ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 4, 1986 Математика

УДК 517.982

Г. О. АКОПЯН

ОБ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Регулярность решений гипоэллиптического уравнения с постоянными коэффициентами $P(D)\,u = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha D^\alpha u = 0$ определяется ростом функции $d(\xi)$ — расстояния от точки $\xi \in R_n$ до поверхности $\{\zeta;\ \zeta \in C_n,\ P(\zeta) = 0\}$ (см. [1], теорема 4.4.1).

Г. Г. Казаряном в работе [4] введено понятие веса гипоэллиптичности $h(\xi) = h(P, \xi)$ для одного класса регулярных (невырожденных) операторов, изученных С. М. Никольским [2] и В. П. Михайловым [3], обобщающее понятие показателя гипоэллиптичности, при помощи которого получены наилучшие оценки для производных решений уравнения $P(D)u=0$ в терминах классов Жевре.

Цель настоящей работы — получение наилучших оценок в терминах классов Жевре для производных решений нерегулярных (вырожденных) уравнений, изученных в работах Б. Пини [5], Г. Г. Казаряна [6], [7], В. Н. Маргаряна [8] и других. Вес гипоэллиптичности для таких операторов выписывается явно. При этом мы описываем то множество $\mathfrak{M}(P)$, которое порождает вес гипоэллиптичности $h(P, \xi)$ данного нерегулярного гипоэллиптического оператора $P(D)$. Отметим, что в работе [9] было доказано, что для произвольного гипоэллиптического оператора $P(D)$ множество $\mathfrak{M}(P)$ является вполне правильным выпуклым множеством.

§ 1. Определения и постановка задачи

Пусть R_n, $E_n(C_n)$ — n-мерные эвклидовы пространства точек $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ с вещественными (соответственно $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ — комплексными) координатами, Z_n^+ — n-мерное пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами, $R_n^{(0)} = \left\{\xi;\ \xi \in R_n,\ \prod_{j=1}^{n} \xi_j \neq 0\right\}$, $R_n^+ = \{\xi;\ \xi \in R_n,\ \xi_j > 0,\ j = 1, \cdots, n\}$.

Для $\xi \in R_n$, $\mu \in R_n^+$, $\lambda \in R_n^{(0)} \cap R_n^+$, $\alpha \in Z_n^+$, $t > 0$, положим

$$|\xi| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2},\quad |\xi|_\lambda = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{2/\lambda_j}},\quad |\xi^\mu| = |\xi_1|^{\mu_1} \cdots |\xi_n|^{\mu_n},\quad t^\lambda \xi = (t^{\lambda_1} \xi_1, \cdots$$

$$t^{\lambda_n} \xi_n),\quad |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j,\quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n},\quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

где $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j=1,\cdots,n)$ — обобщенные по С. Л. Соболеву производные.

Пусть $P(D)=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha D^\alpha$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными комплексными коэффициентами и $P(\xi)=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha\xi^\alpha$ — отвечающий ему характеристический многочлен (полный символ) (сумма здесь распространяется по некоторому конечному набору мультииндексов, который обозначим через (P), т. е. $(P)=\{\alpha;\ \alpha\in Z_n^+,\ \gamma_\alpha\neq 0\}$). Оператор $P(D)$ называется гипоэллиптическим, если все непрерывные решения уравнения $P(D)\,u=0$ являются бесконечно дифференцируемыми.

Определение 1.1 Пусть $\mathbf{A}=\{\nu^k\}_{k=1}^m$, $\nu^k\in R_n$. Характеристическим многогранником (х. м.) $\mathbf{N}=\mathbf{N}(\mathbf{A})$ набора $\mathbf{A}$ назовем наименьший выпуклый многогранник в R_n, содержащий все точки набора $\mathbf{A}$.

Определение 1.2. Характеристическим многогранником (х. м.) или многогранником Ньютона многочлена $P(\xi)=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha\xi^\alpha$ называется минимальный выпуклый многогранник $\mathbf{N}(P)$ в R_n, содержащий все точки $\alpha\in(P)\cup\{0\}$.

Определение 1.3. Многогранник $\mathbf{N}$ называется вполне правильным (в. п.), если а) $\mathbf{N}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат и б) все координаты внешних нормалей $(n-1)$-некоординатных граней $\mathbf{N}$ положительны.

Легко показать (см., например, [10]), что х. м. $\mathbf{N}(P)$ гипоэллиптического оператора является вполне правильным многогранником.

Обозначим k-мерные $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ грани многогранника $\mathbf{N}$ через $\mathbf{N}_i^k$ $(i=1,\cdots,M_k)$, $(n-1)$-мерная грань $\mathbf{N}_i^{n-1}$ $(i=1,\cdots,M_{n-1})$ многогранника $\mathbf{N}$ называется главной (см. [3]), если единичная внешняя нормаль $\lambda^i=(\lambda_1^i,\cdots,\lambda_n^i)$ этой грани имеет хотя бы одну положительную координату. Главная грань $\mathbf{N}_i^{n-1}$ называется вполне правильной (в. п.) (см. [7]), если $\lambda_j^i>0$ $(j=1,\cdots,n)$. Точка $\alpha\in\mathbf{N}$ называется главной (соответственно, вполне правильной (в. п.)) (см. [3], [7]), если α является предельной хотя бы для одной $(n-1)$-мерной главной (соответственно в. п.) грани многогранника $\mathbf{N}$. Грань $\mathbf{N}_i^k$, $k<n-1$ называется главной (соответственно в. п.), если она состоит из главных (соответственно в. п.) точек.

Определение 1.4. (См. [3], [7]). Грань $\mathbf{N}_i^k$ $(i=1,\cdots,M_k;\ k=0,\cdots,n-1)$ х. м. $\mathbf{N}(P)$ многочлена $P(\xi)$ назовем регулярной (невырожденной), если подмногочлен $P^{i,k}(\xi)$, отвечающий грани $\mathbf{N}_i^k$, удовлетворяет условию

$$P^{i,k}(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}_i^k}\gamma_\alpha\xi^\alpha\neq 0,\quad \xi\in R_n^{(0)}.$$

Грани, не являющиеся регулярными, будем называть нерегулярными. Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) назовем регулярным (невырожденным), если все главные грани х. м. $\mathbf{N}(P)$ регулярны. В противном случае оператор $P(D)$ назовем нерегулярным (вырожденным).

Обозначим через $\Lambda_i^k = \Lambda_i^k(P)$ множество тех внешних (относительно N) нормалей λ k-мерной в. п. некоординатной грани N_i^k $(0 \leqslant k \leqslant n-1,\ 1 \leqslant i < M_k)$, для которых $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j = 1$. После такой нормировки можно считать, что все компоненты векторов из Λ_i^k рациональны.

Пусть $\nu^k \in R_n^+$ $k = 1, \cdots, m$. Обозначим через $h(\xi)$ функцию $h(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{m} |\xi^{\nu^k}|$, а через $N(h)$ х. м. набора $\{\nu^k\}_{k=1}^m$.

Определение 1.5 (см. [4]). Функция $h(\xi)$ называется весом гипоэллиптичности оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$), если для некоторой постоянной $c > 0$

$$A(\xi) = \sum_{|\alpha| \neq 0} \left| \frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leqslant \frac{c}{h(\xi)},\ \xi \in R_n, \tag{1.1}$$

и для любого $\nu \in R_n^+ \setminus N(h)$, $\nu \neq 0$ существует последовательность $\{\xi_s\}_{s=1}^\infty$ такая, что $\xi^s \to \infty$ и

$$(h(\xi^s) + |(\xi^s)^\nu|) \cdot A(\xi^s) \to \infty, \text{ при } s \to \infty.$$

§ 2. Вес гипоэллиптичности для одного класса нерегулярных гипоэллиптических операторов

Обозначим через P множество гипоэллиптических операторов с постоянными коэффициентами, все k-мерные главные грани $(k < n-1)$ х. м. N (P) которых регулярны и положим

$$\mathfrak{M}(P) = \{\nu;\ \nu \in R_n^+;\ |\xi^\nu| \cdot A(\xi) \leqslant \text{const} < \infty,\ \xi \in R_n\}.$$

Легко заметить, что для любого гипоэллиптического многочлена $P(\xi)$ $N(h) \subset \mathfrak{M}(P)$ и если $\mathfrak{M}(P)$-многогранник, то функция $h(\xi) = \sum\limits_{n=1}^{m} |\xi^{l^k}|$, где $l^k \in R_n^+$ $(k = 1, \cdots, m)$ вершины многогранника $\mathfrak{M}(P)$, является весом гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)$.

Пусть все грани х. м. $N(P)$ оператора $P(D) \in$ P регулярны за исключением, быть может, единственной главной грани $N_{i_0}^{n-1}$, $\lambda^0 \in \Lambda^{n-1}$ — нормаль грани $N_{i_0}^{n-1}$ (которая определяется однозначно), $0 < \delta \leqslant 1$. Положим

$$\sum(P^{i_0, n-1}) = \{\tau \in R_n^{(0)},\ P^{i_0, n-1}(\tau) = 0,\ |\tau| = 1\},$$

$$B(\delta) = \{\nu;\ \nu \in R_n^+,\ (\lambda^0, \nu) \leqslant \delta,\ (\lambda, \nu) \leqslant 1,\ \lambda \in \Lambda^{n-1}\}.$$

Лемма 2.1. *Если все главные грани х. м. оператора $P(D) \in$ P регулярны, а грань $N_{i_0}^{n-1}$ — не регулярна, то для некоторого числа $0 < \delta_0 < 1$ $\mathfrak{M}(P) = B(\delta_0)$.*

Доказательство. Пусть $\tau \in \sum(P^{i_0, n-1})$, $0 < \varepsilon < 1$, $\theta \in R_1$, $l(\lambda)$ — наименьшее натуральное число такое, что $l(\lambda)/\lambda_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ — целые (существование такого числа следует из рациональности λ_i $(i = 1, \cdots, n)$), положим

$$Q_\varepsilon(\xi, \theta, \tau) = \sum_{l=1}^{n} \left[\left(\frac{\xi_l}{\tau_l} \right)^{2l(\lambda)/\lambda_l} - \theta^{2l(\lambda)} \right]^2 - \varepsilon \cdot \theta^{4l(\lambda)},$$

$Q_\varepsilon(\xi, \theta, \tau)$ является многочленом от $(n+1)$ вещественных переменных: $\theta, \xi_1, \cdots, \xi_n$. Пусть $d(\xi)$ — расстояние от точки $\xi \in R_n$ до поверхности $\{\zeta;\ \zeta \in C_n,\ P(\zeta)=0\}$ и

$$M(\theta, \tau) = \inf_{Q_\varepsilon(\xi, \theta, \tau)<0} d(\xi).$$

Тогда

$$-M(\theta, \tau)^2 = \sup\{-|\xi - \zeta|^2\},$$

где верхняя грань берется по всем вещественным θ, ξ, для которых $Q_\varepsilon(\xi, \theta, \tau) \leqslant 0$ и по всем $\zeta \in C_n$, $P(\zeta) = 0$, или, что то же самое, для всех $\theta \in R_1$ и $\xi \in R_n$, для которых выполняется неравенство

$$(1 - \sqrt{\varepsilon})\theta^{2l(\lambda)} \leqslant \left(\frac{\xi_l}{\tau_l} \right)^{2l(\lambda)/\lambda_l} \leqslant (1 + \sqrt{\varepsilon})\theta^{2l(\lambda)}, \tag{2.1}$$

и по всем $\zeta \in C_n$, $P(\zeta) = 0$. Если рассматривать переменную $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ как $2n$ вещественных переменных, то по лемме 2.1 из приложения к работе [1] следует, что существуют рациональные числа $A(\tau)$, $a(\tau)$ такие, что при $\theta \to \infty$

$$M(\theta, \tau) = A(\tau)\,\theta^{a(\tau)}(1 + o(1)). \tag{2.2}$$

Так как $P(D) \in \mathbf{P}$, то $M(\theta, \tau) \to \infty$ при $\theta \to \infty$ и, следовательно $A(\tau) \neq 0$, $a(\tau) > 0$.

Обозначим

$$\delta_0 = \inf_{\tau \in \Sigma(P^{l_0, n-1})} a(\tau).$$

Из гипоэллиптичности оператора $P(D)$ следует, что $\delta_0 > 0$ (см [1], теорема 4.1.3). Докажем, что $B(\delta_0) = \mathfrak{M}(P)$.

Сначала покажем, что $\mathfrak{M}(P) \subset B(\delta_0)$. Пусть, наоборот, при выполнении условий леммы существует вектор $\nu \in \mathfrak{M}(P) \setminus B(\delta_0)$, $\nu \neq 0$. В силу леммы 3.5 работы [4] достаточно рассмотреть случай $1 \geqslant (\nu, \lambda^0) > \delta_0$. По определению числа δ_0 существует точка $\tau^0 \in \Sigma(P^{l_0, n-1})$ такая, что

$$\delta_0 \leqslant a(\tau^0) < (\nu, \lambda^0). \tag{2.3}$$

Из определений $M(\theta, \tau^0)$, $a(\tau^0)$ и $A(\tau^0)$ следует существование последовательности $\{\theta_s\}_{s=1}^{\infty}$ (и, следовательно, последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$) такой, что $\theta_s \to \infty$ (и, следовательно, по (2.1) $\xi^s \to \infty$) и

$$d(\xi^s) = A(\tau^0)\,|\xi^s|_{\lambda^0}^{a(\tau^0)}(1 + o(1)) \tag{2.4}$$

при $s \to \infty$.

Тогда в силу леммы 4.1.1 работы [1], из (2.1) и (2.4) имеем

$$|(\xi^s)^\nu| \cdot A(\xi^s) \geqslant c\,\theta_s^{(\nu, \lambda^0)} \cdot A(\xi^s) \geqslant c_1 |\xi^s|_{\lambda^0}^{(\nu, \lambda^0)}\, d^{-1}(\xi^s). \tag{2.5}$$

Из (2.3) и (2.5) получим, что $\nu \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$. Таким образом, доказано, что $\mathfrak{M}(P) \subset B(\delta_0)$.

Для доказательства обратного включения $B(\delta_0)\subset\mathfrak{M}(P)$ воспользуемся методом Михайлова—Казаряна (см. [3], [7]). Пусть, наоборот, существует точка $\nu\in B(\delta_0)\setminus\mathfrak{M}(P)$, $\nu\neq 0$. Тогда существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ такая, что при $s\to\infty$ $\xi^s\to\infty$,

$$|(\xi^s)^\nu|\cdot A(\xi^s)\to\infty. \tag{2.6}$$

Не умоляя общности, можно считать, что $\xi_i^s>0$ $(i=1,\cdots,n;\ s=1,2,\cdots)$. Положим

$$\lambda_i^s=\frac{\ln\xi_i^s}{\sqrt{\sum_{k=1}^n(\ln\xi_k^s)^2}},\quad(i=1,\cdots,n),\ \rho_s=\exp\sqrt{\sum_{k=1}^n(\ln\xi_k^s)^2},$$

тогда

$$\xi^s=\rho_s^{\lambda^s}\ (\xi_i^s=\rho_s^{\lambda_i^s}\ \ i=1,\cdots,n),\ s=1,2,\cdots,$$

Так как для всех $s=1,2,\cdots$ векторы λ^s находятся на единичной сфере, то у последовательности $\{\lambda^s\}$ есть предельная точка λ^∞ и за счет, быть может, взятия подпоследовательности можно считать, что $\lambda^s\to\lambda^\infty$. Из выпуклости х. м. $\mathbf{N}$ следует, что λ^∞ является внешней нормалью к одной и только одной грани х. м. $\mathbf{N}$.

Возьмем в Z_n^+ какой-нибудь базис $(e^{1,1},e^{1,2},\cdots,e^{1,n})$, $e^{1,1}=\lambda^\infty$ Тогда $\lambda^s=\sum_{i=1}^n\chi_{1,i}^s e^{1,i}$ причем, так как $\lambda^s\to\lambda^\infty=e^{1,1}$, при $s\to\infty$, то $\chi_{1,1}^s\to1$, а при $i=2,\cdots,n$ $\chi_{1,i}^s=o(\chi_{1,1}^s)=o(1)$. За счет выбора подпоследовательности можно считать, что при $s\to\infty$

$$\frac{\lambda^s-\chi_{1,1}^s e^{1,1}}{|\lambda^s-\chi_{1,1}^s e^{1,1}|}=\frac{\sum_{i=2}^n\chi_{1,i}^s e^{1,i}}{\left|\sum_{i=2}^n\chi_{1,i}^s e^{1,i}\right|}\to e^{2,2}.$$

Перейдем в подпространстве, натянутом на $(e^{1,1},\cdots,e^{1,n})$ к новому базису $(e^{2,2},\cdots,e^{2,n})$, тогда $\lambda^s=\chi_{1,1}^s e^{1,1}+\sum_{i=2}^n\chi_{2,i}^s e^{2,i}$, причем очевидно $\chi_{2,2}^s=o(\chi_{1,1}^s)=o(1)$, $\chi_{2,i}^s=o(\chi_{2,2}^s)$, $i=3,\cdots,n$.

Поступая аналогично в подпространстве с базисом $(e^{2,3},\cdots,e^{2,n})$, и т. д. получим (после переобозначений), что

$$\lambda^s=\sum_{i=1}^n\chi_i^s e^i,\ \chi_1^s\to1,\ \chi_{i+1}^s=o(\chi_i^s),\ i=1,\cdots,n-1.$$

При этом существует номер s_0 такой, что для всех $s\geqslant s_0$

$$\chi_i^s>0\ (i=1,\cdots,m),\ \chi_i^s=0\ (i=m+1,\cdots,n),\ m\leqslant n.$$

Рассмотрим грани $\mathbf{N}_{j_1}^{q_1},\cdots,\mathbf{N}_{j_m}^{q_m}$ х. м. $\mathbf{N}$, удовлетворяющие условиям, что $\mathbf{N}_{j_1}^{q_1}$ лежит в опорной гиперплоскости к $\mathbf{N}$ с внешней нормалью e^1 (после нормировки $\min(e_1^1,\cdots,e_n^1)=1$, $e^1\in\Lambda_{j_1}^{q_1}$), а каждая грань

$\mathbf{N}_{j_i}^{q_i}$ $(i=2,\cdots, m)$ лежит в опорной гиперплоскости (рассматриваемой изолированно) к предыдущей с нормалью e^i. При этом если существует несколько подграней грани $\mathbf{N}_{j_i}^{q_i}$ с нормалью e^{i+1}, то в качестве $\mathbf{N}_{j_{i+1}}^{q_{i+1}}$ условимся брать ту, для которой (e^{i+1}, α) больше. Из построения граней $\mathbf{N}_{j_1}^{q_1},\cdots, \mathbf{N}_{j_m}^{q_m}$ видно, что для размерности этих граней выполнено соотношение $k_1>k_2>\cdots>k_m$.

Пусть $P^{j_i, q_i}(\xi)$ — подмногочлен многочлена $P(\xi)$, отвечающий грани $\mathbf{N}_{j_i}^{q_i}$ и α—произвольная точка, принадлежащая всем $\mathbf{N}_{j_i}^{q_i}(i=1,\cdots, n)$, т. е. $\alpha\in\mathbf{N}_{j_m}^{q_m}$. Изучим поведение многочленов $P(\xi^s)$ и $D^\alpha P(\xi^s)$ при $\rho_s\to\infty$, $\xi^s=\rho_s^{\sum_{i=1}^{n}\chi_i^s e^i}$. Ради простоты записи опустим s в обозначениях. За счет выбора подпоследовательности можно считать, что при некотором $r\,(1\leqslant r\leqslant m)$ $\rho^{\chi_r}\to\infty$, $\rho^{\chi_{r+1}}\to b\geqslant 1$ (при $r=n$ положим, по определению, $\chi_{n+1}=0$). Тогда из e^i однородности многочленов $P^{j_i, q_i}(\xi)$ (см. [3]), из выпуклости х. м. $\mathbf{N}$ и его граней, получаем при некоторых $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$, $1\leqslant r\leqslant m$ (e^{n+1} — какой-нибудь единичный вектор, $\chi_{n+1}=0$)

$$P(\xi)=\rho^{(\alpha,\chi_1 e^1)}\left[P^{j_1, q_1}\left(\rho^{\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_i e^i}\right)+\tilde{o}\,(\rho^{-\sigma_1\chi_1})\right]=\cdots=$$

$$=\rho^{\alpha\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_i e^i\right)}\cdot\left[P^{j_r, q_r}\left(\rho^{\sum\limits_{i=r+1}^{n}\chi_i e^i}\right)+\tilde{o}\,(\rho^{-\sigma_r\chi_r})\right]. \qquad (2.7)$$

Так как $\rho^{\chi_{r+1}}\to b>0$, то $\rho^{\sum\limits_{i=r+1}^{n}\chi_i e^i}\to b^{e^{r+1}}\equiv\eta$. Очевидно при всех $i=1,\cdots$ $\cdots, n$ $0<\eta_i<\infty$ (η_i — конечные степени положительного числа b).

Рассмотрим два следующих случая:

а) $P^{j_r, q_r}(\eta)\neq 0$, б) $P^{j_r, q_r}(\eta)=0$.

Рассуждая так, как это делается в [3] или [7], легко доказать, что в случае а)

$$|(\xi^s)^\gamma|\cdot A\,(\xi)<\text{const}<\infty,\quad s=1, 2,\cdots.$$

Это противоречит нашему предположению.

В случае б) грань $\mathbf{N}_{j_r}^{q_r}$ совпадает с нерегулярной гранью $\mathbf{N}_{i_0}^{n-1}$, $r=m=1$, $q_r=n-1$, $e^1=t\lambda^0\,(t\in R_1)$ являетея внешней нормалью грани $\mathbf{N}_{i_0}^{n-1}$, $\in\sum(P^{i_0, n-1})$.

Пусть $s\to\infty$, имеем

$$|\xi^s|_{\lambda^0}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^s|^{2/\lambda_j^0}}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\rho_s^{\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_j^s e_j^i}\right)^{2/\lambda_j^0}}=$$

$$=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\rho_s^{2\chi_1^s t}}\,(1+\tilde{o}(1))=\sqrt{n}\,\rho_s^{\chi_1^s\cdot t}\,(1+o\,(1)),$$

т. е.

$$\xi^s / |\xi^s|_{\lambda^0}^{\lambda^0} \to \eta_i / (\sqrt{n})^{\lambda^0} = \tau \in \sum (P^{l_0, n-1})$$

и $Q_k(\xi^s, |\xi^s|_{\lambda^0}, \tau) \leqslant 0$ при достаточно больших s. Используя это, в силу (2.2) получим, что при $s \to \infty$

$$d(\xi^s) \geqslant M(\xi^s|_{\lambda^0}, \tau) = A(\tau) \cdot |\xi^s|_{\lambda^0}^{a(\tau)} (1 + o(1)).$$

Но поскольку

$$|(\xi^s)^\nu| \leqslant c |\xi^s|_{\lambda^0}^{(\nu, \lambda^0)},$$

то из леммы 4.1.1 работы [1] с учетом того, что $(\nu, \lambda^0) \leqslant \delta_0$ $(\nu \in B(\delta_0))$, с некоторыми положительными постоянными c, c_1, c_2 имеем

$$|(\xi^s)^\nu| \cdot A(\xi^s) \leqslant c |\xi^s|_{\lambda^0}^{(\nu, \lambda^0)} \cdot A(\xi^s) \leqslant c_1 |\xi^s|_{\lambda^0}^{a(\tau)} \cdot A(\xi^s) \leqslant c_1 d(\xi^s) \cdot A(\xi^s) \leqslant c_2,$$

Это противоречит (2.5) и показывает, что $B(\delta_0)) \setminus \mathfrak{M}(P) = \varnothing$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Пусть все главные грани х. м. оператора $P(D) \in \mathbf{P}$ за исключением главных нерегулярных граней $\mathbf{N}_1^{n-1}, \cdots, \mathbf{N}_i^{n-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant M_{n-1})$ регулярны, тогда существуют числа δ_l $0 < \delta_l < 1$ $(i = 1, \cdots, M_{n-1})$ такие, что $\mathfrak{M}(P) = B(\delta_1, \cdots, \delta_l) = \{\nu;\ \nu \in R_n^+;\ (\lambda^j, \nu) \leqslant \delta_j\ j = 1, \cdots, i,\ (\lambda, \nu) \leqslant 1\ \lambda \in \Lambda^{n-1}\}$, где λ^j — внешняя нормаль грани $\mathbf{N}_j^{n-1}$ $(j = 1, \cdots, i)$.

Доказательство проводится аналогично.

Так как по доказанной лемме 2.1 множество $\mathfrak{M}(P)$ является многогранником, то если обозначить через e^k, $k = 0, \cdots, M'$ вершины многогранника $\mathfrak{M}(P)$ и

$$h(\xi) = \sum_{k=0}^{M'} |\xi^{e^k}|, \tag{2.8}$$

то функция $h(\xi)$, порождаемая многогранником $\mathfrak{M}(P)$, является весом гипоэллиптичности оператора $P(D) \in \mathbf{P}$.

§ 3. Оценка производных решений внутри области

Пусть $\mathbf{N} = \mathbf{N}(P)$ — в. п. х. м., $h(\xi)$ — вес оператора $P(D) \in \mathbf{P}$, многогранник $\mathfrak{M}(P)$ определяется как выше и $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ — произвольная точка из $\mathfrak{M}(P)$ с рациональными компонентами. Обозначим через $k(\nu)$ наименьшее натуральное число такое, что $k(\nu) \cdot \nu \in Z_n^+$.

Положим также $N(P) = \{u;\ u \in C(E_n),\ P(D)u = 0\}$. Справедлива следующая

Теорема 3.1. *Пусть $h(\xi)$ — вес гипоэллиптичности оператора $P(D) \in \mathbf{P}$ и $\nu \in \mathfrak{M}(P)$. Пусть $u \in N(P)$ и K — произвольный компакт из E_n. Тогда существует постоянная $c = c(K) > 0$ такая, что для всех $j = 0, 1, \cdots$*

$$\sup_{x \in K} |D^{[k(\nu) \cdot \nu] j} u(x)| \leqslant c^j j^{k(\nu) j}. \tag{3.1}$$

Доказательство теоремы 3.1 ничем не отличается от доказательства теоремы 3.1 работы [4].

Мы покажем, что результат теоремы 3.1 является неулучшаемым. С этой целью сначала докажем следующее вспомогательное предложение.

Лемма 3.1. *Пусть* $\nu \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$ *и* $(\nu, \lambda) < 1$, $\lambda \in \Lambda^{n-1}$. *Тогда существует последовательность* $\zeta^s \in C_n$, $s = 1, 2, \cdots$ *и постоянная* $c > 0$ *такие, что* $P(\zeta^s) = 0$ *и* $|\mathrm{Im}\,\zeta^s| \leqslant c\ |(\mathrm{Re}\,\zeta^s)^\nu|$.

Доказательство. Так как $\nu \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$, то существует последовательность ξ^s, $s = 1, 2, \cdots$, такая, что при $s \to \infty$

$$|(\xi^s)^\nu| \cdot A(\xi^s) \to \infty. \tag{3.2}$$

По лемме 4.1.1 работы [1] из (3.2) следует, что при $s \to \infty$

$$d(\xi^s) = \bar{o}\,|(\xi^s)^\nu|). \tag{3.3}$$

Из определения функции $d(\xi)$ следует, что для каждого $s = 1, 2, \cdots$ существует точка $\zeta^s \in C_n$ такая, что $P(\xi^s) = 0$ и $d(\zeta^s) = |\zeta^s - \zeta^s|$. Из соотношения (3.3) получим при $s \to \infty$

$$|\mathrm{Im}\,\zeta^s| = \bar{o}\,(|(\zeta^s)^\nu|).$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\xi_i^s > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $s = 1, 2, \cdots$. Обозначим

$$\xi^s = \rho_s^{\lambda^s}\ (\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i^s}\ i = 1, \cdots, n),\ s = 1, 2, \cdots,$$

где

$$\rho_s = \exp\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (\ln \xi_i^s)^2}\right),\ \lambda^s = (\lambda_1^s, \cdots, \lambda_n^s),\ \lambda_i^s = \ln \xi_i^s/\rho_s,\ i = 1, \cdots, n.$$

Аналогично доказательству леммы 2.1 получим представление (2.7), где возможны 2 следующих случая:

а) $P^{j_r, q_r}(\eta) \neq 0$ и б) $P^{j_r, q_r}(\eta) = 0$.

В случае а) простые выкладки показывают, что при условии $(\lambda, \delta) < 1$, $\lambda \in \Lambda^{n-1}$.

$$|(\zeta^s)^\delta| \cdot A(\xi^s) \leqslant \mathrm{const} < \infty,$$

что противоречит соотношению (3.2).

Рассмотрим случай б): $P^{j_r, q_r}(\eta) = 0$, тогда $r = m = 1$, $q_r = n - 1$, $e^1 = t\lambda^0 (t \in R^1)$ является внешней нормалью некоторой нерегулярной грани $N_{i_0}^{n-1}$, $i_0 = 1, \cdots, M_{n-1}$, $\eta \in \sum (P^{i_0, n-1})$. При этом имеем при $s \to \infty$

$$|\xi^s|_{\lambda^0} = \sqrt{n}\,\rho_s^{\lambda_1^s \cdot t}(1 + \tilde{o}(1)),$$

т. е.

$$\xi^s/|\xi^s|_{\lambda^0}^{\lambda^0} \to \eta/\sqrt{n})^{\lambda^0} = \tau \in \sum (P^{i_0, n-1}).$$

Положим $t_s = |\xi^s|_{\lambda^0}$, и пусть $s \to \infty$, тогда

$$\xi^s = \tau \cdot t_s^{\lambda^0}\,(1 + \tilde{o}(1)), \tag{3.5}$$

где $\tau \in \sum (P^{i_0, n-1})$.

Из (3.3) следует, что

$$|\operatorname{Re}(\zeta_i^s - \xi_i^s)| = \bar{o}\,(|(\xi^s)^\nu|).$$

Отсюда, с учетом (3.5) и условия $(\nu, \lambda^0) < 1$, получим с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$c_1^{-1}|\xi_i^s| \leqslant |\operatorname{Re}\xi_i^s| \leqslant c_1|\xi_i^s|. \tag{3.6}$$

Из (3.4) и (3.6) следует существование постоянной $c_2 > 0$ такой, что

$$|\operatorname{Im}\xi^s| \leqslant c_2|(\operatorname{Re}\xi^s)^\nu|.$$

Лемма 3.1 доказана.

Теперь уже мы можем доказать основной результат настоящего параграфа.

Теорема 3.2. *Пусть $\Omega \in R_n$ — произвольное открытое множество. Пусть все главные грани х. м. оператора $P(D) \in \mathbf{P}$ регулярны, а грань $\mathbf{N}_{i_0}^{n-1}$ не регулярна, $x_0 \in \Omega$. Если для любой функции $u \in N(P, \Omega) = \{V, V \in C(\Omega), P(D)V = 0\}$ существуют постоянная $c = c(u) > 0$, мультииндекс $\alpha \neq 0$ и рациональное число $l = l(u)$ такие, что*

$$|D^{j\cdot\alpha}u(x^0)| < c^j j^{l\cdot j},\ j = 1, 2, \cdots, \tag{3.7}$$

то

$$\frac{\alpha}{l} = \left(\frac{\alpha_1}{l}, \cdots, \frac{\alpha_n}{l}\right) \in \mathfrak{M}(F) = B(\hat{\delta}_0).$$

Доказательство. Пусть в $N(P, \Omega)$ определена топология, индуцированная из $L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. По теореме 4.1, 2 работы [1] (см. замечание после этой теоремы) эта топология совпадает с топологией индуцированной из $C^\infty(\Omega)$. Тогда для любого натурального числа m множество

$$F_m = \{u;\ u \in N(P, \Omega),\ |D^{j\cdot\alpha}u(x^0)| \leqslant m^j \cdot j^{l\cdot j},\ j = 1, 2, \cdots\}$$

замкнуто, а из неравенства (3.7) следует, что

$$N(P, \Omega) = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m.$$

Тогда из теоремы Бэра о категориях и из того, что $N(P, \Omega)$ является пространством Фреше, следует существование натурального числа m_0 такого, что множество F_{m_0} имеет внутреннюю точку. Так как, с другой стороны, очевидно, F_{m_0} является выпуклым и симметрическим множеством, то начало координат является внутренней точкой для F_{m_0}. Это означает, что существует число $t > 0$ и компакт $K \subset \Omega$ такие, что F_{m_0} содержит всякую функцию $u \in N(P, \Omega)$, L_2-норма которой по компакту K не превосходит t, т. е. для всех $l = 1, 2, \cdots$

$$|D^{j\cdot\alpha}u(x^0)| \leqslant m_0 j^{l\cdot j}\, t^{-1} \cdot \left[\int_K |u(x)|^2\,dx\right]^{1/2} \tag{3.8}$$

как только

$$\int_K |u(x)|^2\,dx \leqslant t^2.$$

Так как неравенство (3.8) однородно по u, и оно верно при $\int_K |u(x)|^2\,dx \leqslant t^2$, то неравенство (3.8) справедливо для любой функции $u \in N(P, \Omega)$.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы.

Пусть наоборот, при выполнении условий теоремы $a/l \overline{\in} \mathfrak{M}(P) = B(\delta_0)$. Так как $\mathfrak{M}(P)$ замкнуто, то в силу того, что $a/l \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$, следует существование числа $b > 1$, для которого $a/b \cdot l \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$, т. е. $(\lambda^0, a/b \cdot l) > \delta_0$, где λ^0 — внешняя нормаль грани $\mathbf{N}_{l_0}^{n-1}$.

Пусть $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ — такая последовательность из C_n, что $P(\xi^s) = 0$ $(s = 1, 2, \cdots)$, $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$.

Рассмотрим последовательность функций

$$U_s(x) = \exp\{i(x - x^0, \xi^s)\},\ s = 1, 2, \cdots.$$

Очевидно, что $U_s \in N(P, \Omega)$. В силу неравенства (3.8) для всех $s = 1, 2, \cdots$

$$|(\xi^s)^{j \cdot a}| \leqslant [\mathrm{mes}\, K]^{1/2} \cdot m_0^j \cdot j^{j \cdot l}\, t^{-1} e^{a |\operatorname{Im} \xi^s|}, \tag{3.9}$$

где a — верхняя грань $|x - x^0|$, при $x \in K$.

В силу теоремы 4.1.3 работы [1] для гипоэллиптического оператора $P(D)$ имеем, что при $s \to \infty$ $|\operatorname{Im} \xi^s| \to \infty$. Тогда из неравенства (3.9) следует, что для всех $s = 1, 2, \cdots$

$$|(\xi)^{s[|\operatorname{Im} \xi^s|] \cdot a}| \leqslant (\mathrm{mes}\, K)^{1/2} \cdot m_0^{[|\operatorname{Im} \xi^s|]} \cdot [\,|\operatorname{Im} \xi^s|\,]^{l \cdot [|\operatorname{Im} \zeta^s|]} \cdot t^{-1} \cdot e^{a(1 + [|\operatorname{Im} \xi^s|])},$$

где $[c]$ — целая часть числа $c \in R_1$

Это значит, что с некоторой постоянной $c_1 > 0$ и для всех $s = 1, 2, \ldots$

$$|(\zeta^s)^{a/l}| \leqslant c_1 [|\operatorname{Im} \zeta^s|],$$

или, что то же самое, для всех $s = 1, 2, \ldots$

$$|(\operatorname{Re} \zeta^s)^{a/l}| \leqslant c_1 [|\operatorname{Im} \zeta^s|]. \tag{3.10}$$

Так как $a/b \cdot l \overline{\in} \mathfrak{M}(P)$ $(b > 1)$, то по лемме (3.1) существуют последовательность $\{\xi^{0,s}\}_{s=1}^{\infty}$ из C_n и постоянная $c > 0$ такие, что

$$P(\zeta^{0,s}) = 0,\ |\operatorname{Im} \zeta^{0,s}| \leqslant c\,|(\operatorname{Re} \zeta^{0,s})^{a/b \cdot l}|.$$

Так как для последовательности $\{\zeta^{0,s}\}_{s=1}^{\infty}$ также верна оценка (3.10), то отсюда имеем

$$|\operatorname{Im} \zeta^{0,s}| \leqslant c\,|(\operatorname{Re} \zeta^{0,s})^{a/b \cdot l}| = c\,|(\operatorname{Re} \zeta^{0,s})^{a/l}|^{1/b} \leqslant c \cdot c_1 [|\operatorname{Im} \zeta^{0,s}|]^{1/b}.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

Замечание 3.1. Можно доказать аналогичное утверждение в случае наличия нескольких $(n-1)$-мерных нерегулярных граней х. м. $\mathbf{N}(P)$ (см. также замечание 2.1).

§ 4. Описание многогранника $\mathfrak{M}(P)$ для одного класса гипоэллиптических операторов

В этом параграфе для одного класса гипоэллиптических операторов $\{P(D)\beta\}$ мы вычислим число $\delta_0(P)$ и, тем самым, дадим явное описание многогранников $\mathfrak{M}(P)$.

Пусть $\lambda^0=(\lambda_1^0,\cdots,\lambda_n^0)=(1,\cdots,1)$, многочлен $P(\xi)$ представим в виде суммы однородных многочленов по вектору λ^0

$$P(\xi)=\sum_{j=0}^{M(P)} P_j(\xi)=\sum_{j=0}^{M(P)}\sum_{(\lambda^0,\alpha)=|\alpha|=d_j}\gamma_\alpha\xi^\alpha;\ d_0>d_1>\cdots>d_{M(P)}\geqslant 0. \quad (4.1)$$

На множестве $\sum(P)$ (опред. см. в § 2) определим функции $I(\eta)$, принимающую целочисленные значения из множества $\{1,\cdots,M+1\}$ следующим образом:

$$I(\eta)=\min\{\min\{j,\ P_j(\eta)\neq 0,\ \eta\in\sum(P_0)\};\ M+1\}.$$

Приведем некоторые определения.

Определение 4.1 (см. [11]). Пусть $R(\xi)$ — однородный многочлен порядка d. Характеристической линией (х. л.) многочлена $R(\xi)$ в точке $\eta\in R_n$ назовем отрезок прямой $\chi(R,\eta,\delta)=d-(1-\delta)l$ $\delta\in[0,1]$, где l — порядок многочлена $R(\xi)$ в точке η.

Определение 4.2 (см. [11]). Характеристической линией (х. л.) многочлена $P(\xi)$ вида (4.1) в точке $\eta\in\sum(P_0)$ назовем график функции

$$\chi(P,\eta,\delta)=\max_{0\leqslant j\leqslant M}\chi(P_j,\eta,\delta);\ \delta\in[0,1],\ M=M(P).$$

Определение 4.3 (см. [11]). Скажем, что многочлен $P_j(\xi)$ реализует х. л. многочлена $P(\xi)$ вида (4.1) в точке $\eta\in\mathfrak{M}(P_0)$, если существует число $\delta_0\in[0,1]$ такое, что $\chi(P,\eta,\delta_0)=\chi(P_j,\eta,\delta_0)$.

Обозначим через $\omega(P,\eta)$ множество тех индексов j $(0\leqslant j\leqslant M)$, для которых многочлен $P_j(\xi)$ реализует х. л. многочлена $P(\xi)$ в точке η.

Определение 4.4. (см. [11]). Точка $\delta(\eta)\in[0,1]$ называется вершиной х. л. многочлена $P(\xi)$ в точке $\eta\in\sum(P_0)$, если существуют по крайней мере два индекса $j,\ i\in\omega(P,\eta)$; $j\neq i$ такие, что

$$\chi(P_j,\eta,\delta(\eta))=\chi(P_i,\eta,\delta(\eta))=\chi(P,\eta,\delta(\eta)).$$

Обозначим через $A(P,\eta)$ множество тех $\delta\in[0,1]$, которые являются вершинами х. л. многочлена $P(\xi)$ в точке $\eta\in\sum(P_0)$, а через $B(P,\eta,\delta)$ — множество тех индексов $j\in\omega(P,\eta)$, для которых $\chi(P_j,\eta,\delta)=\chi(P,\eta,\delta)$ $(\delta\in[0,1])$.

Обозначим через $\mathbf{P}(\lambda^0)$ $(\lambda^0=(1,\cdots,1))$ множество тех гипоэллиптических операторов $P(D)$ (многочленов $P(\xi)$), с вещественными коэффициентами, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) все главные грани, кроме, быть может, главной грани $\mathbf{N}_{i_0}^{n-1}$, регулярны, $\lambda^0=(1,\cdots,1)\in\Lambda^{n-1}(P)$ является внешней нормалью грани $\mathbf{N}_{i_0}^{n-1}$.

б) если многочлен $P(\xi)$ представлен в виде (4.1), то для каждой точки $\eta\in\sum(P_0)$ и каждого многочлена $P_j(\xi)$, $j=0,1,\cdots,I(\eta)-1$

существуют окрестность $u(\eta)$, гладкие в $U(\eta)\setminus\{0\}$ однородные функции $P_j^{(0)}(\xi, \eta)$, $r(\xi, \eta)$, натуральное число $l_j = l_j(\eta)$ такие, что

$$P_j^{(0)}(\eta, \eta) \neq 0;\ r(\eta, \eta) = 0;\ \prod_{j=1}^{n} D_j r(\eta, \eta) \neq 0$$

и

$$P_j(\xi) = P_j^{(0)}(\xi, \eta)[r(\xi, \eta)]^{l_j},\ \xi \in U(\eta). \tag{4.2}$$

Отметим, что при $n = 2$ любой однородный многочлен $P(\xi)$ представляется в виде (4.1); в) существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{M} |P_j(\xi)| \leqslant c(1 + |P(\xi)|). \tag{4.3}$$

Пусть $P(D) \in \mathbf{P}(\lambda^0)$. Обозначим

$$\delta_0(\eta) = \min_{\delta \in A(P, \eta)} \delta,\quad \Delta(P) = \inf_{\eta \in \Sigma(P_0)} \delta_0(\eta),\ \text{если}\ \Sigma(P_0) \neq \varnothing$$

и

$$\Delta(P) = 1,\ \text{если}\ \Sigma(P_0) = \varnothing.$$

Очевидными геометрическими соображениями убеждаемся, что для операторов класса $\mathbf{P}(\lambda^0)$

$$\Delta(P) = \inf_{\eta \in \Sigma(P_0)} \min_{0 < j < l(\eta) - 1} (d_{l(\eta)} - d_j + l_j(\eta))/l_j(\eta).$$

Легко показать, что $0 < \Delta(P) \leqslant 1$, причем $\Delta(P) = 1$ тогда и только тогда, когда $P(\xi)$ регулярен.

Теорема 4.1. *Пусть* $P(\xi) \in \mathbf{P}(\lambda^0)$. *Тогда* $\mathfrak{M}(P) = B(\Delta(P))$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\mathfrak{M}(P) \subset B(\Delta(P))$. Пусть существует $\nu^0 \in \mathfrak{M}(P) \setminus B(\Delta(P))$, $\nu^0 \neq 0$. Как и в доказательстве леммы 2.1, достаточно рассмотреть случай $(\nu^0, \lambda^0) = |\nu^0| > \Delta(P)$. Пусть для точки $\eta^0 \in \Sigma(P_0)$ $\delta_0(\eta^0) \leqslant |\nu^0|$ (здесь $\delta_0(\eta) \in A(P, \eta^0)$). Существование такой точки $\eta^0 \in \Sigma(P_0)$ следует из определения $\Delta(P)$ и из того, что $|\nu^0| > \Delta(P)$.

Рассмотрим многочлены $P(\xi)$ и $Q(\xi) = \sum_{k=1}^{n} |D_k P(\xi)|^2$ на последовательности $\xi^s = s \cdot \eta^0 + a s^{\delta_0(\eta^0)}$, $s = 1, 2, \cdots$, где $a \in R_n$ пока произвольно. Для многочлена $P(\xi)$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем при $s = 1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned}|P(\xi^s)| &= \left|\sum_{j=0}^{M} P_j(\xi^s)\right| = \left|\sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha} \frac{D^\alpha P_j(s \cdot \eta^0)\, a^\alpha s^{\delta_0(\eta^0) \cdot |\alpha|}}{\alpha!}\right| \leqslant \\ &\leqslant c_1 \sum_{j=0}^{M} s^{\chi(P_j, \eta^0, \delta_0(\eta^0))} \leqslant c_1 (M+1) s^{\chi(P, \eta^0, \delta_0(\eta^0))},\end{aligned} \tag{4.4}$$

а для многочлена $Q(\xi)$ имеем при $s \to \infty$ с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$Q(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \left|\sum_{j=0}^{M} D_k P_j(\xi^s)\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\sum_{j=0}^{M} \sum_{|\alpha| > l_j(\eta^0) - 1} D^\alpha D_k P_j(s \cdot \eta^0)\, a^\alpha s^{\delta_0(\eta^0) \cdot |\alpha|}\right|^2 >$$

$$\geqslant c_2 \left|\sum_{k=1}^{n}\right| \sum_{j \in B(P, \eta^0, \delta_0(\eta^0))} \sum_{|\alpha| > l_j(\eta^0) - 1} \left.\frac{a^\alpha D^\alpha D_k P_j(\eta^0)}{\alpha!}\right|^2 s^{2[\chi(P, \eta^0, \delta_0(\eta^0)) - \delta_0(\eta^0)]} -$$

$$- o\left(s^{2[\chi(P,\eta^0,\delta_0(\eta^0))-\delta_0(\eta^0)]}\right)\Big| .$$

Так как $l_j(\eta^0)$ — порядок нуля многочлена $P_j(\xi)$ в точке $\eta^0 \in \sum(P_0)$, вектор $a \in R_n$ можно выбрать так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} \Big| \sum_{j\in B(P,\eta^0,\delta^0(\eta^0))} \sum_{|\alpha|=l_j(\eta^0)-1} \frac{a^\alpha D^\alpha D_k P_j(\eta^0)}{\alpha!}\Big|^2 \neq 0.$$

Тогда с некоторой постоянной $c_3 > 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |D_k P_j(\xi^s)| \geqslant c_3\, s^{\chi(P,\eta^0,\delta_0(\eta^0))-\delta_0(\eta^0)}. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем для достаточно больших s

$$|(\xi^s)^{\nu^0}|\cdot A(\xi^s) > |(\xi^s)^{\nu^0}|\cdot \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{D_k P(\xi^s)}{P(\xi^s)}\right| \geqslant$$

$$\geqslant c_4 s^{|\nu^0|}\cdot \frac{s^{\chi(P,\eta^0,\delta^0(\eta^0))-\delta_0(\eta^0)}}{s^{\chi(P,\eta^0,\delta_0(\eta^0))}} = c_4\, s^{|\nu^0|-\delta_0(\eta^0)}.$$

Так как по предположению $|\nu^0| > \delta_0(\eta^0)$, то это противоречит условию $\nu^0 \in \mathfrak{M}(P)$ и доказывает соотношение $\mathfrak{M}(P) \subset B(\Delta(P))$.

Для доказательства обратного включения, докажем несколько вспомогательных предложений.

Предложение 4.1. *Пусть $P(\xi) \in \mathrm{P}(\lambda^0)$, тогда для каждой точки $\eta \in \sum(P_0)$*

$$\min_{0<\delta<1} |\chi(P,\eta,\delta(\eta)) - \chi(D_j P,\eta,\delta(\eta))| \geqslant \Delta(P),\quad j=1,\cdots,n. \tag{4.6}$$

Доказательство. Так как $\chi(D_j P,\eta,\delta) \leqslant \chi(P,\eta,\delta) - \delta$ для каждой точки $\eta \in \sum(P_0)$ и $j=1,\cdots,n$, то

$$\min_{\Delta(P)<\delta<1} |\chi(P,\eta,\delta) - \chi(D_j P,\eta,\delta)| \geqslant \min_{\Delta(P)<\delta<1} \delta \geqslant \Delta(P).$$

Остается показать, что при $j=1,\cdots,n$ и $\eta \in \sum(P_0)$

$$\min_{0<\delta<\Delta(P)} |\chi(P,\eta,\delta) - \chi(D_j P,\eta,\delta)| \geqslant \Delta(P).$$

По определению чисел $\Delta(P)$ и $\delta_0(\eta)$ имеем $d_k - l_k(\eta) + \delta l_k(\eta) \leqslant d^{I(\eta)}$, при $\delta \leqslant \delta_0(\eta)$, $k=0,\cdots,I(\eta)-1$; $d_k \leqslant d_{I(\eta)}-1$, $k=I(\eta)+1,\cdots,M$, где $l_k(\eta)$ — порядок нуля многочлена $P_k(\xi)$ в точке η. Так как $\chi(D_j P,\eta,\delta) \leqslant d_k - 1 - (l_k(\eta)-1) + \delta(l_k(\eta)-1) \leqslant d_k - l_k(\eta) + \Delta(P)(l_k(\eta)-1) \leqslant d_{I(\eta)} - \Delta(P)$, при $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta(P)$, $k=0,\cdots,I(\eta)-1$; $\chi(D_j P_{I(\eta)},\eta,\delta) \leqslant d_{I(\eta)}-1$, $\chi(D_j P_k,\eta,\delta) \leqslant d_k - l_k(\eta) + \delta(l_k(\eta)-1) \leqslant d_k \leqslant d_{I(\eta)}-1$, при $k=I(\eta)+1,\cdots,M$, $0\leqslant\delta<1$, то при $0\leqslant\delta\leqslant\Delta(P)$

$$\chi(D_j P,\eta,\delta) = \max_{0\leqslant k\leqslant m} \chi(D_j P_k,\eta,\delta) \leqslant d_{I(\eta)} - \Delta(P).$$

Но поскольку при $0\leqslant\delta\leqslant\Delta(P)$ $\chi(P,\eta,\delta) = d_{I(\eta)}$, то отсюда следует, что

$$\min_{0<\delta<\Delta(P)} |\chi(P,\eta,\delta) - \chi(D_j P,\eta,\delta)| \geqslant d_{I(\eta)} - [d_{I(\eta)} - \Delta(P)] = \Delta(P),$$

что доказывает предложение.

Предложение 4.2. *Пусть $P(\xi)\in \mathbf{P}(\lambda^0)$ и $\Delta(P)<1$. Тогда для любого числа ε: $0<\varepsilon<1-\Delta(P)$ существует число ρ: $0<\rho<1-\Delta(P)$ такое, что*

$$\min_{\substack{0<\delta<\Delta(P)-\varepsilon\\ \Delta(P)+\varepsilon<\delta<1}} \{\chi(P,\eta,\delta)-\chi(D_j P,\eta,\delta)\}\geqslant \Delta(P),\ \eta\in\sum(P_0),\ j,\cdots,n.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 4.1.

Предложение 4.3. *Пусть $P(\xi)\in\mathbf{P}(\lambda^0)$. Если $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ такая последовательность из R_n, что при $s\to\infty$ $\xi^s/|\xi^s|\to\eta\in\sum(P_0)$, то для некоторой постоянной $c>0$*

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{D_jP(\xi^s)}{P(\xi^s)}\right|\leqslant c|\xi^s|^{-\Delta(P)},\ s=1,2,\cdots.$$

Доказательство. Пусть наоборот, существует подпоследовательность $\{\xi^{s'}\}_{s'=1}^{\infty}$ последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ (не умаляя общности можно считать, что $\{\xi^{s'}\}_{s'=1}^{\infty}=\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$), для которой при $s\to\infty$

$$|\xi^s|^{\Delta(P)}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{D_jP(\xi^s)}{P(\xi^s)}\right|\to\infty. \tag{4.8}$$

В силу леммы 1.1 работы [11] существуют подпоследовательность $\{\xi^{s'}\}$ последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$), число δ_0, $0\leqslant\delta_0\leqslant 1$, $t_s>0$, $s=1,2,\cdots$, такие, что для любого $\varepsilon>0$

$$t_s|\xi^s|^{\varepsilon}\to\infty,\ t_s|\xi^s|^{-\varepsilon}\to 0$$

и

$$\frac{|r(\xi^s,\eta)|}{|\xi^s|^{k-1}}=t_s|\xi^s|^{\delta_0},\ s=1,2,\cdots, \tag{4.9}$$

где k — порядок нуля $\eta\in\sum(P_0)$ функции $r(\xi,\eta)$ (см. определение класса $\mathbf{P}(\lambda^0)$).

Из (4.8), предложения 4.2 и условия $P(\xi)\in\mathbf{P}(\lambda^0)$ следует, что $\delta_0=\Delta(P)$. Рассмотрим два следующих возможных случая:

1) существует подпоследовательность $\{t_{s'}\}_{s'=1}^{\infty}$ последовательности $\{t_s\}_{s=1}^{\infty}$, для которой

$$t_{s'}\leqslant\text{const}<\infty,\ s'=1,2,\cdots,$$

2) существует подпоследовательность $\{t_{s'}\}_{s'=1}^{\infty}$ последовательности $\{t_s\}_{s=1}^{\infty}$, для которой при $s'\to\infty$ $t_{s'}\to\infty$.

В первом случае в силу предложения 4.1 и условия $P\in\mathbf{P}(\lambda^0)$ имеем

$$\left|\frac{D_jP(\xi^{s'})}{P(\xi^{s'})}\right|\cdot|\xi^{s'}|^{\Delta(P)}\leqslant\text{const}\cdot\frac{|\xi^{s'}|^{\chi(D_jP,\eta,\delta_0)}}{|\xi^{s'}|^{\chi(P,\eta,\delta_0)}}\cdot|\xi^{s'}|^{\Delta(P)}\leqslant$$

$$\leqslant\text{const},\ s'=1,2,\cdots,\ j=1,2,\cdots,n.$$

Это противоречит (4.8).

Во втором случае, в силу условия $P\in\mathbf{P}(\lambda^0)$ и соотношения (4.9), имеем при $s\to\infty$

$$|\xi^{s'}|^{\Delta(P)}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{D_jP(\xi^{s'})}{P(\xi^{s'})}\right|\leqslant\text{const}\cdot\frac{|\xi^{s'}|\sum\limits_{k\in B(P,\eta,\delta_0)}t_s^{l_k(\eta)-1}}{|\xi^{s'}|^{dl(\eta)}\sum\limits_{k\in B(P,\eta,\delta)}t_s^{l_k(\eta)}}\to 0,$$

что также противоречит (4.8).

Лемма 4.1. *Пусть $P\in\mathbf{P}(\lambda^0)$, тогда для некоторой постоянной $c>0$*

$$\min\left(\inf_{\lambda\in\Lambda(N)}|\zeta_\lambda|,|\zeta|^{\Delta(P)}\right)\cdot A(\xi)\leqslant c,\ \xi\in R_n. \tag{4.10}$$

Доказательство. Пусть наоборот, при выполнении условий леммы существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ такая, что при $s\to\infty$ $\xi^s\to\infty$.

$$\inf_{\lambda\in\Lambda(N)}|\xi^s|_\lambda\cdot A(\xi)\to\infty, \tag{4.11}$$

$$|\xi^s|^{\Delta(P)}\cdot A(\xi)\to\infty. \tag{4.12}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\xi_j^s>0$, $j=1,\cdots,n$, $s=1,2,\cdots$. Положим

$$\rho_s=\exp\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\ln\xi_j^s)^2};\ \lambda_j^s=\ln\xi_j^s/\ln\rho_s,\ j=1,\cdots,n;\ s=1,2,\cdots,$$

тогда

$$\xi^s=\rho_s^{\lambda^s}\ (\xi_j^s=\rho_s^{\lambda_j^s},\ j=1,\cdots,n),\ s=1,2,\cdots.$$

Для многочлена $P(\xi^s)$ получим представление (2.6), поступая так же, как при доказательстве леммы 2.1. При этом, возможны два случая:

а) $P^{j_r,q_r}(\eta)\neq 0$, б) $P_{j_r,q_r}(\eta)=0$.

Рассуждая так, как это делается в [3] или [7], легко доказать, что в случае а)

$$\inf_{\lambda\in\Lambda^{n-1}(N)}|\xi^s|_\lambda\cdot A(\xi^s)=\text{const}<\infty,\ s=1,2,\cdots.$$

Это противоречит (4.11).

В силу б) имеем, что $r=m=1$, $q_r=n-1$, $e^1=t\lambda^0\ (t\in R_1)$, при этом при $s\to\infty$

$$|\xi^s|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\rho_s^{\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_i^s t_i^j}\right)^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\rho_s^{2\chi_1^s t}}\,(1+\tilde{o}(1))=$$

$$=\sqrt{n}\,\rho_s^{\chi_1^s\cdot t}\,(1+\tilde{o}(1));\ \xi^s/|\xi^s|\to\eta/\sqrt{n}=\tau\in\Sigma(P_0).$$

Применяя предложение 4.3, отсюда получим, что для некоторой постоянной $c>0$

$$A(\xi)\cdot|\xi|^{\Delta(P)}\leqslant c,\ s=1,2,\cdots.$$

Это противоречит (4.12) и доказывает справедливость неравенства (4.10), а вместе с тем и лемму 4.1.

Поскольку для любого $\lambda \in \Lambda(\mathrm{N})$ и $\nu \in R_n^+$

$$|\xi^\nu| \leqslant c\,|\xi|_\lambda^{(\nu,\lambda)},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от λ, то теорема 4.1 следует из леммы 4.1.

Пример. Пусть $n=2$, $P(\xi)=\xi_2^8+\xi_1^6(\xi_1-\xi_2)^6+\xi_1^8\cdot\xi_2^2+1$. Х. м. $\mathrm{N}(P)$ полинома $P(\xi)$ в. п. четырехугольник в Z_2^+ с вершинами (0, 0); (12, 0); (6, 6); (0, 8). Главными гранями (сторонами) здесь будут стороны: N_1^1, соединяющая точки (0, 8) и (6, 6), N_2^1, соединяющая точки (6, 6) и (12, 0). Остальные две стороны не являются главными. Поэтому главными вершинами будут $e^1=(0, 8)$; $e^2=(6, 6)$ и $e^3=(12, 0)$. Регулярность всех главных граней х. м. $\mathrm{N}(P)$, кроме грани N_2^1, очевидна. Внешние нормали граней N_1^1 и N_2^1 из множества $\Lambda^1(\mathrm{N})$ будут $\lambda^1=(1, 3)$ и $\lambda^2=(1, 1)$.

Как следует из теоремы 2 работы [7] многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен, при этом если многочлен представить в виде (4.1) по вектору

$$\lambda^2=(1, 1), \text{ то } P_0(\xi)=\xi_1^6(\xi_1-\xi_2)^6,\ d_0=12,\ d_1=10,$$

$$\eta=(t, t)\in\Sigma(P_0),\ t\in R_1 \text{ и } l_0(\eta)=6.$$

Так как, очевидно, $P\in\mathbf{P}(\lambda^0)$, то по теореме 4.1

$$\mathfrak{M}(P)=B(\Delta(P))=\{\nu;\ \nu\in R_2^+;\ \nu_1+3\nu_2\leqslant 1;\ \nu_1+\nu_2\leqslant\Delta(P)\},$$

где

$$\Delta(P)=\inf_{\eta\in\Sigma(P)}\delta_0(\eta)=\inf_{\eta\in\Sigma(P_0)}\frac{d_1-(d_0-l_0(\eta))}{l_0(\eta)}=\frac{2}{3}.$$

Весом гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)$ является функция

$$h(\xi)=|\xi_1|^{2/3}+|\xi_2|^{1/3}+|\xi_1|^{1/2}\cdot|\xi_2|^{1/6}.$$

По теореме 3.1 для $\nu=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)\in\mathfrak{M}(P)$ и для произвольного компакта $K\subset R_n$ существует постоянная $c=c(K)>0$ такая, что для любого натурального j

$$\sup_{x\in K}|D_1^{3j}D_2^j u(x)|\leqslant c^j(K)\,j^{6\cdot j}. \tag{4.13}$$

С другой стороны, если применить теорему 4.4.6 работы [1], то существует постоянная $c_1(K)$ такая, что

$$\sup_{x\in K}|D_1^{3j}D_2^j u(x)|\leqslant c_1^j(3j)^{3\cdot\frac{3}{2}j}\,j^{3j}=c_2^j(K)\,j^{7,5\cdot j}. \tag{4.14}$$

Сравнение полученных неравенств (4.13), (4.14) показывает, что на самом деле решения уравнения $P(D)\,u=0$ имеют лучшие свойства гладкости (в смысле принадлежности пространствам Жевре), чем это следовало из теоремы 4.4.6 работы [1].

Ереванский государственный
университет

Поступила 11. IV. 1985

Գ. Հ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ. Որոշ դասի հիպոէլիպտիկ հավասարումների լուծումների ածանցյալների գնահատականների մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում տրված են բավականաչափ լայն դասի հիպոէլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների ածանցյալների ճշգրիտ գնահատականներ։

Ապացուցված է, որ լուծումների ողորկությունը որոշվում է ուսումնասիրվող օպերատորի հիպոէլիպտիկության կշռի միջոցով, որը բացահայտ տեսքով գտնված է։

G. H. HAKOPIAN. *Some estimates for derivatives of the solutions of a class of hypoelliptic equation* (summary)

Exact estimates of the derivatives of the solutions of a broad class of hypoelliptic equations are given.

It is proved that the smoothness of the solution depends on the weight of the operator.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.
2. *С. М. Никольский.* Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения, ДАН СССР, 146, № 4, 1962, 767—769.
3. *В. П. Михайлов.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН им. Стеклова АН СССР, № 91, 1967, 59—81.
4. *Г. Г. Казарян.* О функциональном показателе гипоэллиптичности, Матем. сб., 128 (170), 3 (11), 1985, 339—353.
5. *B. Pini.* Osservazoni sulla ipoelliptica. Boll. Un. Mat. Ital., (3), 18, 1963, 420—432.
6. *Г. Г. Казарян.* О гипоэллиптических полиномах, ДАН СССР, 214, № 5, 1974, 1016—1019.
7. *Г. Г. Казарян.* Об одном семействе гипоэллиптических полиномов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 3, 1974, 189—211.
8. *В. Н. Маргарян.* Добавление младших членов, сохраняющих гипоэллиптичность оператора, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XV, № 6, 1980, 443—460.
9. *В. Н. Маргарян, Г. О. Акопян.* О весе гипоэллиптичности многочленов, Межвузовский сб., Минвуза Арм.ССР, «Математика», № 4, 1986.
10. *L. Cattabriga.* Sur una classi di polinomi ipoelliptici, Rend. Sem. Mat. Univ. di Radova, 36, 1966.
11. *С. Ж. Айрапетян, В. Н. Маргарян.* Гипоэллиптичность многочленов с комплексными коэффициентами, Межвузовский сб., Минвуз Арм.ССР. «Математика», № 4, 1986.