ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXI, № 4, 1986 Математика

УДК 517.537

А. А. ДАНИЕЛЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫХ ПОЛИНОМОВ НА КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

n°1. Введение. В работах [1], [2], [5] рассматривается задача о представлении функции $f(z)$, определенной на единичной окружности в виде предела равномерно ограниченной на окружности последовательности полиномов.

В [1] М. В. Келдыш указал достаточное условие на функцию, при котором имеет место отмеченное представление. Некоторые дополнения к теореме М. В. Келдыша были даны в работе [2] С. Н. Мергеляна и А. А. Талаляна. Полное решение этой задачи было получено С. В. Колесниковым [5], который доказал, что для упомянутой представимости $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была ограниченной, принадлежала первому классу Бэра и существовала ограниченная аналитическая функция в единичном круге, угловые граничные значения которой совпадали бы с $f(z)$ почти всюду на единичной окружности. Таким образом, очевидные необходимые условия являются также достаточными.

Мы будем рассматривать аналогичные задачи, где вместо единичного круга взято произвольное компактное множество комплексной плоскости.

Сначала будем характеризовать все те функции, определенные на границе ∂E компактного множества E со связным дополнением, каждая из которых допускает точечное приближение с помощью равномерно ограниченной на E последовательностью полиномов (теоремы 1 и 2). Здесь используются результаты работ [3], [4] и некоторые рассуждения из [5].

Далее, рассматривается более общая задача, которая заключается в следующим. Пусть K — компактное множество и F его замкнутое подмножество (оно может, в частности, совпадать с K). Требуется описать те функции, определенные на F, каждая из которых на F является пределом равномерно ограниченной на K последовательности полиномов (теорема 4). Фактически мы докажем более общее предложение (теорема 3), из которого также следуют одна теорема Рубеля и Шилдса [6] и некоторое ее дополнение (теоремы 5 и 6).

n°2. Пусть E — компактное множество на комплексной плоскости со связным дополнением. Множество E° внутренних точек E состоит из объединения счетного числа односвязных областей D_n: $E^0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$.

Пусть $f(z)$ — ограниченная функция, определенная на границе ∂E множества E и функция $z = \psi_n(w)$ конформно отображает единичный круг

U на область D_n $(n = 1, 2, \ldots)$. $\psi_n(w)$ — ограниченная аналитическая функция и, следовательно, почти всюду на единичной окружности ∂U она имеет угловые граничные значения, каждое из которых является достижимой граничной точкой для области D_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, можем доопределить функцию $\psi_n(w)$ также почти всюду на окружности ∂U и рассмотреть функцию $f(\psi_n(w))$ $(n = 1, 2, \ldots)$, которая определена почти всюду на ∂U.

Учитывая, что дополнение к E связно, нетрудно видеть, что две различные компоненты D_n и D_m множества E° могут иметь не более одной общей граничной достижимой точки (доказательство более общего утверждения см. в [7], гл. VI, лемма 4.1).

Определение. Пусть $\Phi(z)$ — ограниченная аналитическая функция на множестве E°. Скажем, что $f(z)$ почти всюду на ∂E совпадает с граничными значениями функции $\Phi(z)$ в смысле конформного отображения, если угловые граничные значения функции $\Phi(\psi_n(w))$ почти всюду на единичной окружности совпадают с функцией $f(\psi_n(w))$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Аналогично, скажем, что последовательность определенных на ∂E функций $\{q_m(z)\}$ сходится к $f(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения, если функции $q_m(\psi_n(w))$, $m = 1, 2, \cdots$, определенные почти всюду на единичной окружности, сходятся к функции $f(\psi_n(w))$ $(n = 1, 2, \cdots)$ почти всюду на той же окружности.

Ниже встречающиеся все меры μ являются конечными комплексными борелевскими мерами, каждая из которых определена на некотором компактном подмножестве комплексной плоскости.

Нам нужны следующие определения (см. [4]).

1. Компактное множество C комплексной плоскости назовем сбалансированным, если граница B множества C совпадает с границей неограниченной компоненты дополнения C относительно комплексной плоскости. Открытое множество G комплексной плоскости будем называть сбалансированным, если G ограничено, замыкание C множества G сбалансированно и G служит внутренностью C.

2. Пусть C — компактное сбалансированное множество в комплексной плоскости. Через $M(C)$ обозначается класс всех мер μ на границе B множества C, таких, что

$$\int (t - z)^{-1}\, d\mu(t) = 0$$

для всех z вне C. Если G—открытое сбалансированное множество с замыканием C, то по определению $M(G) = M(C)$.

Из определения следует, что $\int f d\mu = 0$, если $\mu \in M(C)$ и f аналитична в некоторой окрестности C.

3. Пусть G — односвязное открытое множество в комплексной плоскости. Мы назовем последовательность $\{\gamma_i\}$ определяющей границу G, если (I) каждое γ_i есть объединение конечного числа непересекающихся спрямляемых простых замкнутых кривых, лежащих в G, никакие два из которых не принадлежат одной и той же компоненте G, и (II) произвольное ком-

пактное подмножество $S \subset G$ для всех достаточно больших i лежит в объединении ограниченных компонент дополнения γ_i относительно комплексной плоскости.

Аналитический дифференциал $d\omega$ на открытом множестве G комплексной плоскости означает комплексный дифференциал первого рода на G вида $d\omega = f(z)dz$, где $f(z)$ — аналитическая функция на G.

4. Пусть G — ограниченное односвязное открытое множество комплексной плоскости. Обозначим через $H(G)$ класс всех аналитических дифференциалов $d\omega$ на G, для которых существует последовательность $\{\gamma_i\}$ компактных подмножеств G, определяющая границу G, и положительное число K, такие, что

$$\int_{\gamma_i} |d\omega| < K$$

для всех значений i. Если $d\omega \in H(G)$, то $\|d\omega\|$ обозначает нижнюю грань всех таких чисел K. Если G связно, то очевидно, что класс $H(G)$ конформно инвариантен. Это означает, что если φ есть взаимно однозначное конформное отображение G на V, то $H(V)$ состоит из всех дифференциалов вида $\varphi(d\omega)$, $d\omega \in H(G)$. Очевидно также, что тогда $\|d\omega\| = \|\varphi(d\omega)\|$.

5. Пусть G-ограниченное односвязное открытое множество в комплексной плоскости, и пусть B—граница G. Говорят, что мера μ есть граничная мера дифференциала $d\omega$ из $H(G)$, если последовательность $\{\gamma_i\}$ из определения 4 может быть выбрана так, чтобы выполнялось дополнительное требование:

$$\int_{\gamma_i} h\,d\omega \to \int h\,d\mu$$

когда $i \to \infty$, для всех непрерывных функций h на $G \cup B$.

Замечание 1. Легко видеть, что понятие открытого сбалансированного множества G из определения 1 совпадает с понятием открытого множества Каратеодори (при связном G—области Каратеодори), которое часто встречается в литературе.

Отметим, что при компактном множестве E со связным дополнением класс $M(E)$ из определения 2 совпадает с классом всех мер μ на ∂E, которые ортогональны всем полиномам.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть E—компактное множество на комплексной плоскости со связным дополнением, $f(z)$—ограниченная функция, определенная на ∂E, $\{q_m(z)\}$ — последовательность непрерывных на ∂E функций, которая сходится к $f(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения. Для того, чтобы существовала равномерно ограниченная на E последовательность полиномов $\{P_m(z)\}$, сходящаяся к $f(z)$ во всех точках z, в которых $\{q_m(z)\}$ сходится к $f(z)$ (и в частности почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения), необходимо и достаточно, чтобы на E^0 существовала ограниченная аналитическая функция $\Phi(z)$, граничные значения которой совпадали бы с функцией $f(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения.*

Доказательство необходимости почти очевидно. Действительно, так как $P_m(z)$ сходится к $f(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения, то при любом $n(n=1, 2, \cdots)$ $P_m(\psi_n(w))$ сходится к $f(\psi_n(w))$ почти всюду на окружности ∂U, и учитывая равномерную ограниченность последовательности аналитических в круге U функций $P_m(\psi_n(w))$ $(m=1, 2, \cdots)$, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим равенства

$$\int_{|w|=1} f(\psi_n(w))\, w^k\, dw = 0, \quad k=0, 1, 2, \cdots,$$

откуда следует, что существует ограниченная аналитическая функция $\Phi_n(w)$ в круге U, граничные значения которой почти всюду на единичной окружности совпадают с функцией $f(\psi_n(w))$. Полагая $\Phi(z) = \Phi_n(\psi_n^{-1}(z))$, $z \in D_n$ $(n=1, 2, \cdots)$, на множестве E^0 будем иметь желаемую функцию ($\psi_n^{-1}(z)$ — обратная функции $\psi_n(w)$).

Прежде чем перейти к доказательству достаточности, заметим, что, без нарушения общности, можем считать последовательность $\{q_m(z)\}$ непрерывных функций равномерно ограниченной на ∂E.

Доказательство достаточности состоит из нескольких пунктов.

1) Пусть D_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — компонента множества E°. Покажем, что

$$\lim_{m\to\infty} \int q_m\, d\mu = 0 \quad \text{при всех } \mu \in M(D_n). \tag{1}$$

По теореме 3 из [4] существует взаимно однозначное соответствие между классом $M(D_n)$ и классом $H(D_n)$ аналитических дифференциалов, которое получается соотнесением любому аналитическому дифференциалу $d\omega = g(z)\, dz \in H(D_n)$ своей граничной меры $\mu \in M(D_n)$.

Как отмечено выше класс $H(D_n)$ конформно инвариантен. Поэтому при конформном отображении $\psi_n(w)$ единичного круга U на область D_n класс $H(U)$ состоит из всех аналитических дифференциалов вида $g(\psi_n(w))\, d\psi_n(w)$, где $g(z)\, dz$ — аналитический дифференциал из $H(D_n)$. Значит существует взаимно однозначное соответствие между классами мер $M(D_n)$ и $M(U)$, которое получается соотнесением мере $\mu \in M(D_n)$ граничной меры $\nu \in M(U)$ аналитического дифференциала $g(\psi_n(w))\, d\psi_n(w) \in H(U)$, где $g(z)\, dz \in H(D_n)$ — аналитический дифференциал, граничной мерой которого является μ.

Для таких мер $\mu \in M(D_n)$ и $\nu \in M(U)$, по теореме 4 из [3] имеем

$$\int q_m(z)\, d\mu(z) = \int_{|w|=1} q_m(\psi_n(w))\, d\nu(w). \tag{2}$$

Эта теорема сформулирована для таких сбалансированных областей, дополнение замыкания которых также связно. Но как отмечено в [4] (в доказательстве леммы 9), она верна и без последней оговорки. Так что мы можем применить ее для области D_n.

Так как $\nu \in M(U)$, то по теореме Ф. и М. Риссов

$$\int_{|w|=1} q_m(\psi_n(w))\, d\nu(w) = \int_{|w|=1} q_m(\psi_n(w))\, F(w)\, dw,$$

где $F(w)$ — граничная функция некоторой функции из класса H^1. По условию теоремы почти всюду на окружности ∂U равномерно ограниченная последовательность функций $q_m(\psi_n(w))$ $(m=1, 2, \cdots)$, сходится к $f(\psi_n(w))$, которая является граничной функцией для ограниченной аналитической функции $\Phi(\psi_n(w))$. Следовательно, последний интеграл стремится к нулю при $m \to \infty$.

Таким образом, учитывая (2), получаем соотношение (1).

2) Замечая очевидные соотношения $M(D_n) \subset M(E)$ $(n=1, 2, \cdots)$, докажем следующее: если $\mu \in M(E)$, то существуют меры $\mu_n \in M(D_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$, для которых выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \mu - \sum_{n=1}^{k} \mu_n \right\| = 0. \tag{3}$$

На множестве E^0 определим аналитический дифференциал $d\omega = g(z)\, dz$, где

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu(t)}{t-z}, \quad z \in E^0.$$

Его сужение на D_n обозначим через $d\omega_n$: $d\omega_n = g(z)\, dz$, $z \in D_n$. По теореме 2 из работы [4] $d\omega_n \in H(D_n)$. Если μ_n — граничная мера дифференциала $d\omega_n$, то по теореме 1 из [4] $\mu_n \in M(D_n)$ и

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu_n(t)}{t-z}, \quad z \in D_n.$$

Так как мера $\mu - \sum_{n=1}^{k} \mu_n \in M(E)$ $(k=1, 2, \cdots)$, то по теореме 3 из [4] она является граничной мерой аналитического дифференциала $g_k(z)\, dz \in H(E^0)$, где

$$g_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\left(\mu - \sum_{n=1}^{k} \mu_n\right)}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu(t)}{t-z} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{k} \int \frac{d\mu_n(t)}{t-z} = \begin{cases} 0; & z \in D_n,\ n \leqslant k \\ g(z); & z \in D_n,\ n > k, \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\left\| \mu - \sum_{n=1}^{k} \mu_n \right\| = \| g_k(z)\, dz \|. \tag{4}$$

Так как $g_k(z)\, dz = g(z)\, dz = d\omega_n$, при $z \in D_n$, $n > k$, и, как показано в доказательстве теоремы 3 из [4],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| d\omega_n \| \leqslant \| \mu \|,$$

то согласно лемме 6 из [4]

$$\|g_k(z)\,dz\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \|d\omega_n\|.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$, и с учетом равенства (4), соотношение (3) доказано.

3) Покажем, что

$$\lim_{m \to \infty} \int q_m\, d\mu = 0, \text{ при всех } \mu \in M(E). \tag{5}$$

Возьмем $\mu \in M(E)$ и пусть $\mu_n \in M(D_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ — меры, для которых справедливо соотношение (3).

Имеем

$$\left| \int q_m\, d\mu - \sum_{n=1}^{k} \int q_m\, d\mu_n \right| \leqslant \max_{\partial E} |q_m(z)| \cdot \left\| \mu - \sum_{n=1}^{k} \mu_n \right\|,$$

и по (3) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int q_m\, d\mu_n = \int q_m\, d\mu$$

сходится к своей сумме равномерно относительно m. Следовательно

$$\lim_{m \to \infty} \int q_m\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \to \infty} \int q_m\, d\mu_n.$$

Так как $\mu_n \in M(D_n)$, то согласно (1) все слагаемые последней суммы равны нулю, откуда следует соотношение (5).

4) Завершим доказательство теоремы.

Пусть C—пространство всех непрерывных функций на ∂E, A — пространство всех тех непрерывных на ∂E функций, которые непрерывно и аналитично продолжаются на множество E^0. Если φ — непрерывный линейный функционал на фактор-пространстве C/A, то

$$\varphi(q + A) = \int q\, d\mu,$$

где $q + A$ — элемент пространства C/A, т. е. $q + A = \{q + u : u \in A\}$, $q \in C$, а μ — мера на ∂E, ортогональная ко всем функциям из класса A, т. е. $\mu \in M(E)$. Следовательно, по соотношению (5) имеем

$$\lim_{m \to \infty} \varphi(q_m + A) = 0,$$

т. е. последовательность $\{q_m + A\}$ слабо сходится к нулю в пространстве C/A.

Проведем рассуждения, аналогичные сделанным в [5]. Слабая сходимость $\{q_m + A\}$ к нулю по известной теореме (см. [8], стр. 173), обеспечивает существование некоторой последовательности конечных линейных выпуклых комбинаций его элементов, которая сходится к нулю по норме фактор-пространства C/A. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация

$$\sum_{m=1}^{k} \lambda_m (q_m + A) = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m q_m + A, \quad \sum_{m=1}^{k} \lambda_m = 1, \quad \lambda_m \geqslant 0,$$

такая, что ее фактор-норма меньше чем ε. Следовательно, по определению фактор-нормы, существует функция $u(z) \in A$, такая, что

$$\max_{\partial E} \left| \sum_{m=1}^{k} \lambda_m q_m(z) - u(z) \right| < \varepsilon.$$

Применив сказанное к последовательности $q_m(z)$, $q_{m+1}(z), \cdots$, и взяв $\varepsilon = \frac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \cdots)$, получим функцию $u_m(z) \in A$. Легко видеть, что последовательность функций $\{u_m(z)\}$ равномерно ограничена на ∂E и сходится к $f(z)$ во всех точках z, где $\{q_m(z)\}$ сходится к $f(z)$.

Так как дополнение множества E связно, то по теореме С. Н. Мергеляна о равномерных полиномиальных приближениях, последовательность $\{u_m(z)\}$ можем заменить последовательностью полиномов $\{P_m(z)\}$, которая имеет сформулированные в теореме свойства.

Теорема доказана.
зультатах [4].

Замечание 2. В [3] Бишоп отмечает, что в его работе [4] будет получено соотношение (3). Но в [4] в явном виде это соотношение не имеется. Так как (3) при доказательстве теоремы 1 существенно используется, то мы приводим его полное доказательство, основанное именно на ре-

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает следующий результат, который показывает какие функции, определенные на ∂E, могут быть представлены в виде точечного предела равномерно ограниченных полиномов.

Теорема 2. *Пусть E—компактное множество на комплексной плоскости со связным дополнением, $f(z)$—ограниченная функция первого класса Бэра, определенная на ∂E. Для того, чтобы на ∂E $f(z)$ являлась точечным пределом равномерно ограниченной на E последовательности полиномов, необходимо и достаточно, чтобы на E° существовала ограниченная аналитическая функция, граничные значения которой почти всюду на ∂E совпадали бы с функцией $f(z)$ в смысле конформного отображения.*

Замечание 3. Если существует последовательность непрерывных функций $\{q_m(z)\}$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, для которой имеют место также неравенства

$$\max_{\partial E} |q_m(z)| \leqslant M + \varepsilon_m,$$

где $M > 0$ и $\varepsilon_m \to 0$, то последовательность полиномов, существование которой утверждает теорема 1, можно сделать равномерно ограниченной на ∂E числом M.

Действительно, не теряя общности можем считать, что числа ε_m стремятся к нулю монотонно. Тогда очевидно, что функции $u_m(z)$, полученные в доказательстве теоремы 1, удовлетворяют неравенствам

$$\max_{\partial E} |u_m(z)| < M + \varepsilon_m + \frac{1}{m}.$$

Нетрудно видеть, что в качестве желаемой последовательности можно взять $\{Q_m(z)\}$,

$$Q_m(z)=\frac{M}{M+\varepsilon_m+\frac{2}{m}}P_m(z),$$

где полином $P\quad (z)$ удовлетворяет условию

$$|u_m(z)-P_m(z)|<\frac{1}{m},\ z\in\partial E.$$

п°. 3. Пусть E, D_n, U, $\psi_n(w)$ — те же, что и в предыдущем пункте. Напомним, что функцию $\psi_n(w)$ можно доопределить на некотором подмножестве S_n полной меры единичной окружности. Очевидно, $\psi_n(w)$ — борелевская функция на S_n и точки множества $\psi_n(S_n)$ являются достижимыми граничными точками для D_n.

Повторяя схему рассуждений, проведенных в лемме 4.2 гл. VI [7], нетрудно убедиться, что $\psi_n(w)$ — взаимно однозначная функция на множестве S_n.

Пусть H_n — замкнутое множество на границе области D_n: $H_n\subset\partial D_n$. Обозначим

$$L_n=\{w\in S_n:\psi_n(w)\in H_n\}\tag{6}$$

и покажем, что L_n — измеримое (по Лебегу) множество на единичной окружности ∂U.

Действительно, по теореме Лузина существуют замкнутые множества $F_k\subset S_n$ $(k=1,2,\cdots)$ такие, что $m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k)=2\pi$ (m — мера Лебега) и на каждом F_k сужение функции $\psi_n(w)$ непрерывно, следовательно $\psi_n(F_k)$ — замкнутое множество. Так как $\psi_n(w)$ — взаимно однозначное отображение множеств F_k и $\psi_n(F_k)$, то обратная функция $\psi_n^{-1}(z)$ непрерывна на множестве $\psi_n(F_k)$ $(k=1,2,\cdots)$. Обозначая для краткости

$$C_n=\psi_n^{-1}\left(\psi_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right)\cap H_n\right)$$

и вынося знак обьединения из скобок, получим, что C_n — множество типа F_σ на единичной окружности. Отсюда, учитывая легко проверяемые соотношения $C_n\subset L_n$, $L_n\setminus C_n\subset S_n\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$ и то, что $S_n\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$ — множество меры нуль, получаем наше утверждение.

Определение. Пусть H — замкнутое подмножество на ∂E, $H_n=\partial D_n\cap H$ и L_n определена с помощью H_n как в (6). Пусть $\varphi(z)$ — ограниченная функция на H, $\Phi(z)$ — ограниченная аналитическая функция на E°. Скажем, что $\varphi(z)$ почти всюду на H совпадает с граничными значениями функции $\Phi(z)$ в смысле конформного отображения, если угловые граничные значения функции $\Phi(\psi_n(w))$, $|w|<1$, почти всюду на множестве L_n совпадают с функцией $\varphi(\psi_n(w))$ $(n=1,2,\cdots)$.

Пусть теперь K — произвольное компактное множество на комплексной плоскости. Обозначим через E дополнение относительно комплексной плоскости той смежной с K области, которая содержит точку ∞. Пусть H — замкнутое подмножество на ∂E, B — произвольное множество, такое, что $B\subset K\setminus\partial E$.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(z)$ — ограниченная функция, определенная на множестве $H \cup B$, сужение которой на H принадлежит первому классу Бэра. Для того, чтобы на K существовала равномерно ограниченная последовательность полиномов $\{P_k(z)\}$, которая на множестве $H \cup B$ сходится к функции $\varphi(z)$, необходимо и достаточно, чтобы на E° существовала ограниченная аналитическая функция $f(z)$, такая, что 1) $f(z)=\varphi(z)$ при $z \in B$; 2) $\varphi(z)$ почти всюду на H совпадает с граничными значениями функции $f(z)$ в смысле конформного отображения.*

Доказательство. Необходимость. Так как $\{P_k(z)\}$ равномерно ограничена на ∂E, то существует ее подпоследовательность $\{P_{k_m}(z)\}$, которая сходится к ограниченной и аналитической в E° функции $f(z)$. Выполнение условия 1) очевидно.

Равномерно ограниченные аналитические в круге U функции $P_{k_m}(\psi_n(w))$, $m=1, 2, \cdots$ сходятся к $f(\psi_n(w))$, а их граничные значения на множестве L_n сходятся к функции $\varphi(\psi_n(w))$ $(n=1, 2, \cdots)$. Следовательно, по теореме Хинчина—Островекого граничные значения аналитической функции $f(\psi_n(w))$ почти всюду на множестве L_n совпадают с функцией $\varphi(\psi_n(w))$ $(n=1, 2, \cdots)$, т. е. имеет место условие 2).

Достаточность. Пусть S_n — множество, о котором шла речь в начале настоящего пункта. Обозначим через Q_n множество тех точек окружности ∂U, в которых аналитическая и ограниченная в единичном круге функция $f(\psi_n(w))$ имеет угловые граничные значения, и пусть $R_n=S_n \cap Q_n$ $(n=1, 2, \cdots)$. R_n — борелевское множество полной меры на единичной окружности ∂U. Функцию, определяемую граничными значениями функции $f(\psi_n(w))$, на множестве R_n будем обозначать через $h_n(w)$.

Определим функцию $f(z)$ также в точках множества $\psi_n(R_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$. Если $z_0 \in \psi_n(R_n)$, то существует точка $w_0 \in R_n$ такая, что $\psi_n(w_0)=z_0$. Тот радиус единичного круга, который кончается в точке w_0, обозначим через r. Очевидно, что $\psi_n(r)$ — жорданова кривая, которая определяет достижимую граничную точку z_0 области D_n. Когда точка z по кривей $\psi_n(r)$ стремится к z_0, функция $f(z)$ имеет предел, равный $h_n(w_0)$, который и будем считать значением функции $f(z)$ в точке z_0. Следовательно, при $z \in \psi_n(R_n)$,

$$f(z)=h_n(w), \text{ где } w=\psi_n^{-1}(z). \tag{7}$$

Имея в виду, что две различные компоненты множества E° могут иметь не более одной общей граничной достижимой точки (см. п.° 2), можем утверждать, что определенная таким образом граничная функция $f(z)$ теряет свою однозначность не более чем в счетном числе точек. Удалив из R_n соответствующие им при конформном отображении $z=\psi_n(w)$ точки, обеспечим однозначность функции $f(z)$ на множестве $\psi_n(R_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$, причем, как и прежде, R_n остается борелевским множеством полной меры.

Пусть M_n — дополнение множества L_n на единичной окружности. Множество $R_n \cap M_n$ измеримо и $\psi_n(w)$, $h_n(w)$ — измеримые на нем функции. Очевидно также, что $m(R_n \cap M_n) = m(M_n)$.

По теореме Лузина можем получить такую последовательность $T_k^{(n)}$, $k=1, 2,\cdots$ замкнутых подмножеств множества $R_n \cap M_n$, что сужения функций $\psi_n(w)$ и $h_n(w)$ на $T_k^{(n)}$ непрерывны и $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T_k^{(n)}\right) = m(M_n)$.

Можем считать, что $T_{k-1}^{(n)} \subset T_k^{(n)}$; в противном случае множество $T_k^{(n)}$ заменили бы множеством $\bigcup\limits_{m=1}^{k} T_m^{(n)}$. Так как $z = \psi_n(w)$ — непрерывное на $T_k^{(n)}$ и взаимно однозначное отображение между множествами $T_k^{(n)}$ и $\psi_n(T_k^{(n)})$, то обратная функция $w = \psi_n^{-1}(z)$ непрерывна на $\psi_n(T_k^{(n)})$ $(k=1, 2,\cdots)$.

Из соотношения (7) получаем, что $f(z) = h_n(\psi_n^{-1}(z))$ при $z \in \psi_n(R_n)$. Суперпозиция функций $w = \psi_n^{-1}(z)$ и $h_n(w)$ непрерывных соответственно на множествах $\psi_n(T_k^{(n)})$ и $T_k^{(n)}$ непрерывна на $\psi_n(T_k^{(n)})$. Таким образом, сужение функции $f(z)$ на замкнутом множестве $\psi_n(T_k^{(n)})$ $(k=1, 2,\cdots)$ — функция непрерывная.

По условию теоремы существует равномерно ограниченная последовательность $\{\varphi_m(z)\}$ непрерывных на H функций, которая сходится к $\varphi(z)$ на H. Замечая, что замкнутые множества H, $\psi_n(T_{m-n+1}^{(n)})$, $n=1, 2,\cdots, m$, попарно не пересекаются, определим непрерывную функцию $f_m(z)$ на множестве $H \cup \bigcup\limits_{n=1}^{m} \psi_n(T_{m-n+1}^{(n)}) \subset \partial E$, полагая ее значения равными $\varphi_m(z)$ на H и $f(z)$ — на $\bigcup\limits_{n=1}^{m} \psi_n(T_{m-n+1}^{(n)})$. Эти функции $f_m(z)$ определены на разных замкнутых подмножествах множества ∂E но очевидно, что все они ограничены одной и той же константой. Следовательно, можно построить равномерно ограниченную на ∂E последовательность $\{g_m(z)\}$ непрерывных функций, такую, что $g_m(z)$ является непрерывным продолжением функции $f_m(z)$ на множестве ∂E.

Пусть $g(z)$ — ограниченная функция на ∂E, определенная следующим образом: $g(z) = \varphi(z)$, при $z \in H$, $g(z) = f(z)$, при $z \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{m} \psi_n(T_{m-n+1}^{(n)})$, $g(z) = 0$, при остальных z из множества ∂E.

Из конструкции множеств $T_k^{(n)}$, с учетом соотношения (7) и условия 2) теоремы, следует, что функция $g(z)$ почти всюду на ∂E совпадает с граничными значениями ограниченной и аналитической функции $f(z)$ в смысле конформного отображения.

Так как $T_{k-1}^{(n)} \subset T_k^{(n)}$, то $\psi_n(T_{k-1}^{(n)}) \subset \psi_n(T_k^{(n)})$. Откуда, учитывая построение последовательности $\{g_m(z)\}$, легко видеть, что она сходится к функции $g(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения, при этом на множестве H $\{g_m(z)\}$ всюду сходится к функции $g(z) = \varphi(z)$.

Таким образом, для ограниченной функции $g(z)$, определенной на ∂E, удовлетворены все условия теоремы 1, и согласно ей существует равномерно ограниченная на E последовательность полиномов $\{P_m(z)\}$, которая сходится к функции $g(z)$ во всех точках $z\in\partial E$, где $\{g_m(z)\}$ сходится к $g(z)$. В частности, на множестве $H\{P_m(z)\}$ всюду сходится к функции $g(z)=\varphi(z)$.

Покажем, что $\{P_m(z)\}$ сходится к функции $\varphi(z)$ и на множестве B, чем будет завершено доказательство теоремы. По условию 1) теоремы для этого достаточно показать, что $\{P_m(z)\}$ сходится к функции $f(z)$ при $z\in E^\circ$. Последнее будет установлено, если убедимся, что при $m\to\infty$ последовательность $\{P_m(\psi_n(w))\}$ сходится к функции $f(\psi_n(w))$ в круге $|w|<1$ $(n=1, 2,\cdots)$.

Последовательность $\{P_m(z)\}$ сходится к функции $g(z)$ почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения, а как было отмечено выше, $g(z)$ почти всюду на ∂E в том же смысле совпадает с граничными значениями функции $f(z)$. Это означает, что равномерно ограниченные функции $P_m(\psi_n(w))$, $m=1, 2,\cdots$, определенные почти всюду на единичной окружности ∂U, сходятся почти всюду на этой окружности к функции $h_n(w)$. По представлению интегралом Коши функций $P_m(\psi_n(w))$, $|w|<1$, $m=1, 2,\cdots$, через соответствующие граничные функции $P_m(\psi_n(w))$, $|w|=1$, $m=1, 2,\cdots$, а функции $f(\psi_n(w))$, $|w|<1$—ее граничной функцией $h_n(w)$, $|w|=1$ с учетом теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что функции $P_m(\psi_n(w))$, $m=1, 2,\cdots$, сходятся в круге $|w|<1$ к функции $f(\psi_n(w))$ $(n=1, 2,\cdots)$.

Теорема доказана.

Замечание 4. В ходе доказательства было получено, что $\{P_m(z)\}$ сходится к функции $f(z)$ всюду на E°, а также почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения.

Замечание 5. Взяв в теореме 3 $H=\varnothing$ и обозначая

$$M=\sup_{z\in E^\circ}|f(z)|,$$

покажем, что в условиях теоремы 3 можно выбрать такую последовательность полиномов, которая сходится к функции $f(z)$ на E° и на множестве E равномерно ограничена числом M.

Действительно, построенные в доказательстве теоремы 3 непрерывные функции $f_m(z)$, определенные соответственно на замкнутых множествах $\bigcup\limits_{n=1}^{m}\psi_n(T_{m-n+1}^{(n)})$, равномерно ограничены числом M. Пусть $\Delta(z)$— функция, определенная следующим образом: $\Delta(z)=z$, при $|z|\leqslant M$, $\Delta(z)=M\cdot\frac{z}{|z|}$, при $|z|>M$. Если $g_m(z)$ — непрерывное продолжение функции $f_m(z)$ на множестве ∂E, но непрерывные на ∂E функции $\Delta(g_m(z))$, как и сами функции $g_m(z)$, сходятся почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения к $g(z)$, полученной в доказательстве теоремы 3. Но функции $\Delta(g_m(z))$ равномерно ограничены числом M. Таким образом, кроме условий теоремы 1, удовлетворено также условие замечания 3, и наше утверждение доказано.

Замечание 6. При $H=\varnothing$ из доказательства теоремы 3, в частности, следует, что если $f(z)$ — любая ограниченная аналитическая функция на E°, то существует ограниченная функция $g(z)$ на ∂E, совпадающая почти всюду на ∂E с граничными значениями функции $f(z)$ с смысле конформного отображения.

Решение отмеченной в n° 1 задачи дает теорема 4, являющаяся следствием теоремы 3 (определение K и E приведено выше).

Теорема 4. *Пусть F — замкнутое подмножество компакта K, $\varphi(z)$ — ограниченная функция первого класса Бэра на F. Для того, чтобы существовала равномерно ограниченная на K последовательность полиномов $\{P_k(z)\}$, которая на множестве F сходится к функции $\varphi(z)$, необходимо и достаточно, чтобы на E° существовала ограниченная аналитическая функция $f(z)$, такая, что 1) $f(z)=\varphi(z)$, при $z\in F\setminus\partial E$, 2) $\varphi(z)$ почти всюду на $F\cap\partial E$ совпадает с граничными значениями функции $f(z)$ в смысле конформного отображения.*

Чтобы доказать эту теорему достаточно в предыдущей теореме взять в качестве H множество $F\cap\partial E$, в качестве B—множество $F\setminus\partial E$.

Пусть G — ограниченное открытое множество. Обозначим $K=\overline{G}$ и пусть E связано с K так, как выше. Взяв в теореме 3 $H=\varnothing$ и $B=G$, получим теорему Рубеля--Шилдса.

Теорема 5. (Рубель, Шилдс [6]). *Пусть $\varphi(z)$ — ограниченная аналитическая функция на G. Для того, чтобы на G существовала равномерно ограниченная последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$, сходящаяся к $\varphi(z)$ на G, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(z)$ аналитически и ограниченно продолжалась на множестве E°.*

Замечание 7. Рубель и Шилдс [6] доказали, что если

$$M=\sup_{z\in E^{\circ}}|\varphi(z)|,$$

то последовательность полиномов, существование которой утверждает теорема 5, можно взять равномерно ограниченной на E° числом M. То же самое непосредственно следует также из нашего замечания 5.

Приводимое ниже следствие теоремы 3 дополняет теорему Рубеля—Шилдса в том смысле, что отвечает на вопрос о сходимости последовательности $\{P_n(z)\}$ также в точках множества ∂E.

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 всегда можно взять такую равномерно ограниченную на E последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$, которая, сходясь на E° к функции $\varphi(z)$, сходится также почти всюду на ∂E в смысле конформного отображения. Для того, чтобы эта последовательность была кроме того сходящейся во всех точках множества ∂E необходимо и достатчно, чтобы на ∂E существовала ограниченная функция первого класса Бэра, совпадающая почти всюду на ∂E с граничными значениями функции $\varphi(z)$ в смысле конформного отображения.*

Первая часть теоремы следует из замечания 4, вторая часть — из теоремы 3, если ее применить для компакта E, взяв при этом $H=\partial E$ и $B=E^{\circ}$.

Кировакавский педагогический
институт

Поступила 29. X. 1985

Ա. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ. Կոմպլեքս հարթության կոմպակտ բազմությունների վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների հաջորդականությամբ ֆունկցիաների ներկայացման մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում բնութագրված են կապակցված լրացումով կոմպակտ բազմության եզրում որոշված այն ֆունկցիաները, որոնցից յուրաքանչյուրին հնարավոր է կետայնորեն մոտարկել այդ կոմպակտի վրա հավասարաչափ սահմանափակ բազմանդամների հաջորդականությամբ։ Լուծված է նաև ավելի ընդհանուր խնդիր, որում կոմպակտի եզրի փոխարեն վերցված է նրա կամայական փակ ենթաբազմությունը։

Որպես հետևանքներ ստացված են Ռուբելի և Շիլդսի մի թեորեմը և նրա որոշ լրացումը։

A. A. DANIELIAN. *On representation of functions by uniformly bounded sequences of polynomials on the complex plane compact sets* (summary)

The paper describes the functions, defined on the boundary of a compact set with connected complement, which can bopointwisely approximated by the uniformly bounded on that compact sequence of polynomials. A more general problem is also solved, where instead of the boundary of a compact an arbitrary closed subset of the latter is taken.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О последовательностях полиномов, ограниченных в совокупности, Матем. сб., 42, 1935, 719—724.
2. *С. Н. Мергелян, А. А. Талалян.* Об одном классе точечно-разрывных функций. ДАН Арм.ССР, XXXII, № 4, 1961, 183—187.
3. *Э. Бишоп.* Структура некоторых мер. Сборник переводов «Некоторые вопросы теории приближений», М., ИЛ, 1963, 74—86.
4. *Э. Бишоп.* Граничные меры аналитических дифференциалов. Сборник переводов «Некоторые вопросы теории приближений», М., ИЛ, 1963, 87—100.
5. *С. В. Колесников.* Об одной теореме М. В. Келдыша, касающейся поточечной сходимости последовательности полиномов, Матем. сб., 124 (166), № 4 (8), 1984.
6. *L. A. Rubel and A. L. Shields.* Bounded approximation by polinomials, Acta Math., 112, 1964, 145—162.
7. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, М., «Мир», 1973.
8. *К. Иосида.* Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.