamma_1 < \mu + 1$, $\mu < \gamma_k < \mu + 1$ $(k = 2, \dots, l-1)$, $\gamma_l = 0$ *или* $\gamma_l > \mu$. *Если в точке* a_j $(j = 2, \cdots, l-1)$ *выполняется неравенство* $\gamma_j > \mu + \alpha$, *то при*

$x > a_j$ *справедливо соотношение* (0.7), *причем* $\|\varphi_j\|_{(\mu)} < C\|\varphi\|_{(\mu)}$.

Лемма 0.1 доказана в [15]. Лемма 0.2 вытекает из леммы 0.1 и соответствующих невесовых теорем из [1] (для $\lambda < 1/p$ аналогичная весовая теорема доказана в [1, с. 581] при ограничении $\lambda < \nu + 1/p$). Леммы 0.3 и 0.4 доказаны в [10, 11] (см. также [7]); здесь они сформулированы в более удобном виде и при менее жёстких ограничениях.

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения, связывающие интегралы (0.1):

$$I^{\lambda}_{a+}\varphi = I^{\lambda}_{b-}(\cos(\lambda\pi)\varphi - \sin(\lambda\pi)S_{b,\lambda}\varphi), \quad -\infty \leqslant a < b < \infty, \tag{0.8}$$

$$I^{\lambda}_{a+}\varphi = I^{\lambda}_{-}(\cos(\lambda\pi)\varphi - \sin(\lambda\pi)S\varphi), \quad -\infty \leqslant a < b = \infty, \tag{0.9}$$

где

$$(S_{b,\lambda}\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \left(\frac{b-y}{b-x}\right)^{\lambda}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy, \quad (S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_a^{\infty}\frac{\varphi(y)\,dy}{y-x}.$$

Первое соотношение выполняется для $\varphi \in L_p([a, b]; \rho)$, где $\rho(x)$ имеет вид (0.2) при $-\infty = a < a_1 < \cdots < a_l = b$ или вид (0.3) при $a = a_1 < \cdots < a_l = b$, $-\frac{1}{p} < \gamma_k < \frac{1}{p'}$ $(k = 1, \cdots, l-1)$, $\lambda - \frac{1}{p} < \gamma_l < \frac{1}{p'}$ и, кроме того, $-1/p < \gamma - \lambda < 1/p'$ (напоминаем, что γ определяется равенством (0.4)), если $a = -\infty$. Второе соотношение справедливо для $\varphi \in L_p([a, \infty]; \rho)$ с весом $\rho(x)$ вида (0.2), где $a = a_1 < \cdots < a_l < \infty$, если $a > -\infty$, или $-\infty < a_1 < \cdots < a_l < \infty$, если $a = -\infty$, $-\frac{1}{p} < \gamma_k < \frac{1}{p'}$ $(k = 1, \cdots, l)$, $\lambda - \frac{1}{p} < \gamma < \frac{1}{p'}$. Отметим также, что (0.8) выполняется для $\varphi \in \overset{*}{H}_{\mu}([a, b], \rho)$, если вес $\rho(x)$ определяется как и в предыдущем случае, $\mu < \gamma_k < \mu + 1$ $(k = 1, \cdots, l-1)$, $\mu + \lambda < \gamma_l < \mu + 1$, а (0,9) — для $\varphi \in \overset{*}{H}_{\mu}([a, \infty]; \rho)$ при $\mu < \gamma_k < \mu + 1$ $(k = 1, \cdots, l)$ и $\lambda - \mu < \gamma < 1 - \mu$.

Для функций из классов $L_p([a, b]; \rho)$ и $L_p(R^1)$ соотношения (0.8), (0.9) получены в [8,9].

§1. Оценки типа ${}_nL_p \to L_q^*$

В этом параграфе образы операторов дробного интегрирования рассматриваются вложенными в некоторое весовое пространство $L_q(\Omega; \rho)$, $q \geqslant p$. Введем обозначения

$$\delta_k = \begin{cases} \gamma_k - m & \text{при } \gamma_k > \lambda - 1/p, \\ \lambda - 1/p - m + \varepsilon_k & \text{при } \gamma_k \leqslant \lambda - 1/p; \end{cases}$$

под ε, ε_0, ε_k $(k = 1, 2, \cdots)$ в дальнейшем будем понимать как угодно малые положительные числа;

$$\rho_+(x) = x^{\gamma_1 - m}\prod_{k=2}^{l}|x - a_k|^{\delta_k}, \quad \rho_-(x) = (a-x)^{\gamma_l - m}\prod_{k=1}^{l-1}|x - a_k|^{\delta_k}.$$

Теорема 1.1. *Пусть* $\gamma_k < \frac{1}{p'}$ $(k=1, \cdots, l-1$ *для оператора* I^{λ}_{0+} *и* $k=2, \cdots, l$ *для оператора* $I^{\lambda}_{a-})$, *а параметры* p, m, λ, q *удовлетворяют условиям*

$$0 \leqslant m \leqslant \lambda, \ 0 < \lambda < m + 1/p, \ q = \frac{p}{1-(\lambda-m)p}. \tag{1.1}$$

Тогда для $\varphi \in L_p([0, a], \rho)$ *справедлива оценка*

$$\|\rho^{(-)}_{(a-)} I^{\lambda}_{0+} \varphi\|_q \leqslant C \|\rho\varphi\|_p. \tag{1.2}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в простейшем случае, если вес берётся только на одном из концов, например, $\varphi \in L_p \times \times ([a, b], (x-a)^{\gamma})$, и рассматривается связанный с этим концом интеграл $I^{\lambda}_{a+}\varphi$, то при выполнении условий (1.1) из леммы 0.2 следует оценка

$$\|(x-a)^{\gamma-m} I^{\lambda}_{a+} \varphi\|_q \leqslant C \|(x-a)^{\gamma} \varphi\|_p.$$

Рассмотрим теперь интеграл $f = I^{\lambda}_{0+}\varphi$ в условиях нашей теоремы. Можно считать $\lambda < 1$, ибо в противном случае $\delta_k = \lambda - \frac{1}{p} - m + \varepsilon_k$ и с учетом сделанного выше замечания утверждение теоремы очевидно. Пусть вначале $\gamma_k > \lambda - 1/p$ $(k=2, \cdots, l)$. Выберем произвольные точки $c_j \in (a_j, a_{j+1})$, $j=1, \cdots, l-1$, и обозначим через f_j, f_{j1}, f_{j2} сужения функции f на отрезки $[a_j, a_{j+1}]$, $[a_j, c_j]$, $[c_j, a_{j+1}]$ соответственно, $r_j(x) = |x-a_j|^{\gamma_j}$ $(j=1, \cdots, l)$. Для доказательства (1.2) достаточно убедиться в справедливости соотношений

$$f_{j1} = I^{\lambda}_{a_j+} \psi_{j1}, \ \|r_j \psi_{j1}, L_p(a_j, c_j)\| \leqslant C \|\rho\varphi, L_p(0, a)\|, \ j=1, \cdots, l-1, \tag{1,3}$$

$$f_{j2} = I^{\lambda}_{a_{j+1}-} \psi_{j2}, \ \|r_{j+1} \psi_{j2}, L_p(c_j, a_{j+1})\| \leqslant C \|\rho\varphi, L_p(0, a)\|, \ j=1, \cdots, l-2, \tag{1.4}$$

$$\|(a-x)^{\gamma_l - m} f_{l-1,2}, L_q(c_{l-1}, a)\| \leqslant C \|\rho\varphi, L_p(0, a)\|. \tag{1.5}$$

Соотношения (1.3) выполняются в силу леммы 0.3, соотношения (1.4) — в силу леммы 0.3 и равенства (0.8). Докажем неравенство (1.5). Если $\gamma_l < 1/p'$, рассуждения проводятся так же, как и в случае (1.4). Если $\gamma_l \geqslant 1/p'$, то по теореме 0.3 $f_{l-1} = I^{\lambda}_{a_{l-1}+} \psi_{l-1}$ и $\|r_{l-1} r_l \psi_{l-1}, L_p(a_{l-1}, a_l)\| \leqslant \leqslant C \|\rho\varphi, L_p(0, a)\|$. А так как

$$|(a-x)^{\gamma_l - m} f_{l-1,2}| \leqslant (a-x)^{\frac{1}{p'} - \varepsilon - m} I^{\lambda}_{a_{l-1}+} ((a-y)^{\varepsilon - \frac{1}{p'}} r_l |\psi_{l-1}|),$$

то остается воспользоватся равенством (0.8) и оценкой для правого конца. Чтобы освободиться от ограничений $\gamma_k > \lambda - 1/p$ $(k=2, \cdots, l)$ заметим, что для веса $\rho_\delta(x) = x^{\gamma_1} \prod_{k=2}^{l} |x-a_k|^{\delta_k + m}$ выполняютя соотношения $\delta_k + m > \lambda - 1/p$, $\|\rho_\delta \varphi\|_p \leqslant C \|\rho\varphi\|_p$, и мы оказываемся в условиях уже рассмотренного частного случая. Оценка (1.2) для интеграла $I^{\lambda}_{0+}\varphi$ до-

казана. Справедливость (1.2) для интеграла $I_{a-}^{\lambda}\varphi$ следует из соотношения $I_{a-}^{\lambda} = W I_{0+}^{\lambda} W$, $(W\varphi)(x) = \varphi(a-x)$. Теорема доказана.

Приведём аналогичный результат для бесконечных промежутков. Введём множества

$$\mathbf{A}_1 = \{2, 3, \cdots, l\},\ \mathbf{A}_2 = \{1, 2, \cdots, l-1\},\ \mathbf{A}_3 = \{1, \cdots, l\} \qquad (1.6)$$

и положим

$$\delta_\infty^{(i)} = \frac{1}{p'} - \gamma^{(i)} - \sum_{k\in\mathbf{A}_i} \delta_k - \begin{cases} 1/p' - \gamma \text{ при } \gamma < 1/p', \\ \varepsilon_0 \text{ при } \gamma \geqslant 1/p', \end{cases}$$

где $i = 1, 2$; $\gamma^{(1)} = \gamma_1$; $\gamma^{(2)} = \gamma_l$; γ имеет вид (0.4);

$$\delta_\infty^{(3)} = \gamma - m - \sum_{k=1}^{l} \delta_k,\ \delta_\infty = -m - \sum_{k=1}^{l} \delta_k + \begin{cases} \gamma \text{ при } \gamma < 1/p', \\ 1/p' - \varepsilon \text{ при } \gamma \geqslant 1/p'. \end{cases}$$

$$\rho_+(x) = \begin{cases} (1+x)^{\delta_\infty^{(1)}} x^{\gamma_1 - m} \prod\limits_{k=2}^{l} |x - a_k|^{\delta_k} \text{ при } \Omega = \dot{R}^+, \\ (1+|x|)^{\delta_\infty^{(3)}} \prod\limits_{k=1}^{l} |x - a_k|^{\delta_k} \text{ при } \Omega = \dot{R}^-, \\ (1+|x|)^{\delta_\infty} \prod\limits_{k=1}^{l} |x - a_k|^{\delta_k} \text{ при } \Omega = \dot{R}^1; \end{cases}$$

$$\rho_-(x) = \begin{cases} (1+x)^{\delta_\infty^{(3)}} \prod\limits_{k=1}^{l} |x - a_k|^{\delta_k} \text{ при } \Omega = \dot{R}^+, \\ (1+|x|)^{\delta_\infty^{(2)}} |x|^{\gamma_l - m} \prod\limits_{k=1}^{l-1} |x - a_k|^{\delta_k} \text{ при } \Omega = \dot{R}^-, \\ \rho_+(x) \text{ при } \Omega = \dot{R}^1; \end{cases}$$

$$\gamma_k < \frac{1}{p'},\ k \in \begin{cases} \mathbf{A}_3, \text{ если } \Omega = \dot{R}^1 \text{ или } \Omega = \dot{R}^+ \text{ для оператора } I_{0+}^{\lambda}, \\ \qquad\qquad \text{или } \Omega = \dot{R}^- \text{ для оператора } I_{0-}^{\lambda}, \\ \mathbf{A}_1, \text{ если } \Omega = \dot{R}^+ \text{ для оператора } I_{-}^{\lambda}, \\ \mathbf{A}_2, \text{ если } \Omega = \dot{R}^- \text{ для оператора } I_{+}^{\lambda}. \end{cases} \qquad (1.7)$$

Теорема 1.2. *Если $\varphi \in L_p(\Omega; \rho)$, где числа γ_k выбраны согласно* (1.7), *а параметры p, m, λ, q удовлетворяют* (1.1), *то $\|\rho_\pm I_{0\pm}^{\lambda} \varphi\|_q \leqslant C\|\rho\varphi\|_p$. Если дополнительно предположить, что $\gamma > \lambda - 1/p$, то $\|\rho_\pm I_{\pm}^{\lambda} \varphi\|_q \leqslant C\|\rho\varphi\|_p$.*

В случае полуоси утверждение теоремы выводится из соответствующего утверждения для конечного отрезка отображением этого отрезка на полуось. Из справедливости оценок для полуосей $\dot{R}^\pm$ с помощью равенств (0.8), (0.9) получаются оценки для всей прямой.

§2. Оценки типа „$L_p \to H_{\lambda-1/p}$"

Первое утверждение такого типа приведено в лемме 0.2 для веса на левом конце отрезка $[0, a]$. Аналогично, если $1/p < \lambda < 1/p + 1$, то для любого отрезка $[a, b]$ имеем

$$\text{при } \gamma < 1/p': I_{a+}^{\lambda}: L_p([a, b], (x-a)^{\gamma}) \to \overset{\circ}{H}{}^{*}_{\lambda-1/p}([a, b], (x-a)^{\gamma}), \tag{2.1}$$

$$I_{b-}^{\lambda}: L_p([a, b], (b-x)^{\gamma}) \to \overset{\circ}{H}{}^{*}_{\lambda-1/p}([a, b], (b-x)^{\gamma}) \tag{2.2}$$

$$\text{и при } \gamma > \lambda - \frac{1}{p}: I_{a+}^{\lambda}: L_p([a, b], (b-x)^{\gamma}) \to \overset{\circ}{H}_{\lambda-1/p}([a, b], (b-x)^{\gamma}) \tag{2.3}$$

с соответствующими оценками норм. Заметим, что для $\gamma \leqslant \lambda - 1/p$ последнее соотношение не выполняется, в чём можно убедиться на примере функции $\varphi(x)$, $x \in (0, 1)$, равной нулю при $0 < x < 1 - e^{-1}$ и $(1 - x)^{-\gamma-1/p} |\ln^{-1}(1-x)|$ при $1 - e^{-1} < x < 1$. Если $\gamma = 0$, то $I_{a+}^{\lambda}\varphi \in \overset{\circ}{H}_{\lambda-1/p}([a, b], a)$ с соответствующей оценкой нормы ([1]).

Для перехода к пространствам типа H^* нам понадобится следующая

Лемма 2.1. *Пусть оператор T непрерывен из $L_p([a, b]; \rho)$ в $\overset{\circ}{H}_{\mu} \times ([a, b]; \rho)$, где $\rho(x)$ имеет вид (0.3), $p > 1$, $\mu = \mu(p)$ $(0 < \mu(p) < 1)$ — — возрастающая функция. Тогда*

$$T(L_p([a, b]; \rho)) \subset \overset{\circ}{H}{}^{*}_{\mu}([a, b]; \rho).$$

Действительно, T отображает плотное в $L_p([a, b], \rho)$ множество непрерывных, исчезающих в окрестности точек a_k функций в пространство $\overset{\circ}{H}{}^{*}_{\mu}([a, b]; \rho)$, поэтому $T(L_p([a, b]; \rho)) \subset \overset{\circ}{H}{}^{*}_{\mu}([a, b]; \rho)$.

Чтобы сформулировать основную теорему для отрезка, в дополнение к множествам $\mathbf{A}_i$ вида (1.6) введём множества

$$\Lambda_i = \{k \in \mathbf{A}_i : \gamma_k > 0\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

и положим

$$\delta_k = \gamma_k \text{ при } \gamma_k > \lambda - \frac{1}{p} \text{ и } \delta_k = \lambda - \frac{1}{p} + \varepsilon_k \text{ при } 0 < \gamma_k \leqslant \lambda - \frac{1}{p}, \tag{2.4}$$

$$\rho_+(x) = x^{\gamma_1} \prod_{k \in \Lambda_1} |x - a_k|^{\delta_k}, \quad \rho_-(x) = (a-x)^{\gamma_l} \prod_{k \in \Lambda_3} |x - a_k|^{\delta_k}.$$

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi \in L_p([a, b]; \rho)$, $1/p < \lambda < 1 + 1/p$, $\gamma_k < 1/p'$, где $k \in \mathbf{A}_2$ при рассмотрении оператора I_{a+}^{λ} и $k \in \mathbf{A}_1$ при рассмотрении оператора I_{a-}^{λ}. Тогда*

$$\underset{(a-)}{I_{0+}^{\lambda}}\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{*}_{\lambda-1/p}([0, a]; \underset{(-)}{\rho_+}) \text{ и } \|\underset{(-)}{\rho_+} \underset{(a-)}{I_{0+}^{\lambda}} \varphi\|_{(\lambda-1/p)} \leqslant C \|\rho\varphi\|_p.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл $I_{0+}^{\lambda}\varphi$ (для $I_{a-}^{\lambda}\varphi$ рассуждения проводятся аналогично), полагая дополнительно $\gamma_k < \lambda - 1/p$ $(k = 2, \cdots, l-1)$ и $\gamma_l > \lambda - 1/p$ (или $\gamma_l = 0$). Так как в выражении

$\rho(x)$ показатели δ_k удовлетворяют этим неравенствам и $\|\rho_+\varphi\|_p \leqslant C \times \times \|\rho\varphi\|_p$, то указанным случаем можно ограничиться. В силу леммы 2.1 достаточно доказать неравенство для норм. Разобьем отрезок $[0, a]$ точками c_j (см. доказательство теоремы 1.1.) Применяя лемму 0.3 и соотношения (0.8), (0.1), (2.2), получаем

$$f_{j_1} \in H_{\lambda-1/p}([a_j, c_j]; r_j), \ \|r_j f_{j_1}\|_{(\lambda-1/p)} \leqslant C\|\rho\varphi\|_p, \ j = 1, \cdots, l-1, \tag{2.5}$$

$$f_{j_2} \in H_{\lambda-1/p}([c_j, a_{j+1}]; r_{j+1}), \ \|r_{j+1} f_{j_2}\|_{(\lambda-1/p)} \leqslant C\|\rho\varphi\|_p, \ j = 1, \cdots, l-2. \tag{2.6}$$

Если $\gamma_l = 0$, то вводить точку c_{l-1} нет необходимости и соотношение (2.5) при $j = l-1$ распространяется на весь отрезок $[a_{l-1}, a]$. Рассмотрим $f_{l-1,2}$ при $\gamma_l > \lambda - 1/p$. По теореме 0.3 $f_{l-1} = I^{\lambda}_{a_{l-1}+}\psi_{l-1}$, где $\|r_{l-1} \times \times r_l \psi_{l-1};\ L_p(a_{l-1}, a)\| \leqslant C\|\rho\varphi;\ L_p(0, a)\|$. Пусть $\chi_l(x)$ — характеристическая функция отрезка $[a_{l-1}, c_{l-1}]$, $\psi^{(1)}_{l-1} = \chi_l \psi_{l-1}$, $\psi^{(2)}_{l-1} = (1-\chi_l)\psi_{l-1}$,

$$f^{(1)}_{l-1} = I^{\lambda}_{a_{l-1}+}\psi^{(1)}_{l-1}, \ f^{(2)}_{l-1} = I^{\lambda}_{a_{l-1}+}\psi^{(2)}_{l-1} = I^{\lambda}_{c_{l-1}+}\psi_{l-1}; \ f_{l-1} = f^{(1)}_{l-1} + f^{(2)}_{l-1}.$$

Очевидно, $\psi^{(1)}_{l-1} \in L_p([a_{l-1}, a], r_{l-1}\bar{r}_l)$, где $\bar{r}_l(x) = (a-x)^{\lambda-1/p+\varepsilon}$ и $\|r_{l-1} \times \times \tilde{r}_l \psi^{(1)}_{l-1},\ L_p(a_{l-1}, a)\| \leqslant C\|r_{l-1} r_l \psi_{l-1},\ L_p(a_{l-1}, a)\|$. Поэтому сужение $f^{(1)}_{l-1,2}$ функции $f^{(1)}_{l-1}$ на отрезок $[c_{l-1}, a]$ в силу (0.8) представимо в виде $f^{(1)}_{l-1,2} = I^{\lambda}_{a-}\bar{\psi}^{(1)}_{l-1}$, где

$$\|\tilde{r}_l \bar{\psi}^{(1)}_{l-1},\ L_p(c_l, a)\| \leqslant C\|r_{l-1}\tilde{r}_l \psi^{(1)}_{l-1},\ L_p(a_{l-1}, a)\| \leqslant C\|\rho\varphi,\ L_p(0, a)\|.$$

Отсюда на основании (2.2)

$$\|\bar{r}_l f^{(1)}_{l-1,2}\|_{(\lambda-1/p)} \leqslant C\|\bar{r}_l \bar{\psi}^{(1)}_{l-1},\ L_p(c_l, a)\|,$$

поэтому

$$\|r_l f^{(1)}_{l-1,2}\|_{(\lambda-1/p)} \leqslant C\|\bar{r}_l f^{(1)}_{l-1,2}\|_{(\lambda-1/p)} \leqslant C\|\rho\varphi,\ L_p(0, a)\|.$$

Аналогичная оценка справедлива для функции $f^{(2)}_{l-1}(x)$ при $x \in (c_{l-1}, a)$ в силу (2.3): $\|r_l f^{(2)}_{l-1}\|_{(l-1/p)} \leqslant C\|\rho\varphi, L_p(0, a)\|$. С учетом последних двух оценок, а также соотношений (2.5), (2.6) в силу свойства склеивания ([11], с. 309, св. 3°) получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

В случае бесконечных промежутков Ω справедлива

Теорема 2.2. *Пусть* $\varphi \in L_p(\Omega; \rho)$, $1/p < \lambda < 1/p + 1$, *числа* γ_k *удовлетворяют* (1.7). *Положим*

$$\delta^{(i)}_{-} = -\lambda - \gamma^{(i)} - \sum_{k \in \Lambda_i} \delta_k + \begin{cases} \gamma - \lambda + 2/p \ \textit{при} \ \gamma < 1/p', \\ 1 + 1/p - \lambda - \varepsilon_0 \ \textit{при} \ 1/p' \leqslant \gamma < \lambda - 1/p + 1/p', \\ 1 \ \textit{при} \ \gamma > \lambda - 1/p + 1/p', \end{cases}$$

где $i = 1, 2$, $\gamma^{(1)} = \gamma_1$; $\gamma^{(2)} = \gamma_l$; δ_k *определяются согласно* (2.4):

$$\delta^{(3)}_{-} = \gamma - 2(\lambda - 1/p) - \sum_{k \in \Lambda_3} \delta_k,$$

$$\delta_\infty = -\sum_{k\in\Lambda_2}\delta_k - 2(\lambda - 1/p) + \begin{cases}\gamma \text{ при } \gamma < 1/p',\\ 1/p' - \varepsilon \text{ при } \gamma \geqslant 1/p',\end{cases}$$

$$\rho_+(x) = \begin{cases}(1+x)^{\delta_\infty^{(1)}} x^{\gamma_1} \prod\limits_{k\in\Lambda_1} |x-a_k|^{\delta_k}, \text{ если } \Omega = \dot{R}^+,\\ (1+|x|)^{\delta_\infty^{(3)}} \prod\limits_{k\in\Lambda_3} |x-a_k|^{\delta_k}, \text{ если } \Omega = \dot{R}^-,\\ (1+|x|)^{\delta_\infty} \prod\limits_{k\in\Lambda_3} |x-a_k|^{\delta_k}, \text{ если } \Omega = \dot{R}^1,\end{cases} \tag{2.7}$$

$$\rho_-(x) = \begin{cases}(1+x)^{\delta_\infty^{(3)}} \prod\limits_{k\in\Lambda_3} |x-a_k|^{\delta_k}, \text{ если } \Omega = \dot{R}^+,\\ (1+|x|)^{\delta_\infty^{(2)}} |x|^{\gamma_l} \prod\limits_{k\in\Lambda_3} |x-a_k|^{\delta_k}, \text{ если } \Omega = \dot{R}^-,\\ \rho_+(x), \text{ если } \Omega = \dot{R}^1.\end{cases} \tag{2.8}$$

Тогда $\overset{\circ}{I}{}^{\lambda}_{0\pm}\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{*}_{\lambda-1/p}(\Omega;\rho_\pm)$ *и* $\|\rho_\pm \overset{\circ}{I}{}^{\lambda}_{0\pm}\varphi\|_{(\lambda-1/p)} \leqslant C\|\rho\varphi\|_p$ *(штрих означает, что* $\lim\limits_{|x|\to\infty}\rho_\pm(x)(\overset{\circ}{I}{}^{\lambda}_{0\pm}\varphi)(x) \neq 0$, *вообще говоря, если* $\gamma \geqslant \lambda - 1/p + 1/p'$). *Если, кроме того,* $\gamma > \lambda - 1/p$, *то*

$$\overset{\circ}{I}{}^{\lambda}_{\pm}\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{*}_{\lambda-1/p}(\Omega;\rho_\pm) \text{ и } \|\rho_\pm \overset{\circ}{I}{}^{\lambda}_{\pm}\varphi\|_{(\lambda-1/p)} \leqslant C\|\rho\varphi\|_p.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.2.

§3. Оценки типа „$H_\mu \to H_{\mu+\lambda}$"

В дальнейшем в интегралах $\overset{\circ}{I}{}^{\lambda}_{a+}\varphi$ ($\overset{\circ}{I}{}^{\lambda}_{b-}\varphi$) при отсутствии веса в точке a (b) предполагается $\varphi(a) = 0$ ($\varphi(b) = 0$). Тогда для конечных промежутков при $\mu > 0$ и $\mu + \lambda < 1$ справедливы следующие вспомогательные соотношения

$$\overset{\circ}{I}{}^{\lambda}_{0+}: \overset{\circ}{H}_\mu([0,a];\rho) \to \overset{\circ}{H}_{\mu+\lambda}([0,a];\rho), \tag{3.1}$$

где $\gamma_1 < \mu + 1$, $\mu + \lambda < \gamma_k < \mu + 1$ $(k = 2, \cdots, l-1)$, $\gamma_l = 0$ или $\mu + \lambda < \gamma_l < \mu + 1$ и

$$\overset{\circ}{I}{}^{\lambda}_{0+}: \overset{\circ}{H}_\mu([a,b];(b-x)^\gamma) \to \overset{\circ}{H}_{\mu+\lambda}([a,b];(b-x)^\gamma),\ \gamma > \mu + \lambda, \tag{3.2}$$

с соответствующими оценками норм. Первое соотношение уточняет лемму 2.2 из [11] и доказывается по той же схеме, но с применением леммы 0.4. Соотношение (3.2) проверяется несложными оценками.

Положим

$$\rho_+(x) = x^{\gamma_1}\prod_{k\in\Lambda_1}|x-a_k|^{\delta_k},\ \rho_-(x) = (a-x)^{\gamma_l}\prod_{k\in\Lambda_3}|x-a_k|^{\delta_k}, \tag{3.3}$$

$$\delta_k = \gamma_k \text{ при } \gamma_k > \mu + \lambda \text{ и } \delta_k = \mu + \lambda + \varepsilon_k \text{ при } 0 < \gamma_k \leqslant \mu + \lambda. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Пусть* $\varphi \in \overset{\circ}{H}_\mu([0, a]; \rho)$, $\mu > 0$, $\mu + \lambda < 1$, $\gamma_k < \mu + 1$, *где* $k \in \mathbf{A}_2$ *для оператора* $\overset{\lambda}{I}_{0+}$ *и* $k \in \mathbf{A}_1$ *для оператора* $\overset{\lambda}{I}_{a-}$. *Тогда*

$$\underset{(a-)}{\overset{\lambda}{I}_{0+}} \varphi \in \overset{\circ}{H}_{\mu+\lambda}([0, a]; \underset{(-)}{\rho_{\cdot}}) \text{ и } \|\underset{(-)}{\rho_{\pm}} \underset{(a-)}{\overset{\lambda}{I}_{0+}} \varphi\|_{(\mu+\lambda)} \leqslant C \|\rho \varphi\|_{(\mu)}.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть интеграл $\overset{\lambda}{I}_{0+} \varphi$, считая при этом $\varphi \in \overset{\circ}{H}_\mu([0, a]; \rho_+)$ и $\gamma_l > 0$. Выберем произвольную точку $\alpha \in (a_{l-1}, a)$ и положим $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1(x) = 0$ при $x \leqslant \alpha$, $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \varphi(\alpha)$ при $x \geqslant \alpha$, $\varphi_2 = \varphi - \varphi_1$,

$$\varphi_1 \in \overset{\circ}{H}_\mu([\alpha, a]; (a - x)^{\delta_l}), \ \|(a - x)^{\delta_l} \varphi_1\|_{(\mu)} \leqslant C \|\rho_+ \varphi\|_{(\mu)},$$

$$\varphi_2 \in \overset{\circ}{H}_\mu([0, a]; \rho^{(1)}), \ \|\rho^{(1)} \varphi_2\|_{(\mu)} \leqslant C \|\rho_+ \varphi\|_{(\mu)},$$

где

$$\rho^{(1)}(x) = x^{\gamma_1} (a - x)^{\mu+\lambda+\varepsilon} \prod_{k=2}^{l-1} |x - a_k|^{\delta_k}.$$

В силу (3.2) $\overset{\lambda}{I}_{0+} \varphi_1 = \overset{\lambda}{I}_{\alpha+} \varphi_1 \in \overset{\circ}{H}_{\mu+\lambda}([\alpha, a]; (a - x)^{\delta_l})$, поэтому

$$\overset{\lambda}{I}_{0+} \varphi_1 \in \overset{\circ}{H}_{\mu+\lambda}([0, a]; \rho_+) \text{ и } \|\rho_+ \overset{\lambda}{I}_{0+} \varphi_1\|_{(\mu+\lambda)} \leqslant C \|(a - x)^{\delta_l} \overset{\lambda}{I}_{0+} \varphi_1,$$

$$\overset{\circ}{H}_{\mu+\lambda}([\alpha, a], a)\| \leqslant C \|(a - x)^{\delta_l} \varphi_1, \overset{\circ}{H}_\mu([\alpha, a], a)\|.$$

Далее, согласно (3.1) $\|\rho^{(1)} \overset{\lambda}{I}_{0+} \varphi_2\|_{(\mu+\lambda)} \leqslant C \|\rho^{(1)} \varphi_2\|_{(\mu)}$, а так как $\|\rho_+ \overset{\lambda}{I}_{0+} \varphi_2\|_{(\mu+\lambda)} \leqslant C \|\rho^{(1)} \overset{\lambda}{I}_{0+} \varphi_2\|_{(\mu+\lambda)}$, то из проделанных оценок окончательно получаем $\|\rho_+ \overset{\lambda}{I}_{0+} \varphi\|_{(\mu+\lambda)} \leqslant C \|\rho_+ \varphi\|_{(\mu)}$, что и требовалось.

Получим аналог теоремы 3.1 для пространства типа H^*.

Лемма 3.1. *Пусть* $1 \geqslant \nu > \mu > 0$. *Тогда* $\overset{\circ}{H}_\nu([0, a]; \rho)$ *всюду плотно в* $\overset{\circ}{H}{}^*_\mu[0, a]; \rho)$ *и если для* $\psi_n \in \overset{\circ}{H}_\nu([0, a]; \rho)$ *существует предел* $\lim\limits_{n \to \infty} \psi_n = \psi$ *по норме* $\|\cdot\|_{(\mu)}$, *причем* $(\rho \psi)(a_{k_0}) = 0$ *при некотором* $k_0 = 1, 2, \cdots, l$, *то* $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^*_\mu([0, a]; \rho)$.

Доказательство. Покажем сначала плотность вложения

$$\overset{\circ}{H}_\nu[0, 1] \subset \overset{\circ}{H}{}^*_\mu[0, 1]. \text{ Пусть } \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^*_\mu[0, 1],$$

$$\varphi_n(x) = n \int_x^{x-1/n} \varphi(y)\, dy - n \int_0^{1/n} \varphi(y)\, dy, \ x \in [0, 1],$$

где при $y > 1$ положим $\varphi(y) = \varphi(y - 1)$. Очевидно, $\varphi_n(x) \in \overset{\circ}{H}_\nu[0, 1]$ $\forall \nu \in (\mu, 1]$. Производя те же оценки, что и в [18, с. 269], получаем требуемое утверждение, из которого при $\mathbf{A} = (a_1, \cdots, a_l)$, $0 = a_1 < \cdots < a_l = a$ вытекает, что $\overset{\circ}{H}_\nu([0, a], \mathbf{A})$ плотно в $\overset{\circ}{H}{}^*_\mu([0, a], \mathbf{A})$, а затем и плотность $\overset{\circ}{H}_\nu([0, a]; \rho)$ в $\overset{\circ}{H}{}^*_\mu([0, a]; \rho)$. Далее, так как $\|\rho(\psi_n - \psi)\|_{(\mu)} \to 0$ и $(\rho \psi)(a_{k_0}) = 0$, то $\rho \psi_n \to \rho \psi$ равномерно на $[0, a]$. Поэтому $(\rho \psi)(a_k) = 0$ $\forall k = 1, \cdots, l$ и ([18, с. 269]) $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^*_\mu([0, a]; \rho)$.

В силу доказанной леммы в условиях теоремы 3.1 получаем

$$\underset{(a-)}{I^{\lambda}_{0+}}\,(\overset{\circ}{H}{}^{*}_{\mu}([0,a];\rho))\subset \overset{\circ}{H}{}^{*}_{\mu+\lambda}([0,a];\underset{(-)}{\rho_{+}}). \tag{3.5}$$

Сформулируем теорему для бесконечных промежутков, доказываемую аналогично теоремам 1.2 и 2.2.

Теорема 3.2. *Пусть* $\varphi\in \overset{\circ}{H}_{\mu}(\Omega;\rho)$, $\mu>0$, $\mu+\lambda<1$, $\gamma_k<\mu+1$, *где* k *выбрано так же, как и в* (1.7). *Определим* $\rho_{\pm}(x)$ *равенствами* (2.7), (2.8), *где* δ_k *имеют вид* (3.4) *и*

$$\delta_{\infty}^{(i)}=-\lambda-\gamma^{(i)}-\sum_{k\in M}\delta_k+\begin{cases}\gamma-\lambda \text{ при } \gamma<1-\mu,\\ 1-\mu-\lambda-\varepsilon_0 \text{ при } 1-\mu\leqslant\gamma<\lambda+1,\\ 1 \text{ при } \gamma\geqslant\lambda+1,\end{cases}$$

$(i=1,2;\ \gamma^{(1)}=\gamma_1,\ \gamma^{(2)}=\gamma_l)$,

$$\delta_{\infty}^{(3)}=\gamma-2\lambda-\sum_{k\in M_3}\delta_k,\quad \delta_{\infty}=-2\lambda-\sum_{k\in M_3}\delta_k+\begin{cases}\gamma \text{ при } \gamma<1-\mu,\\ 1-\mu-\varepsilon \text{ при } \gamma\geqslant 1-\mu;\end{cases}$$

Тогда $I^{\lambda}_{0\pm}\varphi\in {}'\overset{\circ}{H}_{\mu+\lambda}(\Omega;\rho_{\pm})$ *и* $\|\rho_{\pm}I^{\lambda}_{0\pm}\varphi\|_{(\mu+\lambda)}\leqslant C\|\rho\varphi\|_{(\mu)}$ (*штрих означает, что* $\lim\limits_{|x|\to\infty}\rho_{\pm}(x)(I^{\lambda}_{0\pm}\varphi)(x)\neq 0$, *вообще говоря, при* $\gamma\geqslant\lambda+1$). *Если, кроме того,* $\gamma>\lambda-\mu$, *то* $I^{\lambda}_{\pm}\varphi\in \overset{\circ}{H}_{\mu+\lambda}(\Omega;\rho_{\pm})$ *и* $\|\rho_{\pm}I^{\lambda}_{\pm}\varphi\|_{(\mu+\lambda)}\leqslant C\|\rho\varphi\|_{(\mu)}$.

В приведенной формулировке пару пространств $\overset{\circ}{H}_{\mu}(\Omega;\rho)$, $\overset{\circ}{H}{}'_{\mu+\lambda}(\Omega;\rho_{\pm})$ можно заменить парой $\overset{\circ}{H}{}^{*}_{\mu}(\Omega;\rho)$, $\overset{\circ}{H}{}^{*}_{\mu+\lambda}(\Omega;\rho_{\pm})$. Доказательство в этом случае опирается на утверждение (3.5).

§4. Об изоморфизме весовых гельдеровых пространств

В дальнейшем при исследовании представимости функции f интегралами $I^{\lambda}_{a+}\varphi$ ($I^{\lambda}_{b-}\varphi$), когда вес в точке a (b) отсутствует, предполагается $f(a)=0$ ($f(b)=0$).

Лемма 4.1. *Пусть* $f\in \overset{\circ}{H}_{\mu}([a,b];(x-a)^{\gamma})$ ($\overset{\circ}{H}_{\mu}([a,b];(b-x)^{\gamma})$), $\gamma<\mu-\lambda+1$ ($\gamma>\mu$), $1>\mu>\lambda>0$. *Тогда* $f=I^{\lambda}_{a+}\varphi$, *где*

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{(x-a)^{\lambda}\Gamma(1-\lambda)}+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\int_a^x\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{1+\lambda}}\,dy,$$

$\varphi\in \overset{\circ}{H}_{\mu-\lambda}([a,b];(x-a)^{\gamma})$ ($\overset{\circ}{H}_{\mu-\lambda}([a,b];(b-x)^{\gamma})$), $\varphi(a)=0$ *при* $\gamma=0$ (*при любом* γ) *и*

$$\|(x-a)^{\gamma}\varphi\|_{(\mu-\lambda)}\leqslant C\|(x-a)^{\gamma}f\|_{(\mu)}\ (\|(b-x)^{\gamma}\varphi\|_{(\mu-\lambda)}\leqslant C\|(b-x)^{\gamma}f\|_{(\mu)}).$$

Равенство $f=I^{\lambda}_{a+}\varphi$ доказано в [1]. Остальные утверждения леммы проверяются несложными оценками.

Из леммы 4.1, как и при доказательстве леммы 2.4 из [11], выводится

Теорема 4.1. *Пусть* $f \in \overset{\circ}{H}_\mu([0, a]; \rho)$, $1 > \mu > \lambda > 0$, $\gamma_k < \mu - \lambda + 1$, $k \in \mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1)$. *Определим* $\rho_\pm(x)$ *равенствами* (3.3), *полагая*

$$\delta_k = \gamma_k \text{ при } \gamma_k > \mu \text{ и } \delta_k = \mu + \varepsilon_k \text{ при } 0 < \gamma_k \leqslant \mu. \tag{4.1}$$

Тогда $f = I_{0+}^\lambda \varphi_+ (I_{a-}^\lambda \varphi_-)$, *где* $\varphi_\pm \in \overset{\circ}{H}_{\mu-\lambda}([0, a]; \rho_\pm)$ *и* $\|\rho_\pm \varphi_\pm\|_{(\mu-\lambda)} \leqslant C \|\rho f\|_{(\mu)}$.

Объединяя теоремы 3.1 и 4.1, получаем утверждение об изоморфизме:

Теорема 4.2. *Пусть* $\mu > 0$, $\mu + \lambda < 1$, $\gamma_1 < \mu + 1$ ($\gamma_1 > \mu + \lambda$ *или* $\gamma_1 = 0$) $\mu + \lambda < \gamma_k < \mu + 1$, $k = 2, \cdots, l-1$, $\gamma_e > \mu + \lambda$ *или* $\gamma_e = 0$ ($\gamma_e > \mu + 1$). *Тогда отображение* I_{0+}^λ (I_{a-}^λ): $\overset{\circ}{H}_\mu([0, a]; \rho) \to \overset{\circ}{H}_{\mu+\lambda}([0, a]; \rho)$ *является изоморфизмом.*

Для бесконечного промежутка Ω определим $\rho_\pm(x)$ равенствами (2.7), (2.8), в которых δ_k имеют вид (4.1),

$$\delta_\infty^{(i)} = \lambda - \gamma^{(i)} - \sum_{k \in \Lambda_i} \delta_k + \begin{cases} \gamma + \lambda \text{ при } \gamma < 1 - \lambda - \mu, \\ 1 - \mu - \varepsilon \text{ при } 1 - \lambda - \mu \leqslant \gamma < 1 - \lambda, \\ 1 \text{ при } \gamma \geqslant 1 - \lambda, \end{cases}$$

$(i = 1, 2;\ \gamma^{(1)} = \gamma_1,\ \gamma^{(2)} = \gamma_l)$,

$$\delta_\infty^{(3)} = 2\lambda + \gamma - \sum_{k \in \Lambda_2} \delta_k,\quad \delta_\infty = \lambda - \sum_{k \in \Lambda_2} \delta_k + \begin{cases} \gamma + \lambda \text{ при } \gamma < 1 - \mu - \lambda, \\ 1 - \mu - \varepsilon \text{ при } \gamma \geqslant 1 - \mu - \lambda. \end{cases}$$

Теорема 4.3. *Пусть* $f \in \overset{\circ}{H}(\Omega; \rho)$, $1 > \mu > \lambda > 0$, $\gamma_k < \mu - \lambda + 1$, *где* k *выбрано так же, как и в* (1.7). *Тогда справедливы представления* $f = I_{0\pm}^\lambda \varphi_\pm$, (*а если* $\gamma > -\mu$, *то и* $f = I_\pm^\lambda \varphi_\pm$), *где* $\varphi_\pm \in {}'\overset{\circ}{H}_{\mu-\lambda}(\Omega; \rho_\pm)$ *и* $\|\rho_\pm \varphi_\pm\|_{(\mu-\lambda)} \leqslant C \|\rho f\|_{(\mu)}$ (*штрих означает, что в интегралах* $I_{0\pm}^\lambda \varphi_\mp$ *предел* $\lim\limits_{|x| \to \infty} \rho_\pm(x) \varphi_\pm(x)$ *не равен нулю, вообще говоря, если* $\gamma \geqslant 1 - \lambda$).

Доказательство. Случай полуосей сводится к отрезку. Пусть $\Omega = \dot{R}^1$, $\gamma_l > 0$, $f_\pm(x)$ — сужения функции $f(x)$ на полуоси $x \gtrless a_l$, $\tilde{f}_\pm(x)$ — их продолжения нулем на $\dot{R}^1$. Пользуясь связью между правосторонними и левосторонними дробными интегралами, получаем $f_- = I_+^\lambda \varphi_1 = I_{a_l-}^\lambda \varphi_2$, $f_+ = I_-^\lambda \varphi_1 = I_{a_l+}^\lambda \psi_2$, откуда $\tilde{f}_- = I_-^\lambda \tilde{\varphi}_2 = I_+^\lambda \varphi_3$, $\tilde{f}_+ = I_+^\lambda \tilde{\psi}_2$ и, следовательно, $f = I_+^\lambda (\varphi_3 + \tilde{\psi}_2)$. Нетрудно проследить оценки норм при этих преобразованиях.

Из теорем 4.3 и 3.2 вытекает

Теорема 4.4. *Если* $\mu > 0$ *и* $\mu + \lambda < 1$, *то отображения* $I_{0\pm}^\lambda$, $I_\pm^\lambda$: $\overset{\circ}{H}_\mu(\Omega; \rho) \to \overset{\circ}{H}_{\mu+\lambda}(\Omega; (1 + |x|)^{-2\lambda} \rho)$ *является изоморфизмом при выполнении следующих условий:*

1) $\gamma_1 < \mu + 1$, $\mu + \lambda < \gamma_k < \mu + 1$ ($k = 2, \cdots, l$), $\gamma < 1 - \mu$ *для* I_{0+}^λ *и* $\Omega = \dot{R}^+$;

2) $\gamma_1 > \mu + \lambda$ *или* $\gamma_1 = 0$, $\mu + \lambda < \gamma_k < \mu + 1$ ($k = 2, \cdots, l$), $\gamma > \lambda - \mu$ *для* I_-^λ *и* $\Omega = \dot{R}^+$;

3) $\gamma_l < \mu + 1$, $\mu + \lambda < \gamma_k < \mu + 1$ $(k = 1, \cdots, l-1)$, $\gamma < 1 - \mu$ *для* $\dot{I}_{0-}^{\lambda}$ *и* $\Omega = \dot{R}^-$;

4) $\gamma_l > \mu + \lambda$ *или* $\gamma_l = 0$, $\mu + \lambda < \gamma_k < \mu + 1$ $(k = 1, \cdots, l-1)$, $\gamma > \lambda - \mu$ *для* I_+^{λ} *и* $\Omega = \dot{R}^-$;

5) $\mu + \lambda < \gamma_k < \mu + 1$ $(k = 1, \cdots, l)$, $\lambda - \mu < \gamma < 1 - \mu$ *для* $I_{\pm}^{\lambda}$ *и* $\Omega = \dot{R}^1$.

В заключение заметим, что неравенства для норм, присутствующие во всех теоремах этого параграфа, позволяют перенести эти теоремы на пространства типа H^*.

§ 5. Потенциалы Рисса с радиальной плотностью

Отмечая возможность приложения доказанных выше теорем в различных задачах, связанных с дробным исчислением (см., например, работу [11], в которой исследуются на нетеровость операторы типа потенциала на конечном отрезке), покажем, как с их помощью можно получить новые результаты для многомерных операторов типа потенциала. Пусть

$$(K^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_{B_a} \frac{\varphi(|y|)\,dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \quad (0 < \alpha < n,\ n \geqslant 1) \tag{5.1}$$

— потенциал Рисса с радиальной плотностью $\varphi(|x|)$ по n-мерному шару B_a радиуса $a \leqslant \infty$ с центром в начале координат. Справедливо представление ([15]):

$$(K^{\alpha}\varphi)(x) = |x|^{2-n}\left(I_{0+}^{\alpha/2}\, t^{\frac{n-\alpha}{2}-1}\, I_{a^2-}^{\alpha/2}\, \varphi(\sqrt{\tau})\right)(|x|^2), \tag{5.2}$$

позволяющее с помощью теорем из §§ 1-3 получать утверждения о вложении образа оператора K^{α} в различные весовые функциональные пространства в зависимости от выбора класса функций φ.

Приведём для иллюстрации одно такое утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть* $\varphi(|x) \in L_p(B_a; \rho)$, *где* $1 < p < \infty$,

$$\rho(x) = \begin{cases} (1+|x|)^{\nu_\infty} \prod\limits_{k=0}^{l} ||x - a_k|^{\nu_k}, & \text{если } a = \infty, \\ \prod\limits_{k=0}^{l} ||x| - a_k|^{\nu_k}, & \text{если } a < \infty, \end{cases}$$

$0 = a_0 < \cdots < a_l < \infty$ *при* $a = \infty$ *и* $0 = a_0 < \cdots < a_l = a$ *при* $a < \infty$, *показатели* ν_k, ν_∞ *удовлетворяют условиям*

$$\nu_0 < \frac{n}{p'},\ \nu_k < \frac{1}{p'}\ (k = 1, \cdots, l),\ \nu = \nu_\infty + \sum_{k=0}^{l} \nu_k > \alpha - \frac{n}{p}\ (\text{при } a = \infty).$$

Введем параметр $m < 1/p$ такой, что $\nu \leqslant m < \alpha$, и положим

$$q = \frac{p}{1 - mp}, \quad \eta_0 = \begin{cases} \nu_0 - \alpha + nm \text{ при } \nu_0 > \alpha - n/p, \\ \varepsilon_0 - n/p + nm \text{ при } \nu_0 \leqslant \alpha - n/p, \end{cases}$$

$$\eta_k = \begin{cases} \nu_k - \alpha + m \text{ при } \nu_k > \alpha - 1/p, \\ m - 1/p + \varepsilon_k \text{ при } \nu_k \leqslant \alpha - 1/p, \ k = 1, 2, \cdots, l, \end{cases}$$

$$\eta_\infty = -\sum_{k=0}^{l} \eta_k - \alpha + nm + \begin{cases} \nu \text{ при } \nu < n/p', \\ n/p' - \varepsilon \text{ при } \nu \geqslant n/p', \end{cases}$$

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} (1 + |x|)^{\eta_\infty} \prod_{k=0}^{l} \big| |x| - a_k \big|^{\eta_k}, \text{ если } a = \infty, \\ \prod_{k=0}^{l} \big| |x| - a_k \big|^{\eta_k}, \text{ если } a < \infty. \end{cases}$$

Тогда $K^\alpha \varphi \in L_q(B_a; \tilde{\rho})$ и $\|\tilde{\rho} K^\alpha \varphi\|_q \leqslant C \|\rho \varphi\|_p$.

Теорема 5.1 вытекает из теоремы 1.1 и 1.2 и дополняет известные утверждения из [13, 14], характеризуя поведение потенциалов при приближении к началу координат, к бесконечности и к сферам $|x| = a_k$. Заметим, что известный результат Макенхаута—Уидена [14] об ограниченности потенциалов в пространствах $L_p(\rho)$ с весом $\rho(x)$ общего вида подобной локальной характеристики не даёт. Кроме того, последовательное применение теорем из §§ 1—4 позволяет с помощью представления (5.2) получить оценки для поетнциалов с радиальной плотностью в гёльдеровых пространствах и изучить случаи изоморфизма.

Отметим также важный момент качественного характера, обусловленный радиальностью плотности потенциала. Применяя формулу (5.2) и доказанные выше теоремы для дробных интегралов, мы сталкиваемся с интересным явлением: потенциалы Рисса от радиальных функций обладают существенно лучшим поведением по сравнению с потенциалами от нерадиальных функций. Так, при $\alpha < 1/p$ и $1/p < \alpha < 1 + 1/p$ потенциалы (5.1) принадлежат соответственно пространству $L_{p/(1-\alpha p)}$ с некоторым весом или весовому гёльдерову пространству с показателем гёльдеровости $\alpha - 1/p$ в то время, как порядок суммируемости потенциалов с нерадиальной плотностью равен $np/(n - \alpha p)$ $(< p/(1 - \alpha p))$ при $\alpha < n/p$, а порядок гельдеровости (см., напр., [12]) равен $\alpha - n/p$ при $n/p < \alpha < n/p + 1$.

В заключение автор выражает глубокую признательность профессору С. Г. Самко и Н. К. Карапетянцу за ценные советы и внимание к работе.

Ростовский государственный университет
им. М. А. Суслова

Поступила 15.III.1984

Ռ. Ս. ՌԻԻՐԻՆ. Կոտորակային ինտեգրալներ և ստիհանային կշռով տարածություններում շարունվղային խտությամբ Ռիսի պոտենցիալներ *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցված է իրական առանցքի, կիսաառանցքի և վերջավոր հատվածի վրա L_p կշռային և հելդերյան տարածություններում կոտորակային ինտեգրման օպերատորների սահ-

մանափակությունը։ Ստացված արդյունքները Հարդի-Լիտլվուդի հայտնի թեորեմների ընդհանրացումներ են։

Կշռային հոլդերյան տարածությունների համար ստացված է արդյունք կոտորակային ինտեգրման նկատմամբ իզոմորֆիզմի մասին։

Դիտարկված է $\omega_h(\rho f)=o(h^{\lambda})$ անընդհատության մոդուլ ունեցող ֆունկցիաներից կազմված $H^*_{\lambda}(\rho)$ տիպի տարածություններ։ Այդ արդյունքները կիրառվում են շառավղային խտությամբ Ռիսի պոտենցիալների կշռային նորմերի գնահատման համար։ Ցույց է տրված, որ այդ պոտենցիալները օժտված են էապես ավելի մեծ ողորկությամբ, քան ոչ շառավղային խտություն ունեցող պոտենցիալները։

B. S. RUBIN. *Fractional integrals and Riesz potentials of radial functions in power weighted spaces* (summary)

The boundedness theorems for one-dimensional fractional integration operators in weighted L_p and Holder spaces are proved under the condition on the weight function $\rho(x)$ to admit power singularities both in finite points and at infinity. The isomorphism between weighted Holder spaces under fractional integration is established. The $H^*_{\lambda}(\rho)$-spaces of functions with continuity modulus $\omega_h(\rho f)=o(h^{\lambda})$ are considered.

These results enable to obtain the weighted norm estimates for Riesz potentials of radial functions in R^n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Hardy, J. Littlewood.* Some properties of fractional integrals, I. Math. Z., v. 27, 1928, 565—606.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. «Наука», М., 1966.
3. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, № 1, 1968, 3—29.
4. *П. И. Лизоркин.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций, Тр. Матем. ин-та АН СССР, им. В. А. Стеклова, 105, 1969, 89—167.
5. *K. Oldham, J. Spanier.* The fractional Calculus (Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order), New York and London, Academic Press, 1974.
6. Fractional calculus and its applications, Lect. Notes Math., 457, 1975.
7. *Y. W. Chen.* Entire solutions of class of differential equations of mixed type, Comm. Pure Appl. Math,. 14, 1961, 229—255.
8. *С. Г. Самко.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования, Дифф. уравнения, 4, № 2, 1968, 298—314.
9. *С. Г. Самко.* Обобщенное уравнение Абеля в бесконечных пределах. Материалы VII и VIII научной конф. аспирантов, Ростовск. н/Д ун-т, сер. точн. и естеств. наук, 1968, 160—165.
10. *Б. С. Рубин.* О пространствах дробных интегралов на прямолинейном контуре, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем, 7, № 5, 1972, 373—386.
11. *Б. С. Рубин.* Дробные интегралы в пространствах Гёльдера с весом и операторы типа потенциала, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем, 9, № 4, 1974, 308—324.
12. *С. Л. Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул, Изд. «Наука», М., 1974.
13. *E. M. Stien, G. Weiss.* Fractional integrals on n-dimensional euclidean space, J. Math. Mechan., 7, №14, 1958, 6503—6514.
14. *B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden.* Weighted norm inequalities for fractional integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 192, №465, 1974, 261—274.

15. *Б. С. Рубин.* Одномерное представление, обращение и некоторые свойства потенциалов Рисса от радиальных функций, Матем. заметки, 34, № 4, 1983, 521—533.
16. *Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян.* Контактная задача теории ползучести с учётом сил трения, ПММ, 27, вып. 5, 1963, 813—820.
17. *Б. С. Рубин.* Обобщенное уравнение Абеля и плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала с переменным коэффициентом трения, Изв. АН Армянской ССР, сер. механика, 36, № 2, 1983, 18—25.
18. *С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семёнов.* Интерполяция линейных операторов, Изд. «Наука», М., 1978.
19. *Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин.* Радиальные потенциалы Рисса на круге и операторы дробного интегрирования, ДАН СССР, 263, № 6, 1982, 1299—1302.
20. *T. M. Flett.* A note on some inequalities. Proc. Glasgow Math. Assoc., 4, №1 1958, 7—15.