ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 5, 1986 Математика

УДК 517.968

А. О. БАБАЯН

НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА-ХОПФА С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ СИМВОЛОМ

§ 1. Введение. Формулировка результатов

В настоящей работе исследуется уравнение

$$\varphi(t)-\int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t),\quad t\geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $k\in L^1(-\infty,\infty)$, $f\in L^p(0,\infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, решение φ ищется в том же классе $L^p(0,\infty)$, которому принадлежит f. Символ уравнения (1)

$$1-K(\lambda)=1-\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\,e^{it\lambda}\,dt$$

предполагается вырождающимся в точке нуль.

В случае, когда символ уравнения $1-K(\lambda)$ отличен от нуля на всей вещественной оси, полное исследование (1) было дано М. Г. Крейном в [1]. В работах [2—6, 11] рассматривается случай, когда символ имеет вырождение степенного вида в конечном числе точек, то есть когда символ допускает представление

$$1-K(\lambda)=\prod_{k,j}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda+i}\right)^{\sigma_k}\left(\frac{\lambda-a_j}{\lambda-i}\right)^{\eta_j}H(\lambda). \tag{2}$$

Здесь λ_k, a_j — действительные числа, $\operatorname{Re}\sigma_k>0$, $\operatorname{Re}\eta_j>0$, $H(\lambda)\neq 0$ при всех действительных λ. В работах М. И. Хайкина [7] рассматривается более общий случай, а именно, когда $\ln(1-K(\lambda))$ локально интегрируем на вещественной оси. При дополнительных предположениях, что $\operatorname{mes}E(\lambda)<\lambda^a$, где $E(\lambda)=\{t:|1-K(t)|<\lambda\}$, $a>0$ и что $\arg(1-K(\lambda))$ ограничен, доказывается возможность факторизации символа в классе S' (класс медленно растущих распределений) и на этой основе решается однородное уравнение.

В работе В. Б. Дыбина [12] уравнение (1) исследуется в случае когда символ допускает факторизацию. Однородное уравнение в [9] рассматривалось при условии, что символ допускает представление

$$1-K(\lambda)=\theta(\lambda)\,(1-H(\lambda)), \tag{3}$$

где $1-H(\lambda)\neq 0$ для всех λ, $H(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $h\in L^1(-\infty,\infty)$, $\theta(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\theta(\lambda)=\begin{cases} a\left|\frac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\alpha_1}, & 0<\lambda<\varepsilon \\ b\left|\frac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\alpha_2}, & -\varepsilon<\lambda<0 \end{cases};\ \theta(\lambda)=1,\ |\lambda|>2\varepsilon. \tag{4}$$

Здесь a и b — ненулевые постоянные, $\operatorname{Re}\alpha_1>0$, $\operatorname{Re}\alpha_2>0$, $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)\neq 0$ (случай, когда $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)=0$ разбирался в [7] и [8]; в [8] было исследовано также и неоднородное уравнение). Было доказано, что при $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)<0$ однородное уравнение имеет бесчисленное множество линейно независимых решений.

Настоящая работа посвящена в основном изучению неоднородного уравнения (1) при условии, что символ имеет вид (3), причем в представлении (4) для $\theta(\lambda)$, $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)<0$. В дальнейшем, не умаляя общности, можем предполагать, что $\operatorname{Re}(\alpha_1-\alpha_2)>0$.

Множество функций, имеющих вид

$$c+\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\,e^{it\lambda}\,dt,\ h\in L^1(-\infty,\infty), \tag{5}$$

будем обозначать R. Класс функций вида (5), когда $h(x)=0$ п. в при $x<0$ обозначим R^+, а класс функций вида (5) с $h(x)=0$ п. в. при $x>0$ обозначим R^-.

В параграфе 2 будет показано, что если символ уравнения (1) имеет вид (3), то он может быть представлен в виде

$$1-K(\lambda)=\frac{g_-(\lambda)}{g_+(\lambda)}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}, \tag{6}$$

при $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)<0$. Здесь γ — целое число, $\Phi_0^\pm(\lambda)\neq 0$ при $\lambda\in\overline{D^\pm}$ ($D^+=\{z\in\mathbf{C}:\operatorname{Im}z>0\}$, $D^-=\{z:\operatorname{Im}z<0\}$), $\Phi_0^\pm(\lambda)\in R^\pm$,

$$g_\pm(\lambda)=\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda\pm i}+i\,\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda\pm i}\right)^{\alpha_\pm}e^{\beta\frac{\pi^2}{4}}, \tag{7}$$

где $\operatorname{Re}\beta<0$, $0<\operatorname{Re}\alpha_+\leqslant 1$, $\operatorname{Re}\alpha_->0$. Под $\log\frac{\lambda}{\lambda+i}$, $\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\alpha_+}$ понимаются те ветви этих функций, которые аналитически продолжаются в D^+. Соответственно, $(\lambda/(\lambda-i))^{\alpha_-}$ аналитически продолжается в D^-. При $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)>0$ такая факторизация уже невозможна, но справедливо следующее представление:

$$1-K(\lambda)=\frac{g_1^+(\lambda)}{g_1^-(\lambda)}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma_1}\frac{\Phi_1^-(\lambda)}{\Phi_1^+(\lambda)}, \tag{8}$$

где γ_1 — целое число, $\Phi_1^\pm(\lambda)\neq 0$ при $\lambda\in\overline{D^\pm}$, соответственно, $\Phi_1^\pm(\lambda)\in R^\pm$, и

$$g_1^{\pm}(\lambda) = \exp\left[\beta_1\left(\log\frac{\lambda}{\lambda\pm i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda\pm i}\right)^{-\tilde{\alpha}_{\pm}} e^{\pm\beta_1\frac{\pi^2}{4}}, \tag{9}$$

где $\operatorname{Re}\beta_1 < 0$, $\operatorname{Re}\bar{\alpha}_+ > 0$, $0 < \operatorname{Re}\tilde{\alpha}_- \leqslant 1$.

Уравнение (1) будет исследоваться в случае, когда преобразование Фурье правой части допускает представление

$$F(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m G(\lambda)+F^-(\lambda), \tag{10}$$

где $G(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $g(t)\in L^1(-\infty, \infty)\cap$ $\cap L^p(-\infty, \infty)$, $F^-(\lambda)$ — преобразование Фурье $f_-(t)\in L^1(-\infty, 0)$, m — целое число, имеющее вид

$$m=[\operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi|\operatorname{Im}\beta|+p^{-1}]+1$$

(здесь $[\cdot]$ — целая часть числа, α_-, β определяются из представления символа (6)).

Теперь основное предложение, которое будет доказано, можно сформулировать следующим образом:

Теорема. *При* $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)<0$ *неоднородное уравнение* (1) *с правой частью, преобразование Фурье которой допускает представление* (10), *имеет решение в классе* $L^p(0, \infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

§ 2. Факторизация символа

Лемма 1. *Если* $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)<0$, *то при условиях, наложенных на символ уравнения* (1) *в* § 1, $1-K(\lambda)$ *допускает представление* (6). *При* $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)>0$ *для* $1-K(\lambda)$ *справедливо представление* (8).

Доказательство. Прежде всего используем тот факт, что

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}, \quad \lambda=\bar{\lambda}$$

(под $[\lambda/(\lambda+i)]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}$, $[\lambda/(\lambda-i)]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}$ понимаются те ветви этих функций, которые можно аналитически продолжить в D^+ и D^- соответственно). Функцию $1-K(\lambda)$ можно представить в виде

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\theta_1(\lambda)\,(1-H(\lambda)).$$

Здесь $\theta_1(\lambda)$ имеет в окрестности нуля следующий вид:

$$\theta_1(\lambda)=\begin{cases} a\left|\dfrac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}, & 0<\lambda<\varepsilon\\[2ex] b\left|\dfrac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}, & -\varepsilon<\lambda<0.\end{cases}$$

Для того, чтобы уничтожить этот разрыв в нуле, введем функцию

$$\psi(\lambda)=\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2-\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda+i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right].$$

Эта функция в окрестности нуля допускает такие оценки:

$$\psi(\lambda)\sim\exp\left[-\beta\pi^2+2\pi i\beta\log|\lambda|\right],\quad \lambda\to+0,$$

$$\psi(\lambda)\sim\exp\left[\beta\pi^2-2\pi i\beta\log|\lambda|\right],\quad \lambda\to-0.$$

Следовательно, если β определить из соотношения

$$2\pi i\beta=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2},$$

то функция

$$\eta(\lambda)=\psi^{-1}(\lambda)\theta_1(\lambda)(1-H(\lambda))$$

нигде не обращается в нуль, а в точке 0 имеет разрыв первого рода. Значит, можно подобрать такое δ, чтобы функция

$$g(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{-\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\delta}\eta(\lambda)$$

была непрерывна в нуле. Для этого можно определить δ из соотношения

$$-\pi i\delta=\beta\pi^2+\frac{1}{2}\log\frac{a}{b}$$

или

$$\delta=i\beta\pi+\frac{i}{2\pi}\log\frac{a}{b}.$$

При таком выборе δ функция $g(\lambda)$ не обращается в нуль на $[-\infty,\infty]$ и непрерывна. Кроме того, из вида функций $\theta_1(\lambda)$ и $\psi^{-1}(\lambda)$ можно заключить, что $g(\lambda)\in R$. Следовательно, функция $g(\lambda)$ допускает факторизацию (см. [1])

$$g(\lambda)=\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}.$$

В этой формуле $\Phi_0^\pm(\lambda)\neq0$ в $\overline{D^\pm}$, соответственно, $\Phi_0^\pm(\lambda)\in R^\pm$, $\varkappa$ — целое число, равное индексу функции $g(\lambda)$. Окончательно, символ можно представить так:

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta}\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}.\qquad(11)$$

Теперь в случае, когда $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)<0$, из (11) получается представление (6). При этом

$$\alpha_-=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta+\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta\right)\right]+1,\quad \alpha_+=-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-$$

$$-\delta+\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta\right)\right]+1,\quad \gamma=\varkappa+\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta\right)\right]+1.$$

Если же $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)>0$, то можно получить факторизацию вида (8), где $\beta_1=-\beta$,

$$\tilde{\alpha}_+=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta+\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta\right)\right]+1,\ \tilde{\alpha}_-=-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+$$

$$+\delta+\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta\right)\right]+1,\ \gamma_1=\varkappa-\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta\right)\right]-1.$$

Лемма доказана.

Замечание. Так как мы предполагали, что $\operatorname{Re}(\alpha_1-\alpha_2)>0$, то мнимая часть числа β из представления (6) будет отрицательна.

Лемма 2. *В условиях леммы 1 при* $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)>0$ *факторизация символа типа (6) невозможна.*

Доказательство. Пусть символ имеет представление (3) и $\operatorname{Im}(\alpha_1-\alpha_2)>0$. Тогда в силу леммы 1 для $1-K(\lambda)$ справедливо следующее представление:

$$1-K(\lambda)=\frac{g_1^+(\lambda)}{g_1^-(\lambda)}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma_1}\frac{\Phi_1^-(\lambda)}{\Phi_1^+(\lambda)}, \tag{12}$$

где

$$g_1^\pm(\lambda)=\exp\left[\beta_1\left(\log\frac{\lambda}{\lambda\pm i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda\pm i}\right)^{\tilde{\alpha}_\pm}e^{\beta_1\frac{\pi^2}{4}}$$

($\operatorname{Re}\beta_1<0$). Допустим, что справедливо также представление типа (6), а именно

$$1-K(\lambda)=\frac{G_-(\lambda)}{G_+(\lambda)}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi_2^-(\lambda)}{\Phi_2^+(\lambda)}. \tag{13}$$

Здесь $G_\pm(\lambda)\in R^\pm$, $G_\pm(\lambda)\neq0$ при $\lambda\in\overline{D}^\pm\setminus\{0\}$, γ — целое число, $\Phi_2^\pm(\lambda)\in R^\pm$ и $\Phi_2^\pm(\lambda)\neq0$ при $\lambda\in\overline{D}^\pm$.

Перейдем к комплексно сопряженной функции $1-\overline{K}(\lambda)$. В окрестности нуля эта функция допускает следующую оценку:

$$1-\overline{K}(\lambda)\sim\begin{cases}a_1\,|\lambda|^{\overline{\alpha}_1}, & 0<\lambda<\varepsilon\\ b_1\,|\lambda|^{\overline{\alpha}_2}, & -\varepsilon<\lambda<0.\end{cases}$$

Из представления (12) следует, что

$$1-\overline{K}(\lambda)=\frac{G_1^-(\lambda)}{G_1^+(\lambda)}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\gamma_1}\frac{\Phi_3^-(\lambda)}{\Phi_3^+(\lambda)}, \tag{14}$$

где

$$G_1^\pm(\lambda)=\exp\left[\overline{\beta}_1\left(\log\frac{\lambda}{\lambda\pm i}-i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda\pm i}\right)^{\overline{\tilde{\alpha}}_\pm}e^{\overline{\beta}_1\frac{\pi^2}{4}}$$

($\operatorname{Re}\overline{\beta}_1=\operatorname{Re}\beta_1<0$). Рассмотрим произведение $(1-K(\lambda))(1-\overline{K}(\lambda))$. Очевидно

$$W(\lambda)=(1-K(\lambda))\,(1-\overline{K}(\lambda))\in R.$$

В окрестности нуля эта функция оценивается так:

$$W(\lambda)\sim\begin{cases} a_0\,|\lambda|^{\alpha_1+\overline{\alpha}_1}, & 0<\lambda<\varepsilon \\ b_0\,|\lambda|^{\alpha_2+\overline{\alpha}_2}, & -\varepsilon<\lambda<0. \end{cases}$$

Следовательно, по лемме 1 справедливо представление

$$W(\lambda)=\frac{g_2^+(\lambda)}{g_2^-(\lambda)}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma_2}\frac{\Phi_4^-(\lambda)}{\Phi_4^+(\lambda)},$$

где

$$g_2^{\pm}(\lambda)=\exp\left[\beta_2\left(\log\frac{\lambda}{\lambda\pm i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda\pm i}\right)^{\alpha_3^{\pm}}e^{\beta_2\frac{\pi^2}{4}}$$

($\operatorname{Re}\beta_2=0$, так как $\operatorname{Im}(\alpha_1+\overline{\alpha}_1)=\operatorname{Im}(\alpha_2+\overline{\alpha}_2)=0$).

Используя формулы (13) и (14), получим

$$\frac{G_-(\lambda)\,G_1^-(\lambda)}{G_+(\lambda)\,G_1^+(\lambda)}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma-\gamma_1}\frac{\overline{\Phi}_-(\lambda)}{\overline{\Phi}_+(\lambda)}=\frac{g_2^+(\lambda)}{g_2^-(\lambda)}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma_2}\frac{\Phi_4^-(\lambda)}{\Phi_4^+(\lambda)}$$

или

$$\frac{G_-(\lambda)\,G_1^-(\lambda)\,g_2^-(\lambda)\,\widetilde{\Phi}_-(\lambda)}{\Phi_4^-(\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\gamma_2-\gamma+\gamma_1}=$$

$$=\frac{G_+(\lambda)\,G_1^+(\lambda)\,g_2^+(\lambda)\,\widetilde{\Phi}_+(\lambda)}{\Phi_4^+(\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\gamma_2-\gamma+\gamma_1}. \tag{15}$$

Функции $G_1^{\pm}(\lambda)$ в окрестности нуля допускают следующую оценку:

$$|G_1^{\pm}(\lambda)|\leqslant C\exp\left|-\frac{|\operatorname{Re}\beta_1|}{2}\log^2|\lambda|\right|,\quad \lambda\to 0. \tag{16}$$

Следовательно, и правая и левая части (15) обращаются в нуль при $\lambda=0$. Кроме того, используя оценку (16), можно заключить, что правая часть (15) принадлежит R^+, а левая — R^-. Следовательно, по теореме Лиувилля и правая, и левая части (15) тождественно равны нулю. Итак, мы пришли к противоречию, значит предположение, что $1-K(\lambda)$ допускает представление (6), неверно.

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Введем сначала некоторые определения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Обозначим через R_p, R_p^+, R_p^- — классы преобразований Фурье функций, принадлежащих, соответственно, $L^p(-\infty,\infty)$, $L^p(0,\infty)$, $L^p(-\infty,0)$ (где $L^p(0,\infty)$—класс функций из $L^p(-\infty,\infty)$, обращающихся в нуль на $(-\infty,0)$. Аналогично определяется $L^p(-\infty,0)$). Класс R_p при некоторых p состоит, вообще говоря, из обобщенных функций, действующих на S (пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций) таким образом:

$$(\widehat{f}, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\psi}(t)\,dt \quad \text{при } \psi \in S.$$

Здесь $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Если функция $h \in L^1(-\infty, \infty)$, то $\widehat{h}\widehat{f}$ будет обозначать следующую обобщенную функцию:

$$(\widehat{h}\widehat{f}, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} (h * f)(t)\widehat{\psi}(t)\,dt. \tag{17}$$

Из этого определения ясно, что класс R_p инвариантен относительно умножения на функции из R (умножение понимается в смысле (17)). Аналогично R_p^+ (R_p^-) инвариантно относительно умножения на функции из R^+ (R^-). Операторы π^+ и π^-, переводящие R_p в R_p^+ и R_p^- соответственно, определим следующим образом:

$$\pi^+[\widehat{f}] = \widehat{\chi f}, \quad \pi^-[\widehat{f}] = \widehat{(1-\chi) f},$$

где $\chi(t)$ — функция Хевисайда.

Доказательство основной теоремы.

Рассмотрим уравнение (1) при условии, что преобразование Фурье правой части допускает представление (10). После перехода к преобразованиям Фурье это уравнение примет вид:

$$(1 - K(\lambda))\,\Phi^+(\lambda) = F(\lambda) + \Phi^-(\lambda), \tag{18}$$

где $1 - K(\lambda)$ — символ уравнения (1), $F(\lambda)$ и $\Phi^+(\lambda)$ — преобразования Фурье f и φ соответственно (считаем, что $f(t) = \varphi(t) = 0$ при $t < 0$), $\Phi^-(\lambda)$ — преобразование Фурье функции

$$b(t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ -\int_0^{\infty} k(t-s)\,\varphi(s)\,ds, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Умножение в левой части (18) так же как и всюду в дальнейшем понимается в смысле (17).

По условию теоремы в представлении символа (3) $\operatorname{Im}(\alpha_1 - \alpha_2) < 0$, следовательно, для $1 - K(\lambda)$ справедлива формула (6). Подставим это выражение для $1 - K(\lambda)$, а также выражение (10) для $F(\lambda)$ в (18):

$$\frac{g_-(\lambda)}{g_+(\lambda)}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\tau}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}\,\Phi^+(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^m G(\lambda) + F^-(\lambda) + \Phi^-(\lambda).$$

Здесь $G(\lambda) \in R_1 \cap R_p$, $F^- \in R_1^-$, $m = \left[\operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi|\operatorname{Im}\beta| + \frac{1}{p}\right] + 1.$

Перепишем это уравнение в следующей форме:

$$\frac{s_-(\lambda)}{s_+(\lambda)}T^+(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^+\left[\frac{G(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)}\right]-\sum_{k=1}^m\frac{d_k}{(\lambda-i)^k}+\bar{\Phi}^-(\lambda). \tag{19}$$

В этом равенстве

$$s_\pm(\lambda)=g_\pm(\lambda)\left(\frac{\lambda\pm i}{\lambda}\right)^\tau,\quad T^+(\lambda)=\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)},$$

$$\Phi^-(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^-\left[\frac{G(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)}\right]+\sum_{k=1}^m\frac{d_k}{(\lambda-i)^k}+\frac{\Phi^-(\lambda)+F^-(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)},$$

$\sum\limits_{k=1}^m\frac{d_k}{(\lambda-i)^k}$ — главная часть лорановского разложения функции $[\lambda/(\lambda-i)]^m\pi^+[G(\lambda)/\Phi_0^-(\lambda)]$ в окрестности точки i.

Далее, функция $\sum\limits_{k=1}^m d_k(\lambda-i)^{-k}$ аналитична в окрестности нуля, следовательно, ее можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^m\frac{d_k}{(\lambda-i)^k}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^m H(\lambda)+\sum_{k=1}^m\frac{\xi_k}{(\lambda+i)^k}, \tag{20}$$

где $H(\lambda)\in R_1\cap R_p$. Так как $\sum\limits_{k=1}^m d_k(\lambda-i)^{-k}$ — главная часть лорановского разложения $[\lambda/(\lambda-i)]^m\pi^+[G(\lambda)/\Phi_0^-(\lambda)]$ в окрестности точки i, функция

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^+\left[\frac{G(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)}\right]-\sum_{k=1}^m\frac{d_k}{(\lambda-i)^k}$$

аналитична в D^+. Значит и

$$B(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^+\left[\frac{G(\lambda)}{\Phi_0^-(\lambda)}\right]-\sum_{k=1}^m\frac{d_k}{(\lambda-i)^k}-\sum_{k=1}^m\frac{\xi_k}{(\lambda+i)^k}$$

будет аналитична в D_1^+. Вследствие равенства (20) функция $B(\lambda)$ допускает представление

$$B(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^m F_0(\lambda),$$

где $F_0(\lambda)\in R_1^+\cap R_p^+$. Окончательно, уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\frac{s_-(\lambda)}{s_+(\lambda)}T^+(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^m F_0(\lambda)+\sum_{k=1}^m\frac{\xi_k}{(\lambda+i)^k}+\tilde{\Phi}^-(\lambda), \tag{21}$$

где

$$s_\pm(\lambda)=g_\pm(\lambda)\left(\frac{\lambda\pm i}{\lambda}\right)^\tau,\quad F_0(\lambda)\in R_1^+\cap R_p^+. \tag{22}$$

Решение уравнения (1) определяется как прообраз Фурье функции $T^+(\lambda)\,\Phi_0^+(\lambda)$ (где $\Phi_0^+(\lambda)$ определяется из представления символа (6)). Следовательно, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что (21) имеет решение $T^+(\lambda) \in R_p^+$ для любой функции $F_0(\lambda) \in R_1^+ \cap R_p^+$ и произвольных постоянных ξ_k.

Решим сначала уравнение (21) в случае, когда $F_0(\lambda) \equiv 0$. Уравнение примет вид

$$\frac{s_-(\lambda)}{s_+(\lambda)} T^+(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi_k}{(\lambda+i)^k} + \bar{\Phi}^-(\lambda). \qquad (23)$$

Решение (23) будем искать в виде

$$T^+(\lambda) = \frac{s_+(\lambda)}{(\lambda+i)^m} P_{m-1}(\lambda), \qquad (24)$$

где

$$P_{m-1}(\lambda) = x_0 + x_1(\lambda+i) + \cdots + x_{m-1}(\lambda+i)^{m-1},$$

и коэффициенты x_l нам следует определить.

После подстановки (24) в уравнение (23) получим

$$\frac{s_-(\lambda)\ P_{m-1}(\lambda)}{(\lambda+i)^m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi_k}{(\lambda+i)^k} + \bar{\Phi}^-(\lambda) \qquad (25)$$

или

$$\frac{s_-(\lambda)\ P_{m-1}(\lambda)}{(\lambda+i)^m} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\zeta_k}{(\lambda+i)^k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\zeta_k}{(\lambda+i)^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi_k}{(\lambda+i)^k} + \bar{\Phi}^-(\lambda).$$

Здесь $\sum_{k=1}^{m} \zeta_k (\lambda+i)^{-k}$ — главная часть лорановского разложения функции $s_-(\lambda)\ P_{m-1}(\lambda)(\lambda+i)^{-m}$ в окрестности точки $(-i)$. Коэффициенты ζ_k определяются так:

$$\zeta_k = \sum_{j=0}^{m-k} s_-^{(j)}(-i)\, x_{m-k-j} \cdot \frac{1}{j!}, \quad k = \overline{1, m}. \qquad (26)$$

Функция

$$\frac{s_-(\lambda)\, P_{m-1}(\lambda)}{(\lambda+i)^m} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\zeta_k}{(\lambda+i)^k}$$

аналитически продолжается в D^-, следовательно, (25) равносильно следующему уравнению:

$$\sum_{k=1}^{m} \zeta_k (\lambda+i)^{-k} = \sum_{k=1}^{m} \xi_k (\lambda+i)^{-k}.$$

Отсюда, учитывая выражение (26) для определения ζ_k, приходим к следующей системе уравнений для нахождения x_j:

$$\sum_{j=0}^{m-k} s_-^{(j)}(-i)\, x_{m-k-j} \cdot \frac{1}{j!} = \xi_k, \quad k = \overline{1, m}. \qquad (27)$$

Эта система из m линейных уравнений относительно m неизвестных x_j, $j=0,1\ldots, m-1$. Определитель ее отличен от нуля (так как $s_-(-i) \neq 0$), следовательно, система имеет единственное решение $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$.

Итак, функция (24), где $P_{m-1}(\lambda)$ — многочлен относительно $\lambda+i$ с коэффициентами $x_j, j = 0,1, \ldots, m-1$, которые определяются из системы (27), является решением уравнения (23).

Теперь найдем решение уравнения (21) при условии, что $\xi_i=0$, $i=0,1,\cdots,m-1$:

$$\frac{s_-(t)}{s_+(t)}T^+(t)=\left(\frac{t}{t+i}\right)^m F(t)+\Phi^-(t), \tag{28}$$

$F\in R_1^+\cap R_p^+$, $m=\left[\operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi \operatorname{Im}\beta| + \frac{1}{p}\right]+1$, $s_\pm$ определяются из (22). Следует сначала отметить, что так как $s_+^2(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\varepsilon_0}\frac{\lambda^2}{(\lambda+i)^4}$ — внешняя функция, то по теореме Лакса (см. [10]) множество прообразов Фурье функций $s_+^2(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\varepsilon_0}\frac{\lambda^2}{(\lambda+i)^4}G(\lambda)$, где $G\in R_1^+\cap R_p^+$, $\varepsilon_0>0$, плотно в $L^2(0,\infty)$. Кроме того, прообраз Фурье $s_+^2(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda^2}{(\lambda+i)^4}$ непрерывно дифференцируем на $(-\infty,\infty)$. Исходя из этого, получим, что замкнутое подпространство в $L^1(0,\infty)$, содержащее все функции вида $s_+^2(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\varepsilon_0}\frac{\lambda^2}{(\lambda+i)^4}G(\lambda)$ $(G\in R_1^+\cap R_p^+)$, состоит из функций, преобразования Фурье которых равны нулю в точке 0.

Следовательно, можно выбрать последовательность функций $F_k(t)\in R_1^+\cap R_p^+$, обладающую свойствами:

$$F_k(t)=s_+^2(t)\,t^2(t+i)^{-4}G_k(t),\ G_k\in R_1^+\cap R_p^+, \tag{29.1}$$

$$\|\tilde f_k(t)-\tilde f_0(t)\|_1\to 0,\ k\to\infty, \tag{29.2}$$

$\tilde f_0$, $\tilde f_k$ — прообразы Фурье функций $\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\varepsilon_0}F(\lambda)$, $\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\varepsilon_0}F_k(\lambda)$, соответственно. Здесь ε_0 — фиксированное число, удовлетворяющее условию

$$0<\varepsilon_0<\frac{1}{12}\operatorname{Re}\alpha_+. \tag{30}$$

Решим сначала уравнение (28) с правой частью, содержащей $F_k(t)$

$$\frac{s_-(t)}{s_+(t)}T^+(t)=\left(\frac{t}{t+i}\right)^m F_k(t)+\Phi^-(t). \tag{31}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$T_k^+(t)=s_+(t)\,\pi^+\left[\left(\frac{t}{t+i}\right)^m\frac{F_k(t)}{s_-(t)}\right],$$

принадлежащая $R_1^+\cap R_p^+(t)$(так как $F_k(t)$ имеют вид (29.1)), является одним из решений (30).

Докажем теперь, что прообразы Фурье функций

$$B_k^+(t)=T_k^+(t)+\Phi_{0k}^+(t),$$

где $\Phi_{0k}^+(t)$ —решения однородного уравнения (28) $(F(t)\equiv 0)$, точный вид которых будет определен в дальнейшем, ограничены в

$L^p(0, \infty)$. Тогда, в силу слабой компактности ограниченных множеств в L^p, можно будет заключить, что существует функция $t(x) \in L^p(0,\infty)$ такая, что для некоторой подпоследовательности $t_{n_k}(x)$ прообразов-Фурье функций $B_{n_k}(\lambda)$ справедливо следующее:

$$\int_0^\infty t_{n_k}(x)\overline{\psi(x)}\,dx \underset{k\to\infty}{\to} \int_0^\infty t(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx$$

для каждой функции $\psi(x) \in L^q$. В частности, это соотношение справедливо для таких ψ, преобразование Фурье которых имеет вид $\overline{s_-(t)\,\varphi^-(t)\,/\,s_+(t)}$, где $\varphi^-(t) \in S \cap R_q^-$. Переходя к преобразованиям Фурье, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{n_k}(\lambda)\frac{s_-(\lambda)}{s_+(\lambda)}\varphi^-(\lambda)\,d\lambda \to \int_{-\infty}^{\infty} T^+(\lambda)\frac{s_-(\lambda)}{s_+(\lambda)}\varphi^-(\lambda)\,d\lambda$$

($T^+(\lambda)$ — образ Фурье функции $t(x)$). Но, с другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{n_k}(\lambda)\frac{s_-(\lambda)}{s_+(\lambda)}\varphi^-(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} F_{n_k}(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^m\varphi^-(\lambda)\,d\lambda$$

($B_{n_k}(\lambda)$ — решение уравнения (28)) и

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{n_k}(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^m\varphi^-(\lambda)d\lambda \to \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^m\varphi^-(\lambda)\,d\lambda,$$

так как $\|\tilde f_{n_k} - \tilde f_0\|_1 \to 0$, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^+(\lambda)\frac{s_-(\lambda)}{s_+(\lambda)}\varphi^-(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^m F(\lambda)\,\varphi^-(\lambda)\,d\lambda$$

для $\varphi^-(\lambda) \in S \cap R_q^-$. Из этого равенства следует, что $T^+(\lambda) \in R_p^+$ является решением уравнения (28).

Перейдем к построению последовательности $B_n(\lambda)$. Функцию $T_k^+(\lambda)$ можно продолжить в D^+. Тогда $T_k^+(\lambda)$ будет граничным значением функции

$$T_k^+(z) = \frac{s_+(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{t}{t+i}\right)^m \frac{F_k(t)\,dt}{s_-(t)\,(t-z)}, \tag{32}$$

где $\operatorname{Im} z > 0$. Далее, $F_k(t)$ имеет вид (29. 1), следовательно, существуют положительные числа ε_k, δ_k такие, что если $\omega_k(x) \in S$ определена так:

$$\omega_k(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \varepsilon_k \\ 1, & |t| < \varepsilon_k - \delta_k \end{cases};\quad 0 \leqslant \omega_k(t) \leqslant 1 \qquad \text{при } t \in R^1$$

($\varepsilon_k - \delta_k > 0$), то

$$\left\| F^{-1}\left[\omega_k(t)\left(\frac{t}{t+i}\right)^m \frac{F_k(t)}{s_-(t)}\right]\right\|_p \leqslant C, \tag{33}$$

$F^{-1}[\varphi](t)$ — прообраз Фурье функции $\varphi(\lambda)$, C — постоянная, которая не зависит от k. Введем также следующую функцию $\omega_0(t) \in S$:

$$\omega_0(t) = \begin{cases} 1, & |t| > 1/2 \\ 0, & |t| < 1/2 - \varepsilon \end{cases}; \quad 0 \leqslant \omega_0(t) \leqslant 1, \quad t \in R^1$$

$\left(\varepsilon < \frac{1}{2}\right)$. Тогда $T_k^+(z)$ может быть представлена в виде суммы

$$T_k^+(z) = \frac{s_+(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0(t)}{s_+(t)}\left(\frac{t}{t+i}\right)^m \frac{F_k(t)\,dt}{t-z} + \frac{s_+(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{t}{t+i}\right)^m \times$$

$$\times \frac{\omega_k(t)F_k(t)\,dt}{s_-(t)(t-z)} + \frac{s_+(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\omega_0(t)-\omega_k(t))}{s_-(t)(t-z)}\left(\frac{t}{t+i}\right)^m F_k(t)\,dt.$$

Легко видеть, что

$$\left\| F^{-1}\left[\frac{\omega_0(t)}{s_-(t)}\left(\frac{t}{t+i}\right)^m F_k(t)\right]\right\|_p \leqslant C_1 \tag{34}$$

(C_1 не зависит от k), следовательно, осталось изучить

$$T_{k1}^+(z) = \frac{s_+(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\omega_0(t)-\omega_k(t))}{s_-(t)(t-z)}\left(\frac{t}{t+i}\right)^m F_k(t)\,dt =$$

$$= \frac{s_+(z)}{2\pi i}\int_{1/2>|t|>\varepsilon_k} \frac{(1-\omega_0(t)-\omega_k(t))}{s_-(t)(t-z)}\left(\frac{t}{t+i}\right)^m F_k(t)\,dt.$$

Для исследования этой функции введем следующее разбиение единицы на интервале $(0,1)$.

Пусть $\varphi \in S$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ для всех x, $\varphi(x) = 1$ при $x \in [\eta^{-1}, 1]$, $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset [\eta^{-1} - \eta^{-\sigma}, 1 + \eta^{-\sigma}]$, где

$$\eta > 1, \quad \frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{4|\operatorname{Re}\beta|} > \log \eta \tag{35}$$

($\operatorname{Re}\alpha_+$, $\operatorname{Re}\beta$ определяются из представления символа (6)), σ выбирается так, чтобы

$$1 > \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^{\sigma-1}} + \frac{1}{\eta^{\sigma+1}}, \quad \frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{4|\operatorname{Re}\beta|} > \log\frac{\eta^\sigma}{\eta^{\sigma-1}-1}. \tag{36}$$

Рассмотрим функции $\varphi(\eta^k x)$. Имеем

$$\varphi(\eta^k x) = 1 \text{ при } x \in [\eta^{-k-1}, \eta^{-k}],$$

$$\operatorname{supp}\varphi(\eta^k x) \subset [\eta^{-k-1} - \eta^{-k-\sigma}, \eta^{-k} + \eta^{-k-\sigma}].$$

Каждая точка интервала $(0, 1)$ содержится в $\operatorname{supp}\varphi(\eta^k x)$ для некоторого k, причем вследствие условия (36) $\operatorname{supp}\varphi(\eta^l x) \cap \operatorname{supp}\varphi(\eta^{l'} x)$

не пусто тогда и только тогда, когда $|i-j|\leqslant 1$. Введем теперь такие функции

$$\varphi_k(x)=\varphi(\eta^k x)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(\eta^k x)\right)^{-1}.$$

Они принадлежат S и обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&1.\ \varphi_k(x)=1,\ x\in[\eta^{-k-1}+\eta^{-k-\sigma-1},\ \eta^{-k}-\eta^{-k-\sigma+1}],\\
&2.\ \operatorname{supp}\varphi_k(x)\subset[\eta^{-k-1}-\eta^{-k-\sigma},\ \eta^{-k}+\eta^{-k-\sigma}],\\
&3.\ 0\leqslant\varphi_k(x)\leqslant 1,\ x\in(0,1),\\
&4.\ \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)=1,\ x\in(0,1),\\
&5.\ \|F^{-1}[\varphi_k](\lambda)\|_1=c_0,\ k=0,1,2,\cdots.
\end{aligned}\tag{37}$$

Первые четыре свойства сразу следуют из построения последователь ности $\varphi_k(x)$. Докажем свойство 5. Имеем

$$F^{-1}[\varphi_k](\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(x)e^{-i\lambda x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\eta^{-k-1}-\eta^{-k-\sigma}}^{\eta^{-k}+\eta^{-k-\sigma}}\frac{\varphi(\eta^k x)e^{-i\lambda x}\,dx}{\varphi(\eta^{k-1}x)+\varphi(\eta^k x)+\varphi(\eta^{k+1}x)}.$$

Это равенство можно записать, так как если $x\in[\eta^{-k-1}-\eta^{-k-\sigma},\ \eta^{-k}+\mu^{-k-\sigma}]$, то в бесконечной сумме $\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(\eta^k x)$ только $\varphi(\eta^{k-1}x)$, $\varphi(\eta^k x)$, $\varphi(\eta^{k+1}x)$ могут быть отличны от нуля). Далее

$$F^{-1}[\varphi_k](\lambda)=\frac{1}{2\pi\eta^k}\int_{\eta^{-1}-\eta^{-\sigma}}^{1+\eta^{-\sigma}}\frac{\varphi(\xi)\exp(-i\lambda\eta^{-k}\xi)\,d\xi}{\varphi(\xi\eta^{-1})+\varphi(\xi)+\varphi(\eta\xi)}=$$

$$=\eta^{-k}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(\xi)\,e^{-i\frac{\lambda}{\eta^k}\xi}\,d\xi,$$

где $\psi_0(\xi)=\varphi(\xi)(\varphi(\xi\eta^{-1})+\varphi(\xi)+\varphi(\xi\eta))^{-1}\in S$. Таким образом, норма в L^1 прообраза Фурье функции φ_k оценивается так:

$$\|F^{-1}[\varphi_k](\lambda)\|_1=\left\|\frac{1}{\eta^k}F^{-1}[\psi_0]\left(\frac{\lambda}{\eta^k}\right)\right\|_1=\|F^{-1}[\psi_0](\lambda)\|_1=c_0,$$

где c_0 — постоянная, не зависящая от k. Свойство 5 доказано.

Теперь, используя полученное разбиение единицы, $T_{k1}^{+}(z)$ можно записать так:

$$T^+_{kl}(z)=\frac{s^+(z)}{2\pi i}\sum_{l=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}>|x|>\varepsilon_k}\frac{(\varphi_l(x)+\varphi_l(-x))(1-\omega_0(x)-\omega_k(x))}{s_-(x)(x-z)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{x}{x+i}\right)^m F_k(x)\,dx \tag{38}$$

(так как промежуток интегрирования отделен от нуля, в сумме (38) только конечное число слагаемых отлично от нуля). Исследуем слагаемые в этой сумме отдельно.

Расмотрим сначала слагаемые вида

$$T^+_{kl}(z)=\frac{s_+(z)}{2\pi i}\int\limits_{\eta^{-l-1}-\eta^{-\sigma-l}}^{\eta^{-l}+\eta^{-l-\sigma}}\frac{\psi_{kl}(x)F_k(x)}{s_-(x)(x-z)}\left(\frac{x}{x+i}\right)^m dx, \tag{39}$$

$$\psi_{kl}(x)=\varphi_l(x)(1-\omega_0(x)-\omega_k(x)).$$

Прообразы Фурье $T^+_{kl}(z)$ могут быть неограниченными в $L^p(0,\infty)$ при $k\to\infty$. Поэтому следует ввести некоторые функции $\Phi^+_{okl}(z)$ — решения однородного уравнения (28), которые в сумме с $T^+_{kl}(z)$ будут ограничены в $L^p(0,\infty)$ для всех k:

$$\Phi^+_{okl}(z)=\sum_{j=0}^{N_l-1}\frac{s_+(z)}{z^{j+1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\eta^{-l-1}-\eta^{-l-\sigma}}^{\eta^{-l}+\eta^{-l-\sigma}}\frac{\psi_{kl}(x)}{s_-(x)}\left(\frac{x}{x+i}\right)^m F_k(x)\,x^j\,dx. \tag{40}$$

Эти функции — решения однородного уравнения (28), так как являются конечными линейными комбинациями функций вида $s_+(z)\,z^{-j-1}$. Число N_e, участвующее в этом выражении, определим позднее. Сумму (40) можно переписать в виде

$$\Phi^+_{okl}(z)=\frac{s_+(z)}{2\pi i\,z^{N_l}}\int\limits_{\eta^{-l-1}-\eta^{-l-\sigma}}^{\eta^{-l}+\eta^{-l-\sigma}}\frac{\psi_{kl}(x)F_k(x)}{s_-(x)}\left(\frac{x}{x+i}\right)^m\frac{x^{N_l}-z^{N_l}}{x-z}\,dx.$$

После прибавления этой функции к $T^+_{kl}(z)$ получим следующее:

$$B^+_{kl}(z)=T^+_{kl}(z)+\Phi^+_{okl}(z)=\frac{s_+(z)}{2\pi i\,z^{N_l}}\int\limits_{\eta^{-l-1}-\eta^{-l-\sigma}}^{\eta^{-l}+\eta^{-l-\sigma}}\frac{\psi_{kl}(x)}{s_-(x)}\times$$

$$\times\frac{x^{N_l}F_k(x)}{x-z}\left(\frac{x}{x+i}\right)^m dx. \tag{41}$$

Оценим теперь $x^{N_l}/s_-(x)$. Имеем

$$|\lambda^{N_l}/s_-(\lambda)|=\left|\exp\left[-\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2+\gamma\log\frac{\lambda}{\lambda-i}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha_-\log\frac{\lambda}{\lambda-i}+N_l\log\lambda\right]\right|\leqslant C\exp\left[-\operatorname{Re}\beta\log^2|\lambda|+\right.$$

$$+\left(2\operatorname{Im}\beta\left(\frac{\pi}{2}+\arg\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)+\gamma-\alpha_-+N_l\right)\log|\lambda|\Big]\leqslant C\exp\Big[|\operatorname{Re}\beta|\log^2 r+$$

$$+\left(N_l-2\pi|\operatorname{Im}\beta|+\gamma-\operatorname{Re}\alpha_-\right)\log r\Big]=Ch(r)$$

($|\lambda|=r$, мы предположим также, что $\operatorname{Im}\beta<0$, см. замечание § 2). Подберем N_l так, чтобы наименьшее свое значение функция

$$h(r)=\exp\left[|\operatorname{Re}\beta|\log^2 r+(N_l-2\pi|\operatorname{Im}\beta|+\gamma-\operatorname{Re}\alpha_-)\log r\right]$$

принимала в интервале $[\eta^{-l-1}-\eta^{-l-\sigma},\ \eta^{-l}+\eta^{-l-\sigma}]$ или достаточно близко к нему.

Наименьшее значение $h(r)$ принимает в точке r_0, удовлетворяющей условию

$$2|\operatorname{Re}\beta|\log r_0+N_l-2\pi|\operatorname{Im}\beta|+\gamma-\operatorname{Re}\alpha_-=0$$

или

$$r_0=\exp\left[-\frac{N_l-2\pi|\operatorname{Im}\beta|+\gamma-\operatorname{Re}\alpha_-}{2|\operatorname{Re}\beta|}\right].$$

Учитывая, что $r_0\in[\eta^{-l-1}-\eta^{-l-\sigma},\ \eta^{-l}+\eta^{-l-\sigma}]$, можно определить N_l:

$$\log\frac{1}{\eta^l}+\log\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\eta^\sigma}\right)\leqslant-\frac{N_l-2\pi|\operatorname{Im}\beta|+\gamma-\operatorname{Re}\alpha_-}{2|\operatorname{Re}\beta|}\leqslant$$

$$\leqslant\log\frac{1}{\eta^l}+\log\left(1+\frac{1}{\eta^\sigma}\right)$$

или

$$2|\operatorname{Re}\beta|\,l\log\eta-2|\operatorname{Re}\beta|\log(\eta^{-1}-\eta^{-\sigma})\geqslant N_l-2\pi|\operatorname{Im}\beta|+\gamma-$$

$$-\operatorname{Re}\alpha_-\geqslant2|\operatorname{Re}\beta|\,l\log\eta+2|\operatorname{Re}\beta|\log(1+\eta^{-\sigma}).$$

Окончательно

$$N_l=[2|\operatorname{Re}\beta|\,l\log\eta+2\pi|\operatorname{Im}\beta|-\gamma+\operatorname{Re}\alpha_-]+1. \qquad (42)$$

Докажем теперь, что сумма прообразов Фурье функции $B_{kl}^{+}(z)$, определяемых по формуле (41), где N_l определяется из (42), ограничена в $L^p(0,\infty)$ при всех k.

Оценим $h(r)$, когда $r\in[\eta^{-l-1}-\eta^{-l-\sigma},\ \eta^{-l}+\eta^{-l-\sigma}]$. Имеем

$$h(r)=h\left(\frac{1}{\eta^l}\cdot\eta^l r\right)=\exp\left[|\operatorname{Re}\beta|\log^2\left(\frac{1}{\eta^l}\cdot\eta^l r\right)+\right.$$

$$\left.+(N_l-2\pi|\operatorname{Im}\beta|+\gamma-\operatorname{Re}\alpha_-)\log\left(\frac{1}{\eta^l}\cdot\eta^l r\right)\right].$$

Теперь, используя тот факт, что

$$\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\eta^\sigma}\leqslant\eta^l r\leqslant1+\frac{1}{\eta^\sigma}$$

и подставляя N_l из (42), получим

$$h(r)\leqslant C\exp\left[|\operatorname{Re}\beta|(\log(\eta^l r)-l\log\eta)^2-l\log\eta\cdot2|\operatorname{Re}\beta|\times\right.$$

$$\left.\times\,l\log\eta\right]\leqslant C\exp\left[-|\operatorname{Re}\beta|\,l^2\log^2\eta+2|\operatorname{Re}\beta|\,l\log\eta\cdot\log\frac{\eta^\sigma}{\eta^{\sigma-1}-1}\right].$$

Далее, используя оценку (36), получим:

$$h(r) \leqslant C \exp\left[-|\operatorname{Re}\beta|\, l^2 \log^2 \eta + \frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{2}\, l \log \eta\right].$$

Обозначим C_{N_l} следующую величину:

$$C_{N_l} = \exp\left[-|\operatorname{Re}\beta|\, l^2 \log^2 \eta - \left(\left[\operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi |\operatorname{Im}\beta| + \frac{1}{p}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{2}\right) l \log \eta\right]. \tag{43}$$

Тогда, учитывая оценку для $h(r)$, можно записать следующее:

$$\max_{x \in [\eta^{-l-1} - \eta^{-l-\sigma},\ \eta^{-l} + \eta^{-l-\sigma}]} |x^{N_l + m - \varepsilon_0} / s_-(x)| \leqslant \frac{Ch(r)}{\eta^{l(m-\varepsilon_0)}} \leqslant C \cdot C_{N_l} \eta^{\varepsilon_0 l} \tag{44}$$

(ε_0 определяется из 30)), где C — постоянная, не зависящая от x, l, k.

Рассмотрим разность

$$\operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi |\operatorname{Im}\beta| - \left[\operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi |\operatorname{Im}\beta| + \frac{1}{p}\right] = \delta_0. \tag{45}$$

Легко видеть, что если

$$\{\operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi |\operatorname{Im}\beta|\} \geqslant \frac{1}{q}$$

($\{\cdot\}$ — дробная часть числа; $p^{-1} + q^{-1} = 1$), то $\delta_0 \leqslant 0$. В противном случае

$$0 < \delta_0 = \{\operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi |\operatorname{Im}\beta|\} < \frac{1}{q}.$$

Оценим функцию $s_+(z)\, z^{-N_l + \delta_0}$ при произвольных значениях $z \in \overline{D^+}$. Имеем

$$\left|\frac{s_+(z)}{z^{N_l - \delta_0}}\right| = \left|\exp\left[\beta\left(\log\frac{z}{z+i} + i\frac{\pi}{2}\right)^2 - \gamma \log\frac{z}{z+i} + \alpha_+ \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \log\frac{z}{z+i} - (N_l - \delta_0)\log z\right]\right| \leqslant C \exp\left[\operatorname{Re}\beta \log^2|z| + \left(2\pi \operatorname{Im}\beta\left(\frac{\pi}{2} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \arg\frac{z}{z+i}\right) - N_l + \delta_0 - \gamma + \operatorname{Re}\alpha_+\right) \log|z|\Big] \leqslant C \exp\Big[-|\operatorname{Re}\beta| \times$$

$$\times \log^2|z| - (N_l - \delta_0 + \gamma - \operatorname{Re}\alpha_+)\log|z|\Big] = CA(|z|).$$

Найдем максимальное значение функции $A(r)$:

$$A(r) = \exp[-|\operatorname{Re}\beta| \log^2 r - (N_l - \delta_0 + \gamma - \operatorname{Re}\alpha_+)\log r].$$

Точка максимума r_0 этой функции определяется из уравнения

$$-2|\operatorname{Re}\beta| \log r_0 = N_l - \delta_0 + \gamma - \operatorname{Re}\alpha_+.$$

Следовательно, для любого $r \in (0, \infty)$

$$A(r) \leqslant A(r_0) = \exp\left[-|\operatorname{Re}\beta| \frac{(N_l - \delta_0 + \gamma - \operatorname{Re}\alpha_+)^2}{4|\operatorname{Re}\beta|^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(N_l - \delta_0 + \gamma - \operatorname{Re}\alpha_+)^2}{2|\operatorname{Re}\beta|}\right] = \exp\left[\frac{(N_l - \delta_0 + \gamma - \operatorname{Re}\alpha_+)^2}{4|\operatorname{Re}\beta|}\right].$$

Учитывая, что N_l и δ_0 определяются по формулам (42) и (45), соответственно, получим

$$A(r) \leqslant \exp\left[\frac{(2|\operatorname{Re}\beta|\, l\log\eta + \operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi|\operatorname{Im}\beta| - \delta_0 + \operatorname{Re}\alpha_+ + 1)^2}{4|\operatorname{Re}\beta|}\right] \leqslant$$

$$\leqslant C\exp\Big[|\operatorname{Re}\beta|\, l^2\log^2\eta + (\operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi|\operatorname{Im}\beta| - \delta_0 - \operatorname{Re}\alpha_+)\, l \times$$

$$\times \log\eta\Big] = C\exp\left[|\operatorname{Re}\beta|\, l^2\log^2\eta + \left(\left[\operatorname{Re}\alpha_- + 2\pi|\operatorname{Im}\beta| + \frac{1}{p}\right] + 1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{Re}\alpha_+\right) l\log\eta\right] = \frac{C_1}{C_{N_l}} e^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{2} l\log\eta} = \frac{C_1}{C_{N_l}}\eta^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{2} l}.$$

Окончательно

$$\max_{z\in D^+}\left|\frac{s_+(z)}{z^{N_l-\delta_0}}\right| \leqslant \frac{C_1}{C_{N_l}}\eta^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{2} l}.$$

Здесь C_1— постоянная, не зависящая от l, k. С помощью аналогичных рассуждений можно получить оценку

$$\max_{z\in\overline{D^+}}\left|\frac{s_+(z)}{z^{N_l-\varepsilon}}\right| \leqslant \frac{C_1}{C_{N_l}}\eta^{-\left(\frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{2}+\varepsilon-\delta_0\right) l} \tag{46}$$

для каждого $\varepsilon < N_l$.

Теперь можно перейти непосредственно к оценке L^p-нормы прообраза Фурье функции $B^+_{kl}(z)$. Запишем B^+_{kl} в следующей форме:

$$B^+_{kl}(z) = \frac{1}{z^\varepsilon(z+i)}\cdot\frac{s_+(z)(z+i)}{z^{N_l-\varepsilon}}\cdot C_{N_l}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\eta^{-l-1}-\eta^{-l-\sigma}}^{\eta^{-l}+\eta^{-l-\sigma}} \frac{\psi_{kl}(x)F_k(x)x^{\varepsilon_0}}{(x+i)^m}\cdot\frac{x^{N_l+m-\varepsilon_0}}{s_-(x)(x-z)}\cdot\frac{dx}{C_{N_l}},$$

ε — положительная величина, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{1}{q} > \varepsilon > \frac{1}{q} - \frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{6}. \tag{47}$$

Можно также предполагать, что l настолько велико, что $N_l \geqslant 3$.

Из неравенства (47) сразу вытекает, что

$$\left\|F^{-1}\left(\frac{1}{z^\varepsilon(z+i)}\right)\right\| \leqslant C_0 \tag{48}$$

Следующие неравенства вытекают из оценок (46) и (44):

$$\left\| F^{-1}\left(\frac{s_+(z)(z+i)}{z^{N_l-\varepsilon}}\cdot C_{N_l}\right)\right\|_1 < C_0\,\eta^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha_+ l}{3}}, \tag{49}$$

$$\left\| F^{-1}\left(\frac{\psi_{kl}(x)\,x^{N_l+m}}{C_{N_l}\cdot s_-(x)}\right)\right\|_1 \leqslant C_0\,\eta^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{6}l}. \tag{50}$$

Докажем, например, (49). Пусть

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s_+(z)(z+i)}{z^{N_l-\varepsilon}}\,C_{N_l}\cdot e^{-i\lambda z}dz.$$

Правую часть два раза проинтегрируем по частям

$$f(\lambda)=\frac{-1}{2\pi\lambda^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{s_+(z)(z+i)}{z^{N_l-\varepsilon}}\right)''e^{-i\lambda z}C_{N_l}\,dz=$$

$$=-\frac{C_{N_l}}{2\pi\lambda^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{s_+(z)(z+i)}{z^{N_l-\varepsilon}}\right)''(e^{-i\lambda z}-1)\,dz$$

(последнее равенство справедливо, так как $s_+(z)(z+i)\,z^{-N_l+\varepsilon}$ аналитична в D^+). Далее

$$|f(\lambda)|\leqslant\frac{C_{N_l}}{2\pi\lambda^2}\max_{z\in\overline{D}^+}\left|\frac{s_+(z)(z+i)}{z^{N_l-\varepsilon+\varepsilon_1}}\right|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{-i\lambda z}-1}{z^{2-\varepsilon_2}}\right|dz,$$

где $\varepsilon_1>\varepsilon_2>0$ и $\varepsilon-\varepsilon_1-\delta_0>-\frac{1}{6}\operatorname{Re}\alpha_+$. Такие числа ε_1 и ε_2 можно подобрать, так как $\delta_0<q^{-1}$, а $\varepsilon>q^{-1}-\frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{6}$. Последнее неравенство и соотношение (46) и доказывают оценку (49). Неравенство (50) получается аналогично, если учесть, что $\|\psi_{kl}\|_1\leqslant C$ для всех k и l. Таким образом, для прообраза Фурье $B_{kl}^+(z)$ справедлива оценка

$$\|F^{-1}(B_{kl}^+(z))\|_p\leqslant C_0^3\cdot C_1\|\tilde f_k\|_1\,\eta^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{6}l}\leqslant C\|\tilde f_0\|_1\,\eta^{-\frac{\operatorname{Re}\alpha_+}{6}l} \tag{51}$$

(последнее неравенство справедливо, так как $\|\tilde f_k-\tilde f_0\|_1\to 0$).

Из этого неравенства следует соотношение

$$\left\|F^{-1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}B_{kl}^+(z)\right)\right\|_p<C\|\tilde f_0\|_1, \tag{52}$$

где C не зависит от k. Бесконечную сумму в (52) можно представить в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} B^-_{kl}(z) = \frac{s_+(z)}{2\pi i}\int_{\varepsilon_k}^{1/2} \frac{(1-\omega_0(x)-\omega_k(x))F_k(x)}{s_-(x)(x-z)}\left(\frac{x}{x+i}\right)^m dx +$$

$$+\sum_l \sum_{j=0}^{N_l-1} \frac{s_+(z)}{2\pi i z^{j+1}} \int_{\tau_l^{-l-1}-\tau_l^{-\sigma-l}}^{\tau_l^{-l}+\tau_l^{-l-\sigma}} \frac{\psi_{kl}(x)}{s_-(x)}\left(\frac{x}{x+i}\right)^m F_k(x)\,x^j dx.$$

Двойная сумма в правой части этого равенства конечна, так как только для конечного числа l функции $\psi_{kl}(x)$ отличны от тождественно го нуля.

Итак

$$\left\| F^{-1}\left(\frac{s_+(z)}{2\pi i}\int_{\varepsilon_k}^{1/2}\frac{(1-\omega_0(x)-\omega_k(x))F_k(x)}{s_-(x)(x-z)}\left(\frac{x}{x+i}\right)^m dx + \Phi^+_{10}(z)\right)\right\|_p \leqslant C_1 \|\tilde{f}\|_{L_1}.$$

Здесь Φ^+_{10} — построенное решение однородного уравнения (28).

С помощью аналогичных рассуждений строится другое решение однородного уравнения $\Phi^+_{20}(z)$, такое, что

$$\left\| F^{-1}\left(\frac{s_+(z)}{2\pi i}\int_{-1/2}^{-\varepsilon_k}\frac{(1-\omega_0(x)-\omega_k(x))F_k(x)}{s_-(x)(x-z)}\left(\frac{x}{x+i}\right)^m dx + \Phi^+_{20}(z)\right)\right\|_p \leqslant C_1 \|\tilde{f}\|_{L_1}.$$

Обозначая через $\Phi^+_{0k}(z)$ сумму $\Phi^+_{10}(z) + \Phi^+_{20}(z)$ и учитывая неравенства (33) и (34), получаем оценку

$$\|F^{-1}(T^+_k(t) + \Phi^+_{0k}(t))\|_p \leqslant C,$$

где C не зависит от k, что и доказывает теорему.

Замечание. Мы рассмотрели случай, когда $\operatorname{Im}\beta < 0$. В случае, когда $\operatorname{Im}\beta > 0$, при факторизации символа вместо функций $g_-(\lambda)$, $g_+(\lambda)$ следует использовать следующие функции:

$$\tilde{g}_\pm(\lambda) = \exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda \pm i} - i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda\pm i}\right)^{n_\pm} e^{\beta\frac{\pi^2}{4}}.$$

Все остальные рассуждения аналогичны.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 18.IX.1984

Ա. Հ. ԲԱՐԱՅԱՆ: Վիներ-Հոփֆի այլափոխվող սիմվոլով ոչ համասեռ ինտեգրալ հավասարում (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է ոչ համասեռ հավասարում

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

որտեղ $k \in L^1(-\infty, \infty)$, $f \in L^p(0, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$. φ լուծումը փնտրվում է $\in L^p(0, \infty)$ դասում, որին պատկանում է $f(t)$-ն: (1) հավասարման սիմվոլը, $1 - K(\lambda)$-ն, դառնում է զրո միայն $\lambda = 0$ կետում և զրոյի շրջակայքում գնահատվում է

$$1-K(\lambda)\sim\begin{cases}a|\lambda|^{\alpha_1}, & 0<\lambda<\varepsilon,\\ b|\lambda|^{\alpha_2}, & -\varepsilon<\lambda<0,\end{cases}$$

որտեղ $\mathrm{Re}\,\alpha_1>0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_2>0$, $\mathrm{Im}\,(\alpha_1-\alpha_2)<0$: *(1) հավասարման աջ մասի Ֆուրյեի ձևափոխությունը, $F(\lambda)$-ն ենթադրում է հետևյալը*

$$F(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m G(\lambda)+F^-(\lambda), \tag{2}$$

որտեղ $G(\lambda)$, $F^-(\lambda)$ $g\in L^1(-\infty,\infty)\cap L^p(-\infty,\infty)$ և $f^-(t)\in L^1(-\infty,0)$ ֆունկցիաների Ֆուրյեի ձևափոխություններն են, m-ամբողջ թիվ է, որը որոշվում է α_1, α_2-ի միջոցով:

Ապացուցված է հետևյալ նախադասությունը՝ եթե (1) հավասարման աջ մասի Ֆուրյեի ձևափոխությունը թույլ է տալիս տեսք (2), ապա ունի լուծում $L^p(0,\infty)$ *դասում:*

A. O. BABAYAN. *Nonhomogenious Wiener—Hopf equation with degenerate symbol* (summary)

We consider the nonhomogenious equation

$$\varphi(t)-\int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t),\quad t\geqslant 0. \tag{1}$$

Here $k\in L^1(-\infty,\infty)$, $f\in L^p(0,\infty)$ $1<p<\infty$ solution φ must be found in the same L^p. It is assumed that the equation's symbol, $1-K(\lambda)$ vanishes only at zero and in the neighbourhood of zero we have

$$1-K(\lambda)\sim\begin{cases}a|\lambda|^{\alpha_1}, & 0<\lambda<\varepsilon\\ b|\lambda|^{\alpha_2}, & -\varepsilon<\lambda<0,\end{cases}$$

where $\mathrm{Re}\,\alpha_1>0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_2>0$, $\mathrm{Im}\,(\alpha_1-\alpha_2)<0$. We prove that if the Fourier transform $F(\lambda)$ of in (1) admits the representation:

$$F(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m G(\lambda)+F^-(\lambda), \tag{2}$$

where $G(\lambda)$, $F^-(\lambda)$ are the Fourier transforms of the functions $g(t)\in L^1(-\infty,\infty)\cap L^p(-\infty,\infty)$, $f^-(t)\in L^1(-\infty,0)$, corresponding m is an integer dependin g on α_1, α_2 then the equation (1) has a solution, which belongs $L^p(0,\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн*. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 13, вып. 5, 1958, 3—120.
2. *Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский*. Особые интегральные уравнения типа свертки, Изв. АН СССР, сер. матем., 20, № 1. 1956, 3—52.
3. *В. Б. Дыбин*. Интегральный оператор Винера—Хопфа в классе функций со степенным характером поведения на бесконечности, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 4, 1967, 250—270.
4. *Н. Е. Товмасян*. Особый случай интегрального уравнения Винера—Хопфа, Сибирский матем. журнал, XIX, № 4, 1978, 902—922.
5. *Н. К. Карапетянц*. Интегральные уравнения Винера—Хопфа с символом, имеющим нуль дробного порядка, Дифф. уравнения, т. XIII, № 8, 1977, 1471—1479.
6. *З. Прёсдорф*. Некоторые классы сингулярных уравнений, М., 1972.
7. *М. И. Хайкин*. Однородное уравнение Винера—Хопфа в классе функций умеренного роста, Изв. вузов, матем., 8, 1978, 91—103.

8. *А. О. Бабаян.* Особый случай уравнения Винера—Хопфа, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVII, № 5, 1982, 387—404.
9. *А. О. Бабаян.* Особый случай однородного уравнения Винера—Хопфа. ДАН Арм.ССР, XXVI, № 4, 1983, 155—159.
10. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
11. *М. И. Мельник.* Исключительный случай краевой задачи Римана, Тр. Тбил. матем. института АН Груз.ССР, 24, 1957, 149—162.
12. *В. Б. Дыбин.* Сингулярное интегральное уравнение с коэффициентами, допускающими факторизацию, Сб. «Дифф. и интегральные уравнения и их приложения», Элиста, 1983, 33—44.