ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 5, 1986 Математика

УДК 517.95

Г. А. КАРАПЕТЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Изучение вырождающихся уравнений начато в работах Трикоми, Холмгрена, Геллерстедта, Франкли и других авторов. В дальнейшем изучение таких уравнений было развито по разным направлениям.

М. В. Келдышем в работе [1] получены теоремы существования и единственности для решения задачи Дирихле для уравнения Трикоми с младшими членами. Отметим также результаты К. И. Бабенко, А. В. Бицадзе, С. Г. Михлина, Л. Д. Кудрявцева, М. И. Вишика, О. А. Олейник. Краткие очерки об этих работах и историю вопроса можно найти в книге [2] М. М. Смирнова. Вырождающиеся эллиптические уравнения высших порядков изучены в работах С. М. Никольского и П. И. Лизоркина [3], Дж. Дж. Кона и Л. Ниренберга [4], М. С. Бауэнди [5], М. И. Вишика и В. В. Грушина [6] и других. В отличие от работ [4]—[6], где рассматривались «слабо» вырождающиеся уравнения, в работе [3] рассматриваются «сильно» вырождающиеся уравнения.

В дальнейшем эти результаты развивались по разным направлениям (см., например, [7]—[9]).

Настоящая заметка является обобщением результатов работ [3], [6] для задачи Дирихле общих регулярных уравнений и для задачи типа Дирихле полуэллиптических уравнений. Регулярные уравнения введены и изучены в работах [10]—[12] и других.

§ 1. Определения, обозначения и постановка задачи

Пусть E_n, R_n — n-мерные евклидовы пространства. Обозначим через Z_n^+ множество мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, где α_i $(i=1,\cdots,n)$ — целые неотрицательные числа. Если $x\in E_n$, $\xi\in R_n$, $\alpha\in Z_n^+$, то положим $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$, $D_k=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $k=1,\cdots,n$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$. Пусть имеем набор мультииндексов $\{\alpha^1,\cdots,\alpha^N\}$.

Определение 1.1. Характеристическим многогранником (х. м.) для данного набора мультииндексов $\{\alpha^i\}_1^N$, назовем наименьший выпуклый многогранник в R_n, содержащий все точки $\{\alpha^i\}_1^N$.

Определение 1.2. Многогранник N назовем вполне правильным (в. п.), если а) N имеет вершины в начале координат и отличные от нее на каждой оси координат Z_n^+.

б) координаты внешних нормалей всех $(n-1)$-мерных нескоординатных граней положительны.

Пусть $\mathbf{N}$—вполне правильный характеристический многогранник набора $\{\alpha^l\}_{l=1}^{N}$, $\mathfrak{M}=\{\alpha\in \mathbf{N},\ \alpha_n=0\}$. Пусть $\mathfrak{M}_i^{n-2}$ — $(n-2)$-мерные грани $(n-1)$-мерного многогранника $\mathfrak{M}$ с внешними нормалями μ^i, нормированными так, что уравнение $(n-2)$-мерной гиперплоскости, проходящей через грань $\mathfrak{M}_i^{n-2}$ можно записать в виде $(\mu^i,\alpha)=1$ $(i=1,\cdots,M)$.

С каждым вектором μ^i свяжем вектор $\delta^i=(\delta_1^i,\cdots,\delta_{n-1}^i)$, где $\delta_j^i\geqslant 0$, $i=1,\cdots, M$, $j=1,\cdots, n-1$.

Рассмотрим оператор

$$P(x_n, D)=P_0(x_n, D)+P_1(D)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}} a_\alpha x_n^{l_\alpha} D^\alpha+\sum_{\alpha\in N\setminus\mathfrak{M}} a_\alpha D^\alpha, \quad (1.1)$$

где $l_\alpha=\max\limits_{1\le i\le M}(\delta^i,\alpha)$, a_α-произвольные действительные числа.

Предположим, что для точек $\alpha\in\mathfrak{M}_{i_0}^{n-2}$ $\max\limits_{1\le i\le M}(\alpha,\delta^i)=(\delta^{i_0},\alpha)$.

Многочлен

$$P(x_n,\xi)=P_0(x_n,\xi)+P_1(\xi)=\sum_{\alpha\in\setminus\mathfrak{M}} a_\alpha x_n^{l_\alpha}\xi^\alpha+\sum_{\alpha\in N\setminus\mathfrak{M}} a_\alpha \xi^\alpha \quad (1.2)$$

называется характеристическим многочленом оператора (1.1).

Обозначим через $\mathbf{N}_i^k$ $(i=1,\cdots, M_k,\ k=0,1,\cdots, n-1)$ k-мерные грани многогранника $\mathbf{N}$.

Определение 1.3. Вполне правильная грань $\mathbf{N}_i^k$ многогранника $\mathbf{N}$ называется регулярной (невырожденной) в точке $x_n>0$, если для всех точек $\xi\in R_n^{(0)}=\{\xi, \xi\in R_n,\ \xi_1\cdots\xi_n\neq 0\}$

$$P^{i,k}=\sum_{\alpha\in N_i^k} a_\alpha(x_n)\xi^\alpha\neq 0.$$

Оператор $P(x_n,\xi)$ называется регулярным (невырожденным) в точке $x_n>0$, если все в. п. грани характеристического многогранника $\mathbf{N}$ регулярны (невырождены).

В. П. Михайловым в работе [1] доказано, что если многочлен (1.2) регулярен в точке $x_n>0$, то а) вершины многогранника $\mathbf{N}$ имеют лишь четные координаты, б) существует постоянная $\gamma=\gamma(x_n)>0$ такая, что

$$\gamma^{-1}\sum_{j=1}^{N}|\xi^{\alpha^j}|\leqslant|P(x_n,\xi)|+1\leqslant\gamma\sum_{j=1}^{N}|\xi^{\alpha^j}|. \quad (1.3)$$

Вместе с оператором (1.1) рассмотрим оператор дивергентного вида

$$P(x_n, D)u=\sum_{\alpha,\beta\in\mathfrak{M}}(-1)^{|\beta|}a_{\alpha\beta}\,x_n^{l_\alpha+l_\beta}D^{\alpha+\beta}u+$$

$$+\sum_{\beta\in N,\ \alpha\in N\setminus\mathfrak{M}}(-1)^{|\beta|}a_{\alpha\beta}D^{\alpha+\beta}u. \quad (1.4)$$

Будем предполагать, что оператор (1.4) регулярен в следующем смысле: существует постоянная $A>0$ такая, что

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathfrak{M}} a_{\alpha\beta}\, x_n^{l_\alpha+l_\beta}\, \xi_\alpha \xi_\beta + \sum_{\beta\in N,\ \alpha\in N\setminus\mathfrak{M}} a_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha \xi_\beta \geqslant \sum_{\alpha\in N} x_n^{2l_\alpha}\, \xi_\alpha^2, \tag{1.5}$$

где ξ_α—действительные числа, отвечающие векторам α, $l_\alpha=0$, $\alpha\in N/\mathfrak{M}$. Пусть $(0,\cdots,m)\in N$—вершина многогранника N, $R_n^+=\{x, x\in R_n, x_n>0\}$, $f\in L_2(R_n^+)$. Рассмотрим краевую задачу

$$P(x_n, D)\, u = f(x),\ x_n>0, \tag{1.6}$$

$$D^i u|_{x_n=0} = \varphi_i(x'),\ i=1,\cdots,m,\ x'=(x_1,\cdots,x_{n-1}). \tag{1.7}$$

Опишем пространство, где будем изучать задачу (1.6), (1.7).

§ 2. Пространства $H_{(N,\delta,r)}(R_{n-1})$, $H_{(N,\delta)}(R_n^+)$ и их свойства

С помощью множеств $\mathfrak{M}$, N и чисел δ^i $(i=1,\cdots,M)$ определим следующие функции:

$$h_{\mathfrak{M}}(\xi', x_n) = \Big(\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}} \xi'^{2\alpha} x_n^{2l_\alpha}\Big)^{1/2}, \tag{2.1}$$

где $l_\alpha = \max\{\alpha, \delta^i),\ i=1,\cdots,M\}$,

$$\rho_{\mathfrak{M},\delta}(\xi') = \Big(\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}} \xi_1^{\frac{2\alpha_1}{1+l_\alpha}},\cdots,\xi_{n-1}^{\frac{2\alpha_{n-1}}{1+l_\alpha}}\Big)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Для любого вещественного числа s обозначим через $H_{(\mathfrak{M},\delta,s)}(R_{n-1})$ множество обобщенных функций $u\in S'(R_{n-1})$, преобразование Фурье которых являются функциями и для которых конечна норма

$$\|u\|_{(\mathfrak{M},\delta,s)} = \Big(\int_{R_{n-1}} |\tilde{u}(\xi')|^2 \rho_{\mathfrak{M},\delta}^{2s}(\xi')\, d\xi'\Big)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Пространства $H_{(\mathfrak{M},\delta,s)}(R_{n-1})$ в изотропном случае изучены в работе [6], а в общем случае они являются частными случаями пространств $B_k^p(R_{n-1})$ Л. Хёрмандера (см. [13], стр. 54), при соответствующем выборе весовой функции $k(\xi')$.

Определим также пространство $H_{(N,\delta)}(R_n^+)$ как совокупность тех $u\in L_2(R_n^+)$, для которых конечна следующая норма:

$$\|u\|_{(N,\delta)} = \Big(\int\int_0^\infty (\rho_{\mathfrak{M},\delta}(\xi') + h_{\mathfrak{M}}(\xi', x_n))^2 |\tilde{u}(\xi', x_n)|^2\, dx_n\, d\xi' +$$

$$+ \sum_{\alpha\in N\setminus\mathfrak{M}} \int\int_0^\infty |\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}} D^{\alpha_n}\tilde{u}(\xi', x_n)|^2\, dx_n\, d\xi'\Big)^{1/2}. \tag{2.4}$$

В эллиптическом случае пространство $H_{(N,\delta)}(R_n^+)$ совпадает с изотропным пространством $H_{(r,\delta)}(R_n^+)$, изученным в [6]. Из свойств пространств B_k^p непосредственно следует

Лемма 2.1. *Функции из $C_0^\infty(\overline{R}_n^+)$ плотны в $H_{(\mathrm{N},\delta)}(R_n^+)$. Здесь через $C_0^\infty(\overline{R}_n^+)$ обозначено множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{R}_n^+$ функций, равных нулю вне некоторого компакта.*

Следы функций u из пространства $H_{(\mathrm{N},\delta)}(R_n^+)$ на гиперплоскость $x_n = 0$ удовлетворяют следующему соотношению.

Лемма 2.2. *Пусть* $\alpha_{\mathrm{N}} = (0, \cdots, m) \in \partial'\mathrm{N}$. *Тогда для любого* $u \in C_0^\infty(\overline{R}_n^+)$ отображение

$$u \to D_n^i u(x', x_n)\,|_{x_n=0}, \quad i = 0, 1, \cdots, m-1$$

ограниченным образом распространяется по непрерывности из $H_{(\mathrm{N},\delta)}(R_n^+)$ *в* $H_{\mathfrak{M},\delta,1/m\left(m-i-\frac{1}{2}\right)}(R_{n-1})$.

Доказательство. Сперва докажем, что для любого $j;\ 0 \leqslant j \leqslant m-1$ и $v \in C_0^\infty(\overline{R}_1^+)$ существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|D^j v(0)|^2 \leqslant C\left(\int_0^\infty |v(t)|^2\,dt + \int_0^\infty |D^m v(t)|^2\,dt\right). \tag{2.5}$$

Действительно, пусть $v \in C_0^\infty(\overline{R}_1^+)$, $\varphi \in C_0^\infty(R_1)$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) \equiv 0$ при $|t| > 1$, $|D^j v(t)| \leqslant C_j$. Тогда $v \cdot \varphi \in C_0^\infty(\overline{R}_1^+)$.
Из формулы Нютона-Лейбница имеем

$$D^j v(0) = \varphi(0)\,D^j v(0) - \varphi(1)\,D^j v(1) = \int_0^1 D(\varphi(t)\,D^j v(t))\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(D^{j+1} v(t)\,\varphi(t) + D\varphi(t)\,D^j v(t)\right)dt.$$

Отсюда получаем

$$|D^j v(0)|^2 \leqslant C\left(\int_0^\infty |D^j v(t)|^2\,dt + \int_0^\infty |D^{j+1} v(t)|^2\,dt\right). \tag{2.6}$$

Используя неравенство (см., например, [14])

$$\sum_{j=0}^m \int_0^\infty |D^j v(t)|^2\,dt \leqslant C\left(\int_0^\infty |D^m v(t)|^2\,dt + \int_0^\infty |v(t)|^2\,dt\right),$$

для функций $v \in C_0^\infty(\overline{R}_1^+)$ получим неравенство (2.5).

Применяя неравенство (2.5) для функции $\tilde{u}(\xi', x_n)$, при $u(x) \in C_0^\infty(\overline{R}_n^+)$, $t = x_n(\rho_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi'))^{1/m}$, получим

$$\rho_{\mathfrak{M},\delta}^{-2i/m}(\xi')\,|D_n^i \tilde{u}(\xi', 0)|^2 \leqslant C\left(\int_0^\infty \rho_{(\mathfrak{M},\delta)}^{1/m}(\xi')\,|\tilde{u}(\xi', x_n)|^2\,dx_n + \right.$$

$$+\int_0^\infty \rho^{-2+1/m}_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')\,|D^m\tilde{u}(\xi',x_n)|^2\,dx_n.$$

Отсюда, умножая обе части полученного неравенства на $\rho^{2-\frac{1}{m}}_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')$ и интегрируя по R_{n-1}, имеем

$$\int \rho^{2/m(m-j-1/2)}_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')\,|D^j\tilde{u}(\xi',0)|^2\,d\xi' \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\int\int_0^\infty \rho_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')\,|\tilde{u}(\xi',x_n)|^2\,dx_n\,d\xi' +$$

$$+\int\int_0^\infty |D^m_n\tilde{u}(\xi',x_n)|^2\,dx_n\,d\xi' \leqslant C\|u\|_{(N,\delta)}.$$

Лемма 2.2 доказана.

Следующее предложение показывает, что пространство $H_{(\mathfrak{M},\delta)}(\overline{R}^+_n)$ можно определить непосредственно без применения преобразования Фурье.

Лемма 2.3. *Пусть $u\in L_2(R^+_n)$, тогда $u\in H_{(N,\delta)}(R^+_n)$ тогда и только тогда, когда конечна следующая норма:*

$$\|u\|'_{(N,\delta)} = \|u\|_{L_2(R^+_n)} + \sum_{\alpha\in N/\mathfrak{M}} \|D^\alpha u\|_{L_2(R^+_n)} + \sum_{\alpha\in\mathfrak{M}} \|x_n^{l_\alpha} D^\alpha u\|_{L_2(R^+_n)}. \quad (2.7)$$

Доказательство. Покажем, что из конечности $\|u\|_{(N,\delta)}$ следует конечность $\|u\|'_{(N,\delta)}$. Применяя равенство Парсеваля, из (2.7) получим

$$\|u\|'_{(N,\delta)} = \Big(\int\int_0^\infty (1+\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}} \xi'^{2\alpha} x_n^{2l_\alpha})\,|\tilde{u}(\xi',x_n)|^2\,dx_n\,d\xi' +$$

$$+\int\int_0^\infty |\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}} D_n^{\alpha_n}\tilde{u}(\xi',x_n)|^2\,dx_n\,d\xi'\Big)^{1/2} \leqslant \|u\|_{(N,\delta)}.$$

Покажем обратное неравенство. Для этого достаточно доказать, что для некоторой постоянной $C>0$ выполняется неравенство

$$\int_0^\infty \Big(\rho^2_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')\,|\tilde{u}(\xi',x_n)|^2\,dx_n \leqslant C\Big(\int_0^\infty h^2_{\mathfrak{M}}(\xi',x_n)\,|\tilde{u}(\xi',x_n)|^2\,dx_n +$$

$$+\int_0^\infty |D_n^{(0,0,\dots,1)}\tilde{u}(\xi',x_n)|^2\,dx_n\Big). \quad (2.8)$$

Полагая $t = x_n\cdot\rho_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')$, имеем

$$\rho_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')\int_0^\infty |\tilde{u}(\xi',t)|^2\,dt \leqslant C\Big(\int_0^\infty \frac{h^2_{\mathfrak{M}}(\xi',t)}{\rho_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')}|\tilde{u}(\xi',t)|^2\,dt +$$

$$+\rho_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')\int_0^\infty |D_t\tilde{u}(\xi',t)|^2\,dt.$$

Или, что то же самое

$$\int_0^\infty |\tilde{u}(\xi',t)|^2\,dt \leqslant C\Big(\int_0^\infty \Big(\frac{h_{\mathfrak{M}}(\xi',t)}{\rho_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')}\Big)^2|\tilde{u}(\xi',t)|^2\,dt +$$

$$+\int_0^\infty |D_t\tilde{u}(\xi',t)|^2\,dt\Big).$$

Оценим член $h_{\mathfrak{M}}(\xi',t)/\rho_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')$:

$$(h_{\mathfrak{M}}(\xi',t)/\rho_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi'))^2=\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}}\xi'^{2\alpha}\frac{t^{2l_\alpha}}{\rho^{2(l_\alpha+1)}_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')}.$$

Рассмотрим вектор

$$(\tau_1,\cdots,\tau_N)=\Big(\frac{\xi'^{\alpha^1}}{\rho^{l_{\alpha^1}+1}_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')},\cdots,\frac{\xi'^{\alpha^N}}{\rho^{l_{\alpha^N}+1}_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')}\Big),$$

где $\alpha^i\in\mathfrak{M}$ $(i=1,\cdots,N)$. Очевидно, что если положить $\mu=2(1/l_{\alpha^1+1},\cdots$ $\cdots,1/l_{\alpha^N_{+1}})$, то μ—расстояние: $\rho_\mu(\tau)=1$ (см. [14]. Следовательно, для любого $\xi'\in R_{n-1}$

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}}\frac{\xi'^{2\alpha}}{\rho^{2(l_\alpha+1)}_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')}\geqslant C_0,$$

и окончательно

$$\left(\frac{h_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi',t)}{\rho_{(\mathfrak{M},\delta)}(\xi')}\right)^2\geqslant\begin{cases}C_0\,t^{2\max\limits_{\alpha\in\mathfrak{M}} l_\alpha}, & t\leqslant 1\\ C_0, & t>1.\end{cases}$$

Таким образом, доказательство неравенства (2.8) свелось к доказательству неравенств

$$\int_0^1 |u(t)|^2\,dt\leqslant C\Big(\int_0^1 t^{2\nu_0}|u(t)|^2\,dt+\int_0^1 |D_t u(t)|^2\,dt\Big),$$

$$\int_1^\infty |u(t)|^2\,dt\leqslant C\int_0^1 |u(t)|^2\,dt+\int_1^\infty |D_t u(t)|^2\,dt\Big),$$

$\nu_0=\max l_\alpha$.

Так как $u \in C_0^\infty(R_1^+)$, то первое неравенство следует из оценки Пуанкаре-Стеклова, а доказательство второго см., например, в [14], стр. 128. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. *Пусть* $s_1 < s_2$, *тогда для любого компакта* $K \subset R_{n-1}$ *оператор вложения*

$A(K) \cap H_{(\mathfrak{M}, l, s_2)}(R_{n-1}) \subset H_{(\mathfrak{M}, l, s_1)}(R_{n-1})$ *является вполне непрерывным. Здесь* $A(K) = \{u; u \in H_{(\mathfrak{M}, l, s_2)}(R_{n-1}),\ \mathrm{supp}\, u \subset K\}$.

Лемма 2.5. *Пусть* $\alpha \in \mathfrak{M}$, $u \in H_{(N, l)}(R_n^+)$. *Отображение* $u \to x_n^{l_\alpha} D_n^\alpha$ *определяет ограниченный оператор из* $H_{(N, l)}(R_n^+)$ *в* $L_2(R_n^+)$.
Доказательство следует из равенства Парсеваля.

§ 3. Задача Дирихле для вырождающихся регулярных уравнений в полупространстве

Рассмотрим оператор (1.4), для которого выполняется условие (1.5). Из леммы 2.2 следует, что для любого j, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ функция $u(x) \in H_{(N, l)}(R_n^+)$ имеет след, который принадлежит пространству $H_{\mathfrak{M}, l, \frac{1}{m}(m-j-\frac{1}{2})}(R_{n-1})$.

Пусть функция $\Phi \in H_{(N, l)}(R_n^+)$. Обозначим через $\mathfrak{M}_\Phi$ класс функций $u \in H_{(N, l)}(R_n^+)$, имеющих те же граничные функции, как и Φ, т. е.

$$D_n^j u|_{x_n=0} = D_n^j \Phi|_{x_n=0},\ j = 0, 1, \cdots, m-1. \tag{3.1}$$

Так как для любого j, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, $D_n^j \Phi \in H_{\mathfrak{M}, l, \frac{1}{m}(m-j-\frac{1}{m})}(R_{n-1}) \subset L_2(R_{n-1})$, то граничные функции (3.1) определены почти всюду. Положим $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_\Phi$, если $\Phi \equiv 0$.

Определение 3.1. Для любого $F \in L_2(R_n^+)$ слабым решением уравнения

$$P(x_n, D) u = F, \tag{3.2}$$

удовлетворяющим условиям (3.1), называется функция $U \in \mathfrak{M}_\Phi$ такая, что

$$\int\limits_{R_n^+} \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{M} \\ \beta \in \mathfrak{M}}} a_{\alpha\beta} x_n^{l_\alpha + l_\beta} D^\alpha U D^\beta v\, dx +$$

$$+ \int\limits_{R_n^+} \sum_{\substack{\alpha \in N/\mathfrak{M} \\ \beta \in N}} a_{\alpha\beta} D^\alpha U D^\beta v\, dx = \int\limits_{R_n^+} F v\, dx \tag{3.3}$$

для любого $v \in \mathfrak{M}_0$.

Обозначим (см. [15])

$$E(f, \varphi) = \int\limits_{R_n^+} \sum_{\substack{\rho \in \mathfrak{M} \\ \rho \in \mathfrak{M}}} a_{\alpha\beta} x_n^{l_\alpha + l_\beta} D^\alpha f D^\beta \varphi\, dx +$$

$$+\int\limits_{R_n^+}\sum_{\substack{\alpha\in N|\mathfrak{M}\\ \beta\in N}} a_{\alpha\beta}D^\alpha f D^\beta\varphi\,dx,\quad E(f)=E(f,f).$$

Лемма 3.1. *Для функционала $E(f,\varphi)$ справедливы соотношения*

$$|E(f,\varphi)|\leqslant C\|f\|_{N,\delta(R_n^+)}\|\varphi\|_{N,\delta(R_n^+)},\tag{3.4}$$

$$E(f)\geqslant C\|f\|^2_{N,\delta(R_n^+)}.\tag{3.5}$$

Доказательство. (3.4) непосредственно следует из определения функционала $E(f,\varphi)$, а (3.5) следует из условия (1.5).

Из леммы 3.1 вытекает, что для некоторых постоянных $C_1>0$, $C_2>0$

$$C_1\|f\|_{N,\delta(R_n^+)}\leqslant\|f\|_{L_2}+E(f)^{1/2}\leqslant C_2\|f\|_{N,\delta(R_n^+)}.\tag{3.6}$$

Следовательно $\|f\|+E(f)^{1/2}$ можно рассматривать как норму в пространстве $H_{N,\delta}(R_n^+)$.

Теорема 3.1. *Пусть оператор (1.4) удовлетворяет условию (1.5). Тогда существует единственная функция $U\in\mathfrak{M}_\Phi$, являющаяся решением вариационной задачи*

$$\min_{f\in\mathfrak{M}_\Phi}[E(f)-2(F,f)]=E(U)-2(F,U),\tag{3.7}$$

$$(F,v)=\int Fv\,dx.$$

Функция U является также решением вариационной задачи

$$E(U,v)=(F,v),\quad\forall v\in\mathfrak{M}_0.\tag{3.8}$$

Следовательно, теорема 3.1 (равенство (3.8)) доказывает существование и единственность слабого решения задачи (3.1), (3.2).

Доказательство. Из линейности и неотрицательности формы $E(f)$ имеем

$$E(f)=\frac{1}{2}E(f-\Phi)+\frac{1}{2}E(f+\Phi)-E(\Phi)\geqslant\frac{1}{2}E(f-\Phi)-E(\Phi).\tag{3.9}$$

Если теперь $f\in\mathfrak{M}_\Phi$, $\|F\|_{L_2(R_n^+)}<\infty$, то $(f-\Phi)\in\mathfrak{M}_0$.

Из неравенства $ab\leqslant\frac{1}{\varepsilon}a^2+\varepsilon b^2$, и (3.5) имеем

$$2(F,f)=2(F,f-\Phi)+2(F,\Phi)\leqslant\frac{1}{2C}\|f-\Phi\|^2+$$

$$+2C\|F\|^2+2(F,\Phi)\leqslant\frac{1}{2}E(f-\Phi)+2C\|F\|^2+2(F,\Phi).\tag{3.10}$$

Вычитая (3.10) из (3.9), получим

$$E(f)-2(F,f)\geqslant-(E(\Phi)+2C\|F\|^2+2(F,\Phi)).$$

Следовательно, функционал $E(f)-2(F,f)$ для любого $f\in\mathfrak{M}_\Phi$ ограничен снизу и

$$\inf_{f\in\mathfrak{M}_\Phi}[E(f)-2(F,f)]=d \quad (-\infty<d<+\infty).$$

Существует минимизирующая последовательность функций $f_n\in\mathfrak{M}_\Phi$, для которых $E(f_n)-2(F,f_n)=d+\varepsilon_n$, $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Так как $(f_n+f_m)/2\in\mathfrak{M}_\Phi$, то

$$\begin{gathered}E(f_n-f_m)=2[E(f_n)-2(F,f_n)]+2[E(f_m)-2(F,f_m)]-\\ -4\left[E\left(\frac{f_n+f_m}{2}\right)-2\left(F,\frac{f_n+f_m}{2}\right)\right]\leqslant \\ \leqslant 2(d+\varepsilon_n)+2(d+\varepsilon_m)-4d\to 0\ (n,\ m\to\infty).\end{gathered} \tag{3.11}$$

Отсюда

$$\|f_n-f_m\|^2_{L_2(R_n^+)}\leqslant E(f_n-f_m)\to 0.$$

Из полноты пространства $H_{(N,\delta)}(R_n^+)$ и неравенства (3.6) следует существование функции $U\in H_{(N,\delta)}(R_n^+)$ такой, что

$$\|U-f_n\|_{(N,\delta)}\leqslant\|U-f_n\|_{L_2(R_n^+)}+E(U-f_n)^{1/2}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Окончательно получим $E(U)-2(F,U)=d$.

Докажем, что $U\in\mathfrak{M}_\Phi$. Для этого оценим

$$\begin{gathered}\|D_n^j U|_{x_n=0}-D_n^j\Phi|_{x_n=0}\|_{L_2(R_{n-1})}=\|D_n^j(U-\Phi)|_{x_n=0}\|_{L_2(R_{n-1})}=\\ =\|D_n^j(U-f_k)|_{x_n=0}\|_{L_2(R_{n-1})}\leqslant\|D_n^j(U-f_k)\|_{(\mathfrak{M},\delta,\frac{1}{m}(m-j-\frac{1}{2}))}\leqslant\\ \leqslant C\|U-f_k\|_{(N,\delta)}\to 0.\end{gathered}$$

Следовательно $D_n^j v|_{x_n=0}=D_n^j\Phi|_{x_n=0}$ п. в. и равенство (3.7) доказано. Докажем единственность функции U. Если существует другая функция $U_1\in\mathfrak{M}_\Phi$, для которой имеет место (3.7), то заменой в (3.11) f_n, f_m, на U, U_1 получим $E(U-U_1)=0$. Следовательно, $\|U-U_1\|_{L_2}=0$ и $U(x)=U_1(x)$ п. в.

Для получения (3.8) заметим, что из (3.7) следует

$$\min_\lambda[E(U+\lambda v)-2(F,U+\lambda v)]=E(U)-2(F,U),\ \forall v\in\mathfrak{M}_0. \tag{3.12}$$

Из (3.12) и определения $E(u,v)$ имеем

$$E(U,v)-(F,v)=0,\ \forall v\in\mathfrak{M}_0.$$

Теорема 3.1 доказана.

§ 4. Вырождающиеся полуэллиптические уравнения с общими начальными условиями

Пусть $\nu_1,\cdots,\nu_n\in N$ — четные числа, $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)=\left(\frac{1}{\nu_1},\cdots,\frac{1}{\nu_n}\right)$,

$\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \cdots \geqslant \delta_{n-1} \geqslant 0,\ g_i = \delta_i + \mu_i,\ i = 1, \cdots, n-1,\ g_n = \mu_n.$

Рассмотрим оператор

$$P(x_n, D) = P_0(x_n, D) + P_1(D), \tag{4.1}$$

где

$$P_0(x_n, D) = \sum_{\substack{(\alpha,\mu)=1,\ l_\alpha \geq 1\\ (g,\alpha)-l_\alpha=1}} a_\alpha x_n^{l_\alpha} D^\alpha,\quad P_1(D) = \sum_{\substack{(\alpha,\mu)<1\\ (g,\alpha)<1}} a_\alpha D^\alpha,$$

а a_α действительные числа.

Будем предполагать, что для любого $x_n > 0$ оператор (4.1) полуэллиптичен, т. е.

$$P^0(x_n, \xi) = \sum_{\substack{(\alpha,\mu)=1\\ (g,\alpha)-l_\alpha=1}} a_\alpha x_n^{l_\alpha} \xi^\alpha \neq 0,\ \forall \xi;\ \xi \neq 0,\ \xi \in R_n. \tag{4.2}$$

При $n > 2$ это означает, что для любого $x_n > 0$ и $\xi' \in R_{n-1}$ уравнение $P^0(x_n, \xi', z) = 0$ имеет ровно $\nu_n/2$ корней с $\operatorname{Im} \xi_k > 0$. Предполагается, что при $n = 2$ это условие опять выполняется. Вместе с оператором (4.1) рассмотрим граничные операторы

$$B_j(D) = \sum_{(\alpha, g) = m_j} b_{j\alpha} D^\alpha,\ j = 1, \cdots, \nu_n/2. \tag{4.3}$$

Пространства, где в дальнейшем будут рассматриваться краевые задачи, являются частным случаем пространств, определенных в § 2. Опишем их. Положим

$$|\xi'|_{\delta,\mu} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\xi_i|^{\frac{2}{\mu_i + \delta_i}}\right)^{1/2},$$

$$h_\mu(\xi', x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{2\nu_i} x_n^{2\nu_i \delta_i}\right)^{1/2}.$$

При $x_n = 0$, $h_\mu(\xi') = \rho_\mu(\xi')$.

Как и в §2 для любого s определим пространство $H^{(\mu)}_{(s,\delta)}(R_{n-1})$ как совокупность тех обобщенных функций $v \in S'(R_{n-1})$, для которых $\tilde{v}(\xi')$ является обычной функций и

$$\|v\|^{(\mu)}_{(s,\delta)} = \left(\int_{R_{n-1}} |\tilde{v}(\xi')|^2 \left(1 + |\xi'|_{\delta,\mu}\right)^{2s} d\xi'\right)^{1/2} < \infty.$$

Введем также пространства $H^{(\mu)}_{(1,\delta)}(R_n^+)$ как совокупность тех $u \in L_2(R_n^+)$, для которых $D_n^j \tilde{u}(\xi', x_n)$ при всех j, $0 \leqslant j \leqslant \nu_n$ являются функциями и

$$\|u\|^2_{(1,\delta)} = \sum_{j=0}^{\nu_n} \int \int_0^\infty \left(1 + |\xi'|_{\delta,\mu} + h_\mu(\xi', x_n)\right)^{(1-j\mu_n)} \times$$

$$\times \left| D_j^n \tilde{u}(\xi', x_n) \right|^2 dx_n\, d\xi' < \infty. \tag{4.4}$$

Справедливы следующие леммы (доказательства см. § 2).

Лемма 4.1. *$C_0^\infty(\overline{R}_n^+)$ плотно в пространстве $H_{(1,\delta)}^{(\mu)}(R_n^+)$.*

Лемма 4.2. *Для любого j, $0 \leqslant j \leqslant \nu_n - 1$ отображение $u \to D_n^j u(x', 0)$, $u \in C_0^\infty(\overline{R}_n^+)$ по непрерывности продолжается до ограниченного оператора из $H_{(1,\delta)}^{(\mu)}$ в пространство $H^{(\mu)}_{(1-(j+\frac{1}{2})\mu_n)}(R_{n-1})$.*

Лемма 4.3. *Функция $u \in L_2(R_n^+)$ принадлежит $H_{(1,\delta)}^{(\mu)}(R_n^+)$ тогда и только тогда, когда $D_n^{\nu_n} \in L_2(R_n^+)$ и $x_n^{\nu_i \delta_i} D_i^{\nu_i} u \in L_2(R_n^+)$ для всех i: $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Норма*

$$\|u\|_{(1,\delta)}^{(\mu)'} = \left(\|u\|^2_{L_2(R_n^+)} + \|D_n^{\nu_n} u\|^2_{L_2(R_n^+)} + \sum_{j=1}^{n-1} \|x_n^{\nu_j \delta_j} D_j^{\nu_j} u\|^2_{L_2(R_n^+)} \right)^{1/2} \tag{4.5}$$

эквивалентна норме $\|u\|_{(1,\delta)}^{(\mu)}$.

Лемма 4.4. *Пусть число l и мультииндекс α удовлетворяют соотношениям*

$$(g, \alpha) - 1 \leqslant l \leqslant (g, \alpha) - (\alpha, \mu), \quad (\alpha, \mu) \leqslant 1, \quad l \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Тогда отображение $u \to x_n^l D^\alpha u$ определяет ограниченный оператор из $H_{(1,\delta)}^{(\mu)}(R_n^+)$ в пространство $L_2(R_n^+)$.

В дальнейшем мы существенно используем свойства обыкновенных дифференциальных операторов с медленно изменяющимся коэффициентами (см. [6], § 3, [16]).

Рассмотрим на R_1^+ краевую задачу

$$P(D_t) u = \sum_{j=0}^{2m} a_j D_t^j u(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{4.7}$$

$$D^j u(0) = g_j, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{4.8}$$

где $f \in L_2(R_1^+)$, $g = (g_1, \cdots, g_{m-1}) \in C_m$, C_m — m-мерное комплексное пространство. Тогда известна слеующая

Теорема 4.1 (см. [13], т. 10. 2. 1). Если уравнение $P(\xi) = 0$, где $P(\xi)$ — характеристический многочлен оператора (4.7) имеет в точности m корней с $\mathrm{Im}\,\xi > 0$ и не имеет действительных корней, то оператор $A_0: u \to (P(D_t) u, D^j u(0), j = 0, 1, \cdots, m-1)$ определяет ограниченный оператор из $H_{2m}(R_1^+)$ в $L_2(R_1^+) \times C_m$ с обратным оператором A^{-1}, и для любого $b > 0$ такого, что $|\mathrm{Im}\,\xi_k| \geqslant b$, $k = 1, \cdots, m$ существует $A > 0$, что

$$\|A_0^{-1}(f, g)\|_{2m} \leqslant A \left(\|f\|_{L_2} + \left(\sum_{j=0}^{m-1} |g_j|^2 \right)^{1/2} \right)$$

для любых $(f, g) \in L_2(R_1^+) \times C_m$.

Это означает, что для любых $(f, g) \in L_2(R_1^+) \times C_m$ задача (4.7), (4.8) имеет единственное решение из класса $H_{2m}(R_1^+)$ и

$$\sum_{j<2m}\|D^j u\|_{L_2(R_1^+)} \leqslant A\left(\|f\|_{L_2(R_1^+)}+\left(\sum_{j=0}^{m-1}|g_j|^2\right)^{1/2}\right).$$

Для изучения существования и единственности решения задачи с переменными коэффициентами применим метод работы [6].

Рассмотрим оператор (4.1), для которого выполняется условие (4.2). С каждым оператором (4.1) рассмотрим $m=\frac{\nu_n}{2}$ граничных операторов

$$B_j(D)=\sum_{(\alpha,g)=d_j} b_{j\alpha} D^\alpha, \tag{4.9}$$

где $B_j(\xi)$ g-однородный порядка $d_j<1$, т. е. $B_j(\lambda^{g_1}\xi_1,\cdots,\lambda^{g_n}\xi_n)=\lambda^{d_j}B_j(\xi_1,\cdots,\xi_n)$.

Рассмотрим в R_n^+ краевую задачу

$$P(x_n,D)u(x)=f(x),\quad x_n>0, \tag{4.10}$$

$$B_j(D)u(x)=\varphi_j(x'),\ x_n=0,\ j=1,\cdots,m=\frac{\nu_n}{2}. \tag{4.11}$$

Пусть задача (4.10), (4.11) удовлетворяет следующему условию типа условия Лопатинского (эллиптический случай см. [17], [18], полуэллиптический случай см. [19]): на R_1^+ задача

$$P(x_n,\xi',D_n)v(x_n)=0,\quad x_n>0 \tag{4.12}$$

$$B_j(\xi',D_n)v(x_n)=0,\ x_n=0,\ j=1,\cdots,m \tag{4.13}$$

ни при каких $\xi'\neq0$, $\xi'\in R_{n-1}$ не имеет решений в $H_{2m}(R_1^+)$, отличных от нуля.

Определим пространство $\mathbf{H}$ как прямое произведение

$$\mathbf{H}=L_2(R_n^+)\times\prod_{j=1}^m H^{(\mu)}_{\left(1-\left(d_j-\frac{1}{2}\mu_n\right)\right)}(R_{n-1}),$$

где норма дается формулой

$$\|(f,\varphi)\|=\|f\|+\sum_{j=1}^m\|\varphi_j\|_{\left(1-\left(d_j-\frac{1}{2}\mu_n\right)\right)}.$$

Рассмотрим отображение $\mathbf{A}$: $u\to(P(x_n,D)u, B_j(D)u, x_n=0, j=1,\cdots,m)$, Из лемм 2.2, 2.5 следует

Теорема 4.2. $\mathbf{A}_0$ *определяет ограниченный оператор из* $H^{(\mu)}_{(1,\delta)}(R_n^+)$ *в пространство* $\mathbf{H}$.

В R_1^+ рассмотрим уравнение

$$P(x_n,\xi',D_n)v(x_n)=0. \tag{4.14}$$

Теорема 4.3 *Пусть для оператора* $P(x_n,D)$ *при* $x_n>0$ *выполнено условие полуэллиптичности. Тогда для всех* $\xi'\neq0,\xi'\in R_{n-1}$ *размерность* $\mathbf{N}_{\xi'}$ *равна* $m=\frac{\nu_n}{2}$. *В* $\mathbf{N}_{\xi'}$ *можно выбрать базис* $\psi_1(\xi', x_n),\cdots,\psi_m(\xi',x_n)$ *такой, что функции* $D_n^j\psi_k(\xi',x_n)$ *при всех* k, $1<k\leqslant$

$\leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant v_n$ непрерывны по совокупности переменных и существуют числа $d > 0$ и $C = C(|\xi'|_{\mu,\delta})$ такие, что

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{s=1}^{m} \| e^{dx_n} D_n^j \psi_k(\xi', x_n) \|^2_{L_2(R_1^+)} \leqslant C(|\xi'|_{\mu,\delta}). \tag{4.15}$$

Доказательство. Заметим, что функция $P(x_n, \xi)$ квазиоднородна в следующем смысле:

$$P\left(\frac{x_n}{\lambda}, \lambda^{g_1}\xi_1, \cdots, \lambda^{g_n}\xi_n\right) = \lambda P(x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n).$$

Следовательно, если $v(x_n)$ — решение уравнения (4.14), то $v(\lambda x_n)$ будет решением уравнения

$$P(x_n, \lambda^{g_1}\xi_1, \cdots, \lambda^{g_{n-1}}\xi_{n-1}, D_n) v = 0.$$

Поэтому достаточно доказать теорему 4.3 только при $|\xi'| = 1$. Пусть $|\omega| = 1$. Положим

$$h_\mu(\omega, x_n) = \left(\sum \omega_i^{v_i} x_n^{\delta_i v_i}\right)^{1/2}.$$

Отсюда очевидно следует, что существуют постоянные $C_k > 0$ такие, что

$$D_n^k h_\mu(\omega, x_n) \leqslant C_k x_n^{-k} h_\mu(\omega, x_n). \tag{4.16}$$

Сделаем замену переменной $x_n = x_n(t)$ так, чтобы $dt = h_\mu^{\mu_n}(\omega, x_n)\, dx_n$. Тогда из (4.16) следует, что для всех k, $1 \leqslant k \leqslant v_n$

$$D_n^j = h_\mu^{\mu_n j}(\omega, x_n) D_t^j + \sum_{k=0}^{j-1} \chi_{jk}(\omega, x_n) D_j^k, \tag{4.17}$$

где при $x_n > 1$ χ_{jk} удовлетворяют соотношениям

$$|D_n^r \chi_{jk}(\omega, x_n)| \leqslant C x_n^{-1} h^{(j-1)\mu_n}(\omega, x_n), \quad 0 \leqslant r \leqslant m. \tag{4.18}$$

Для любого слагаемого в уравнении (4.14) при $x_n \geqslant 1$ получим

$$|x_n^{\delta_1 \alpha_1 + \cdots + \delta_{n-1}\alpha_{n-1}} \omega^{\alpha'}| (x_n^{v_1 \delta_1} \omega_1^{v_1})^{\alpha_1/v_1} \cdots (x_n^{v_{n-1}\delta_{n-1}} \omega_{n-1}^{v_{n-1}})^{\alpha_{n-1}/v_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant h_\mu(\omega, x_n)^{(\alpha', \mu')} \leqslant h_\mu^{(1-\alpha_n \mu_n)}(\omega, x_n). \tag{4.19}$$

Уравнение (4.14) можно записать в виде

$$h_\mu(\omega, x_n)\left[\sum_{j=0}^{v_n} a_{j0}(\omega, x_n) D_t^j v(x_n) + \sum_{j=0}^{v_n} a_{j1}(\omega, x_n) D_t^j v(x_n)\right] = 0,$$

где

$$a_{j0} = \sum_{(\alpha, \mu) = 1 - j\mu_n} a_\alpha x_n^{l_\alpha} \omega^{\alpha'} / h_\mu^{(1-j\mu_n)}(\omega, x_n),$$

а коэффициенты $a_{j1}(\omega, x_n)$ при $x_n \geqslant 1$ удовлетворяют соотношениям

$$|a_{j1}(\omega, x_n)| \leqslant C x_n^{-1}$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Из (4.17)—(4.19) следует, что при $0 \leqslant r \leqslant v_n$

$$|D_n^r a_{j0}(\omega, x_n)| \leqslant C x_n^{-1}.$$

Перейдем теперь в уравнении (4.14) от переменных x_n к переменным t, уравнение (4.14) примет вид

$$\sum_{j=0}^{\nu_n} a_{j0}(\omega, t)\, D_t^j v(t) + \sum_{j=0}^{\nu_n} a_{j1}(\omega, t)\, D_t^j v(t) = 0. \qquad (4.20)$$

Из вышеприведенных рассуждений следует, что при $t > t_1 = t(1)$ коэффициенты $a_{jk}(\omega, t)$ равномерно ограничены. Для достаточно больших $x_0 > 0$ $|a_{j1}(\omega, x_n)|, |D_n^r a_{j0}(\omega, x_n)|$, $1 \leqslant r \leqslant \nu_n$ будут меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. И так как $\frac{da_{j0}}{dx_n} = h_\mu^{\mu_n}(\omega, x_n) \cdot \frac{da_{j0}}{dt}$, то функции $|D_t^r a_{j0}(\omega, t)|$, $1 \leqslant r \leqslant \nu_n$ при достаточно больших t также будут меньше ε. После перехода к новой переменной $t = t(x)$ на полуоси $t \geqslant t_0$ получается уравнение (4.20) такого типа, что и в пункте 3 работы [6], $\Theta = \Omega = \{\omega; |\omega| = 1\}$. Проверим, что выполняются все условия теоремы 3.1 работы [6]. Из полуэллиптичности следует, что $a_{\nu_n 0}(t) = P_0(1, 0, \cdots, 1)$ и является постоянной, отличной от нуля. Так как выполняются все условия этой теоремы покажем, что для корней уравнения $P_0(t, \omega, z) = 0$ с некоторой постоянной $b > 0$ справедлива оценка $|\operatorname{Im} z| > b$.

Из условия полуэллиптичности следует, что для любого $\omega, |\omega| = 1$. уравнение $P_0(1, \omega, z) = 0$ имеет m корней с $\operatorname{Im} z_k(\omega) > 0$. Из компактности множества $\Omega = \{\omega; |\omega| = 1\}$ следует существование числа $b_0 > 0$ такого, что $|\operatorname{Im} z_k(\omega)| > b_0$, $\forall\, \omega \in \Omega$. А из полуэллиптичности вытекает, что для любого $\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{\nu_i}\right)^{1/2}$

$$P_0(1, \lambda^{\mu_1} \omega_1, \cdots, \lambda^{\mu_{n-1}} \omega_{n-1}, \lambda^{\mu_n} z) = \lambda\, P_0(1, \omega, z) = 0.$$

Следовательно, если z_k—решение $P_0(1, \omega, z_k) = 0$, то $\lambda^{\mu_n} z_k$ — решение уравнения $P_0(1, \lambda^{\mu'} \omega, \lambda^{\mu_n} z) = 0$ и $|\lambda^{\mu_n} z_k| > b_0 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{\nu_i}\right)^{1/2\, \mu_n}$ для любого $\xi' \in R_{n-1}$, $\xi' \neq 0$. Если перейти теперь от t к x_n, получим

$$P_0(x_n, \omega, z\, h_\mu^{\mu_n}(\omega, x_n)) = 0. \qquad (4.21)$$

В силу полуоднородности (4.21) можно записать в виде

$$P_0(1, x_n^{\varepsilon_1} \omega_1, \cdots, x_n^{\varepsilon_{n-1}} \omega_{n-1}, x_n^{\mu_n} z h_\mu^{\mu_n}(\omega, x_n)) = 0.$$

Отсюда получим, что

$$(x_n h_\mu(\omega, x_n))^{\mu_n} |\operatorname{Im} z_k| \geqslant b_0 \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_n^{\varepsilon_i} \omega_i)^{\nu_i}\right)^{\frac{1}{2}\mu_n}.$$

Следовательно, $|\operatorname{Im} z_k| \geqslant b_0$ при $t \geqslant t_0$, $k = 1, \cdots, m$.
Таким образом, проверено, что уравнение (4.21) удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.1 работы [6] при $t \geqslant t_0$.

Если теперь перейти от переменной t к x_n, то получим, что существует такое x_0, для которого на полуоси $x_n \geqslant x_0$ решения уравнения (4.14) образуют m-мерное пространство. Поскольку любое решение уравнения

(4.14) непрерывным образом можно продолжить на всю полуось R_1^+, то получим, что размерность пространства $N_{\xi'}$ равна m. Применяя теперь теорему 3.2 работы [6] получим неравенство (4.15) для любого $d < b_0$. Отсюда непосредственно следует

Теорема 4.4. *Пусть оператор $P(x_n, D)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3. Для того чтобы граничная задача* (4.12), (4.13) *не имела ограниченных на R_1^+ решений, отличных от нуля, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det\{B_j(D_n)\psi_k(\xi', x_n)\}_{x_n=0} \neq 0, \quad \forall \xi' \in R_{n-1}, \ \xi' \neq 0,$$

где $\psi_k(\xi', x_n)$ — элементы базиса в $N_{\xi'}$.

Нижеформулируемые теоремы являются обобщениями соответствующих теорем для эллиптического оператора (см. [6], предложения 4.2, 4.3, т. 4.2) и доказываются аналогичными соображениями.

Теорема 4.5. *Рассмотрим неоднородное уравнение*

$$P(x_n, \xi', D)\, v(x_n) = f(x_n). \tag{4.22}$$

Пусть для $P(x_n, \xi)$ при $x_n > 0$, удовлетворяются условия теоремы 4.3. Тогда для любых $\xi' \neq 0, \xi' \in R_{n-1}$ можно определить непрерывный оператор $G_{\xi'}$ из $L_2(R_1^+)$ в пространство $H_{2m}(R_1^+)$, обладающий следующими свойствами:

1) Для любого $f \in L_2(R_1^+)$ функция $v(x_n) = G_{\xi'} f(x_n)$ является решением уравнения (4.22).

2) Существует такая постоянная $C > 0$, что при всех $\xi' \neq 0$, $\xi' \in R_{n-1}$

$$\sum_{j=0}^{n} \| (|\xi'|_{\delta,\mu} + h_\mu(\xi', x_n))^{1-j\mu_n} D_n^j v(x_n) \|^2_{L_2(R_1^+)} \leq C \|f\|^2_{L_2(R_1^+)}.$$

Перейдем к изучению краевой задачи в R_1^+:

$$P(x_n, \xi', D_n)\, v(x_n) = f(x_n), \quad x_n > 0,$$

$$B_j(\xi', D_n)\, v(x_n) = \varphi_j, \quad x_n = 0, \ j = 1, \cdots, m.$$

Обозначим через $\mathbf{A}_{\xi'}$ отображение

$$v(x_n) \to (P(x_n, \xi', D_n) v, \ B_j(\xi', D_n) v|_{x_n=0}, \ j = 1, \cdots, m).$$

Теорема 4.6. *Если выполняются условия теоремы 4.3 и граничные операторы B_j удовлетворяют условиям теоремы 4.4, то для любого $\xi' \neq 0$. $\xi' \in R_{n-1}$ можно определить непрерывный оператор $\mathbf{A}_{\xi'}^{-1}$ из $L_2(R_1^+) \times C_m$ в пространство $H_{2m}(R_1^+)$, обладающий следующими свойствами:*

1) $\mathbf{A}_{\xi'} \mathbf{A}_{\xi'}^{-1} = E$, E—тождественный оператор в $L_2(R_1^+) \times C_m$.

2) Существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sum_{j=0}^{2m} \| (|\xi'|_{\delta,\mu} + h_\mu(\xi', x_n))^{1-j\mu_n} D^j v(x_n) \|^2 \leq$$

$$\leq C \left(\|f\|^2 + \sum_{k=1}^{m} (|\xi'|_{\delta,\mu}^{1-(d_k-\frac{1}{2}\mu_n)} |\varphi_k|^2 \right).$$

3) Если $v(x_n) \in H_{2m}(R_1^+)$ *и*

$$\sum_{j=0}^{2m} \| ((|\xi'|_{\delta,\mu} + h_\mu(\xi', x_n))^{1-j\mu_n} D^j v(x_n) \|^2 < \infty,$$

то $\mathbf{A}_{\xi'}^{-1} \mathbf{A} v = v$.

4) При $\xi' \neq 0$ *оператор* $\mathbf{A}_{\xi'}^{-1}$ *непрерывно зависит от* ξ'.

Обозначим через $\mathbf{H}(\tau)$ *подпространство пространства* $\mathbf{H}$, *состоящее из тех* $(f, \varphi) \in \mathbf{H}$, *для которых* $f \equiv 0$, *при* $x_n > \tau$.

Теорема 4.7. *Пусть выполняются условия теоремы 4.3. Тогда существует линейное отображение* R_0 *из* $\bigcup_{\tau>0} \mathbf{H}(\tau)$ *в* $\mathbf{H}_{(1,\delta)}^{(\mu)}(R_n^+)$, *обладающее следующими свойствами:*

1) Для любого $\tau > 0$ *отображение* R_0 *является ограниченным оператором из* $\mathbf{H}(\tau)$ *в* $\mathbf{H}_{(1,\delta)}^{(\mu)}(R_n^+)$.

2) Для любого $\tau > 0$ *и всех* $(f, \varphi) \in \mathbf{H}(\tau)$

$$\mathbf{A}_0 R_0 (f, \varphi) = (f, \varphi + Q(f, \varphi)),$$

где Q — *непрерывный оператор из* $\mathbf{H}(\tau)$ *в* $\mathbf{H}_\infty(R_{n-1}) = \bigcap \mathbf{H}_s(R_{n-1})$.

3) Если $u(x) \in \mathbf{H}_{(1,\delta)}^{(\mu)}(R_n^+)$ *и* $u(x) = 0$, *при* $x_n > \tau$ *для некоторого* $\tau > 0$, *то* $R_0 \mathbf{A}_0 u = u$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 22. I. 1985

Գ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Վերասերվող ռեգուլյար հավասարումների որոշ դասեր կիսատարածություններում *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ապացուցվում են վերասերվող ռեգուլյար հավասարումների լուծումների համար Դիրիխլեի խնդրի, ինչպես նաև վերասերվող կիսաէլիպտիկ հավասարումների լուծումների համար ընդհանուր եզրային պայմաններով խնդրի գոյության և միակության թեորեմներ։ Նշված թեորեմները վերաբերվում են «թույլ» վերասերման դեպքին և ընդհանրացնում են վերասերվող էլիպտիկ հավասարումների համար համապատասխան թեորեմները (տե՛ս [3], [6])։ Գտնված են կշռային դասեր, որտեղ ուսումնասիրվում են նշված խնդիրների լուծումների գոյության և միակության հարցերը, ինչպես նաև լուծված է այդ կշռային դասերի ֆունկցիաների հետքերի խնդիրը։

G. A. KARAPETIAN. *On a class of degenerate regular equations in half-space* (summary)

The existence and uniqueness theorems for solutions of the Dirichlet problem for degenerate regular equations and general boundary value problem for degenerate quasielliptice equations are proved. These theorems concern the "weak" degenerate case, and generalize corresponding theorems for elliptic equations (see [3], [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН СССР, 1951, 77, № 2, 181—183.
2. *М. М. Смирнов.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, М., «Наука», 1966.

3. *С. М. Никольский, П. И. Лизоркин.* О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением на границе, ДАН СССР, 1964, 159, № 3, 512—515.

4. *Дж. Кон, Л. Ниренберг.* Некоэрцитивные краевые задачи, Сб. статей «Псевдодифференциальные операторы», М., «Мир», 1967, 88—165.

5. *M. S. Baouendi.* Sur une classe d'ope'rateurs elliptigues de'generes, Bull- Soc. mat. France, 95, 1967, 45—87.

6. *М. И. Вишик, В. В. Грушин.* Об одном классе вырождающихся эллиптических уравнений высших порядков, Мат. сб. 79, 1, 1969, 3—36.

7. *П. И. Лизоркин, С. М. Никольский.* Коэрцитивные свойства эллиптических уравнений с вырождением. Вариационный метод, Труды МИАН СССР, 157, 1981, 90—118.

8. *А. Д. Баев* Об одном классе краевых задач для вырождающихся эллиптических псевдодифференциалных уравнений, Воронежский у-т, Воронеж, 1983, 35 с.

9. *П. И. Лизоркин, С. М. Никольский.* Коэрцитивные свойства эллиптических уравнений с вырождением с обобщенной правой частью, Труды МИАН СССР. 161, 1983, 157—183.

10. *В. П. Михайлов.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН СССР. 91, 1967, 59—80.

11. *Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин.* Об одном классе гипоэллиптических полиномов, Мат. сб., 75 (117), 1968, № 3, 400—416.

12. *Г. Г. Казарян.* Неравенства между производными и дифференциальными операторами и некоторые их применения к уравнениям в частных производных, Автореферат докторской диссертации, М., 1981.

13. *Л. Хёрмандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.

14. *О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский.* Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., «Мир», 1975.

15. *С. М. Никольский.* Вариационная проблема для уравнений эллиптического типа с вырождением на границе, Труды МИАН СССР, 1979, 150, 212—238.

16. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, XIX, 3, 1964, 53—161.

17. *З. Я. Шапиро.* Об общих краевых задачах эллиптического типа, Изв.. АН СССР, сер. матем., 1953, 17, 539—562.

18. *Я. Б. Лопатинский.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. мат. ж., 1953, 5,125—161.

19. *Г. А. Карапетян.* Решения полуэллиптических уравнений в полупространстве, Труды МИАН СССР, 170, 1984, 119—138.