ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 4, 1986 Математика

УДК 517.95

К. А. ЯГДЖЯН

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПАРАМЕТРОМ И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Введение

Целью настоящей работы является построение фундаментального решения (ф.р.) следующей задачи Коши:

$$Lu = f, \tag{0.1}$$

$$D_t^l u|_{t=s} = \psi_l(x), \quad l = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{0.2}$$

где $t, s \in J = [0, T]$, $x \in R^n$, $D_j = -i\partial_j = -i\partial/\partial x_j$, $D_t = -i\partial_t = -i\partial_t/ /\partial t$, $T > 0$, α — мультииндекс,

$$L = D_t^m + \sum_{j+|\alpha| \leqslant m,\, j<m} a_{j,\alpha}(t, x) D_t^j D_x^\alpha,$$

$a_{j,\alpha} \in C^\infty(J \times R^n)$, в предположении, что главный символ

$$P_m(t, x, \tau, \xi) = \tau^m + \sum_{j+|\alpha|=m,\, j<m} a_{j,\alpha}(t, x)\tau^j \xi^\alpha$$

представляется в виде

$$P_m(t, x, \tau, \xi) = \prod_{l=1}^{m} (\tau - \lambda_l(t, x, \xi)), \tag{0.3}$$

где вещественнозначные функции $\lambda_l(t, x, \xi)$ удовлетворяют условиям

$$|\lambda_l(t, x, \xi)| \leqslant c\lambda(t)|\xi|, \quad l = 1, 2, \cdots, m, \tag{0.4}$$

$$|\lambda_l(t, x, \xi) - \lambda_k(t, x, \xi)| \geqslant \delta\lambda(t)|\xi|, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad l \neq k, \ l, k = l, \cdots, m \tag{0.5}$$

для всех $t \in J$, $(x, \xi) \in R^{2n}$, с функцией $\lambda \in C^\infty(J)$, $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(t) = \partial_t \lambda(t) > 0$ при $t > 0$. Таким образом, при $t = 0$ имеет место нарушение условия строгой гиперболичности оператора L, поэтому мы предположим, что коэффициенты $a_{j,\alpha}$ удовлетворяют условиям работ [1], [2], [3], т. е. для всех k, β и всех α, j, $|\alpha| \neq 0, |\alpha| + j \leqslant m$, выполнены неравенства

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t, x)| \leqslant C_{k,\beta} \lambda^{m-j}(t) \left(\frac{|\ln \lambda(t)|}{\Lambda(t)}\right)^{m-j-|\alpha|} \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k, \tag{0.6}$$

$$|D_t^k D_x^\beta \operatorname{Im} a_{m-1-|\alpha|,\alpha}(t, x)| \leqslant C_{k,\beta} \lambda^{|\alpha|}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{k+1}, \tag{0.7}$$

где $\Lambda(t)=\int\limits_0^t \lambda(s)\,ds,\ c\lambda(t)/\Lambda(t)\leqslant\lambda'(t)/\lambda(t)\leqslant c_0\lambda(t)/\Lambda(t),\ c>\frac{m-1}{m}$, $|\lambda^{(k)}(t)|\leqslant c_k(\lambda'(t)/\lambda(t))^{k-1}\lambda'(t),\ t>0,\ k=2,3,\cdots$. Отметим, что, как показано в [3], условия (0.6), (0.7), вообще говоря, являются необходимыми для корректности задачи Коши.

В этих предположениях ф.р. строится в виде интегрального оператора Фурье (ИОФ) специального класса, описание которого осуществляется разбиением кокасательного расслоения $T^* R^n_x$ на зоны и будет приведено ниже. Отметим здесь только, что эти классы псевдодифференциальных операторов (ПДО) и ИОФ являются обобщения ии известных классов Буте де Монвеля [4], использованных, например, в работах [5]—[15]. В [8] с помощью классов Буте де Монвеля построено ф.р. задачи (0.1), (0.2) в том случае, когда $\lambda(t)=t^l$, где l — целое. Во многом мы следуем схеме построения ф.р. именно этой работы, отходя от нее в принципиально ином определении классов ПДО и ИОФ. Мы отказываемся также от понятия квазиоднородности, и по этой причине используем теорию ИОФ с неоднородной фазовой функцией, изложенную в работе Кумано-го [5].

§ 1. Гиперболичность. Классы символов и исчисление ПДО

Обозначим через t_ξ решение уравнения

$$\Lambda(t)<\xi>=N\ln<\xi>, \tag{1.1}$$

а через $<\xi_t>$ — его решение относительно $<\xi>$. Здесь $<\xi>=(1+|\xi|^2)^{1/2}$.

Для дальнейшего исключительно важную роль играет следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (0.3)—(0.7). *Тогда существуют положительные постоянные M, N_0 такие, что для всех $N>N_0$ корни $\tau_l(t,x,\xi)$, $l=1,\cdots,m$, уравнения (т. е. нули полного символа оператора L)*

$$\tau^m+\sum_{j+|\alpha|\leqslant m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t,x)\,\tau^j\xi^\alpha=0 \tag{1.2}$$

обладают следующими свойствами: для любых k, α, β существуют положительные постоянные δ_1, $C_{k,\alpha,\beta}$, Q такие, что

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \tau_l(t,x,\xi)|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}<\xi>^{1-|\alpha|}\lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k, \tag{1.3}$$

$$|\tau_j(t,x,\xi)-\tau_l(t,x,\xi)|\geqslant\delta_1\lambda(t)<\xi>,\ j\neq l, \tag{1.4}$$

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \operatorname{Im}\tau_l(t,x,\xi)|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k\left\{\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}+ Q(m-2)\frac{\lambda(t)\ln^2\lambda(t)}{\Lambda^2(t)<\xi>}\right\}, \tag{1.5}$$

при всех $t\in[t_\xi,T]$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $<\xi>\geqslant M$, и всех j, $l=1,\cdots,m$.

Доказательство. Осуществим в (1.2) замену $\tau=\lambda(t)|\xi|\gamma$. Тогда γ будет решением уравнения

$$\gamma^m+\sum_{0<j<m}\left(\sum_{|\alpha|=m-j}(\lambda(t)|\xi|)^{j-m}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha+B_{j+1}\right)\gamma^j=0, \tag{1.6}$$

где

$$B_{j+1}=\sum_{|\alpha|<m-1-j}(\lambda(t)|\xi|)^{j-m}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha,\ j=0,\cdots,m-1.$$

Согласно условию, при $t\in J$, $x\in R^n$, $\xi\neq 0$, корни $\mu_k(t,x,\xi)$ уравнения

$$\mu^m+\sum_{0<j<m}\left(\sum_{|\alpha|=m-j}(\lambda(t)|\xi|)^{j-m}a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha\right)\mu^j=0$$

вещественные и простые. Поэтому, так как (см. (1.16)—(1.18) [3]) для любого положительного ε за счет выбора M, N_0, при всех $t\in[t_\xi,T]$, $x\in R^n$, $\langle\xi\rangle\geqslant M$, имеет место неравенство $|B_1|+\cdots+|B_m|<\varepsilon$, то возмущения B_j малы, и корни уравнения (1.6) аналитически зависят от B_k, т. е. представляются в виде сходящихся степенных рядов, и, следовательно,

$$\tau_k(t,x,\xi)=\lambda(t)|\xi|\mu_k(t,x,\xi)+\lambda(t)|\xi|\sum_{l_1+\cdots+l_m>1}$$

$$a^k_{l_1,l_2\cdots l_m}(t,x,\xi)B_1^{l_1}B_2^{l_2}\cdots B_m^{l_m}, \tag{1.7}$$

где*

$$a^k_{\underset{j}{0\ldots010\ldots0}}(t,x,\xi)=-\frac{(\mu_k(t,x,\xi))^{j-1}}{\prod\limits_{r\neq k}(\mu_k(t,x,\xi)-\mu_r(t,x,\xi))}.$$

Тем самым (1.3)—(1.5) с $k+|\alpha|+|\beta|=0$ доказаны (см. также (1.20)—(1.22) [3]). Для завершения доказательства леммы необходимо продифференцировать (1.2) и воспользоваться индукцией. Лемма доказана.

Следствие. При всех $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $\langle\xi\rangle\geqslant M$

$$\int_{t_\xi}^{T}|\operatorname{Im}\tau_k(t,x,\xi)|\,dt\leqslant c\,(1+\ln(1+|\xi|)),\ k=1,\cdots,m, \tag{1.8}$$

что естественно назвать условием гиперболичности оператора L с описанной в (0.3)—(0.5) главной частью (см. (1.1) [3]).

Оценки (1.3) лежат в основе предлагаемых ниже классов символов ПДО с параметром t. Отметим здесь, что поверхность $t=t_\xi$ разбивает $[0,T]\times R^n_x\times R^n_\xi$ на две области (зоны), в каждой из которых оператор L требует соответствующего рассмотрения.

Обозначим через $S^m_{\rho,\delta}(R^n_x)$ обычные классы Хермандера ($0\leqslant\delta<1$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$), а через $C_t(J;S^m_{\rho,\delta})$ — непрерывное отображение J в $S^m_{\rho,\delta}(R^n_x)$.

---

* В [3] в формулах для этих коэффициентов имеется описка, которая, впрочем, не влияет на правильность рассуждений и результаты указанной работы.

Определение 1. Пусть m_1, m_2, m_3 — действительные числа. Через $S\{m_1, m_2, m_3\}$ обозначим множество всех функций $a(t, x, \xi) \in C^\infty(J \times R^{2n})$ таких, что с некоторыми m, ρ, δ, $a \in C_t(J; S^m_{\rho,\delta})$, и для любых k, α, β с некоторыми постоянными $C_{k,\alpha,\beta}$ при всех $t \in [t_\xi, T]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geqslant M$, справедливы неравенства

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, x, \xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m_1-|\alpha|} \lambda^{m_2}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \right)^{m_3+k}. \tag{1.9}$$

Введем также обозначение

$$\mathrm{H}\{m_1, m_2, m_3\} = \bigcap_{\nu=0}^{\infty} S\{m_1 - \nu, m_2 - \nu, m_3 + \nu\}.$$

Имеет место следующее

Предложение 1. (i) *Пусть $a_k(t, x, \xi) \in S\{m_1 - k, m_2, m_3\}$, $k=0, 1, \cdots$, и начиная с некоторого номера n $a_k(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$, $k \geqslant n$. Тогда существует символ $a(t, x, \xi) \in S\{m_1, m_2, m_3\}$ такой, что*

$$a \sim a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \mod C_t^\infty(J; S^{-\infty}), \tag{1.10}$$

в том смысле, что при $t \in [0, t_\xi]$ этот ряд конечен и сумма обычная, и что для любого k

$$(a - a_0 - a_1 - \cdots - a_{k-1}) \in S\{m_1 - k, m_2, m_3\}, \tag{1.11}$$

и два таких символа отличаются на элемент класса $C_t^\infty(J; S^{-\infty})$.

(ii) *Пусть $b_k(t, x, \xi) \in S\{m_1 - k, m_2 - k, m_3 + k\}$, $k = 0, 1, \cdots$, и начиная с некоторого номера n $b_k(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$, $k \geqslant n$. Тогда существует символ $b(t, x, \xi) \in S\{m_1, m_2, m_3\}$ такой, что*

$$b \sim b_0 + b_1 + b_2 + \cdots \mod \mathrm{H}\{m_1, m_2, m_3\}, \tag{1.12}$$

в том смысле, что при $t \in [0, t_\xi]$ этот ряд конечен и сумма обычная, и что для любого k

$$(b - b_0 - b_1 - \cdots - b_{k-1}) \in S\{m_1 - k, m_2 - k, m_3 + k\}, \tag{1.13}$$

и два таких символа отличаются на элемент из класса $\mathrm{H}\{m_1, m_2, m_3\}$.

Доказательство. Пусть $\chi(t)$ есть C^∞-функция на R^1 такая, что $0 \leqslant \chi(t) \leqslant 1$, и $\chi(t) = 1$ при $|t| \leqslant 1$, а при $|t| \geqslant 2$ $\chi(t) = 0$. Определим также функции $\psi_\varepsilon(\xi)$, $\gamma_\varepsilon(t, \xi)$ по формулам

$$\psi_\varepsilon(\xi) = 1 - \chi(\varepsilon \langle \xi \rangle), \quad \gamma_\varepsilon(t, \xi) = 1 - \chi\left(\frac{\varepsilon \Lambda(t) \langle \xi \rangle}{N \ln \langle \xi \rangle} \right),$$

и положим

$$a(t, x, \xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_{\varepsilon_\nu}(\xi) a_\nu(t, x, \xi), \tag{1.14}$$

$$b(t, x, \xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\varepsilon_\nu}(t, \xi) b_\nu(t, x, \xi). \tag{1.15}$$

Ясно, что при подходящем выборе последовательности $\{\varepsilon_\nu\}$, $1 > \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \cdots > \varepsilon_\nu > \cdots \to 0$ ряд (1.14) будет абсолютно сходящимся.

Пусть теперь a и $\tilde{a}$ — два символа со свойством (1.11). Тогда $a(t, x, \xi) - \tilde{a}(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$, и $(a - \tilde{a}) \in S\{m_1 - l - k - m_3, m_2, m_3\}$ для любых l и любых $k \geqslant 0$, поэтому

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta (a(t, x, \xi) - \tilde{a}(t, x, \xi))| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - l - k - m_3 - |\alpha|} \lambda^{m_2}(t) \times$$

$$\times \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + k} \leqslant C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - l - |\alpha|} (\langle \xi \rangle \Lambda(t))^{-(m_3 + k)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{k,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - l - |\alpha|}, \; t \in J.$$

так как $t \geqslant t_\xi$, что и доказывает пункт (i) предложения.

Для доказательства пункта (ii) заметим прежде всего, что

$$|D_t^j D_\xi^\alpha \gamma_\varepsilon(t, \xi)| \leqslant C_{j,\alpha} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \Lambda^{-j}(t) \lambda^j(t).$$

при t таких, что $\varepsilon\Lambda(t)\langle \xi \rangle \geqslant N \ln \langle \xi \rangle$, $\varepsilon < 1$, в то время как $\gamma_\varepsilon(t, \xi) = 0$ при t таких, что $\varepsilon\Lambda(t)\langle \xi \rangle \leqslant N \ln \langle \xi \rangle$. Далее, последовательность $\{\varepsilon_j\}_0^\infty$, $1 \geqslant \varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_1 \geqslant \cdots > \varepsilon_j \cdots \to 0$ в (1.15) можно выбрать так, чтобы при $t \in [t_\xi, T]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle > M$,

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta [\gamma_{\varepsilon_j}(t, \xi) b_j(t, x, \xi)]| \leqslant 2^{-j} \langle \xi \rangle^{m_1 - j + 1 - |\alpha|} \times$$

$$\times \lambda^{m_2 - j + 1}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + k + j + 1},$$

для всех k, α, β, $k + |\alpha| + |\beta| \leqslant j$, $j = 0, 1, \cdots$. Действительно

$$|D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha [\gamma_{\varepsilon_j}(t, \xi) b_j(t, x, \xi)]| =$$

$$= \left| \sum_{l+m=k} \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!\, k!}{\gamma!\, \delta!\, m!\, l!} [D_t^l D_\xi^\gamma \gamma_{\varepsilon_j}(t, \xi)] \cdot [D_t^m D_x^\beta D_\xi^\delta (b_j(t, x, \xi))] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l+m=k} \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!\, k!}{\gamma!\, \delta!\, m!\, l!} C_{l,\gamma} \langle \xi \rangle^{-|\gamma|} \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^l C_{m,\beta,\delta}^{(j)} \langle \xi \rangle^{m_1 - j - |\delta|} \times$$

$$\times \lambda^{m_2 - j} \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{m_3 + m + j} \leqslant \langle \xi \rangle^{m_1 - j + 1 - |\alpha|} \lambda^{m_2 - j + 1}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + k + j - 1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\Lambda(t)\langle \xi \rangle} \sum_{l+m=k} \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!\, k!}{\gamma!\, \delta!\, m!\, l!} C_{l,\gamma} C_{m,\beta,\delta}^{(j)} \right\},$$

так что достаточно выбрать

$$\varepsilon_j \leqslant 2^{-j} \left\{ \max_{k+|\alpha|+|\beta| \leqslant j} \sum_{l+m=k} \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!\, k!}{\gamma!\, \delta!\, m!\, l!} C_{l,\gamma} C_{m,\beta,\delta}^{(j)} \right\}^{-1}.$$

Для остатка ряда (1.15) имеем

$$\left| D_t^k D_x^\beta D_\xi^\alpha \sum_{j=r+1}^{\infty} \gamma_{\varepsilon_j}(t, \xi) b_j(t, x, \xi) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=r+1}^{\infty} 2^{-j} \langle \xi \rangle^{m_1 - j + 1 - |\alpha|} \lambda^{m_2 - j + 1}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + k + j - 1} \leqslant$$

$$\leqslant \langle \xi \rangle^{m_1 - |\alpha| - r} 2^{-(r+1)} \lambda^{m_2 - r}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + k + r} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \left(\frac{1}{\Lambda(t)\langle \xi \rangle}\right)^j \leqslant$$

$$\leqslant C_{k,\alpha,\beta} < \xi >^{m_1-|\alpha|-r} 2^{-(r+1)} \lambda^{m_2-r}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3+k+r}.$$

Таким образом, $\sum\limits_{j=r+1}^{\infty} \gamma_{\varepsilon_j}(t, \xi)\, b_j(t, x, \xi) \in S\{m_1 - r,\ m_2 - r,\ m_3 + r\}$.

Предложение доказано.

Определим теперь псевдодифференциальный оператор $a(x, D_x)$ формулой

$$a(x, D_x)\, u(x) = Os - \iint e^{-iy\cdot\xi} a(x, \xi)\, u(x+y)\, (2\pi)^{-n}\, d\xi dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-n} \iint e^{-iy\cdot\xi}\, \varkappa(\varepsilon\xi, \varepsilon y)\, a(x, \xi)\, u(x+y)\, d\xi dy, \quad u \in B(R^n),$$

где $B(R^n)$ — пространство C^∞-функций в R^n с ограниченными производными, а функция $\varkappa$, $\varkappa(0, 0) = 1$, из пространства Шварца S.

Предложение 2. *Пусть* $a \in S\{m_1, m_2, m_3\}$, $b \in S\{m_1', m_2', m_3'\}$, *и определим* $a\circ b(t, x, \xi)$ *по формуле*

$$a\circ b(t, x, \xi) = Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} a(t, x, \xi+\eta)\, b(t, x+y, \eta)\, (2\pi)^{-n}\, d\eta dy,$$

и пусть $a(t, x, \xi) = 0$ *при* $t \in [0, t_\xi]$. *Тогда* $a\circ b(t, x, \xi) \in S\{m_1 + m_1',\ m_2 + m_2',\ m_3 + m_3'\}$, $a(t, x, D_x)\, b(t, x, D_x) = a\circ b(t, x, D_x)$ *и*

$$a\circ b(t, x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(t, x, \xi)\, b_{(\alpha)}(t, x, \xi), \ \mathrm{mod}\, C_t(J;\ S^{-\infty}), \qquad (1.16),$$

где $a^{(\alpha)} = D_\xi^\alpha a$, $b_{(\alpha)} = \partial_x^\alpha b$.

Доказательство. Мы его опускаем, поскольку оно является совершенно типичным для теории ПДО.

Если $A(t)$ — матричный ПДО, то $\sigma(A(t))(x, \xi) \in S\{m_1, m_2, m_3\}$ означает, что элементы $A_{ij}(t, x, \xi)$ символа оператора $A(t)$ принадлежат этому классу при всех i, j.

Лемма 2. *Пусть задана последовательность матричных* $m\times m$ *символов* $\sigma(N^{(\nu)}(t))(x, \xi) \in S\{-\nu,\ -\nu,\ +\nu\}$, $\nu = 1, 2, \cdots$, *и* $\sigma(N^{(\nu)}(t))(x, \xi) = 0$ *при всех* $t \in [0, t_\xi]$, $<\xi> \geqslant M$. *Тогда существует оператор* $N(t)$ *такой, что его символ* $\sigma(N(t))(x, \xi)$ *принадлежит классу* $S\{0, 0, 0\}$ *и*

$$N(t) \sim I + N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t) + \cdots \quad \mathrm{mod}\, \mathbf{H}^0 = \mathbf{H}\{0, 0, 0\}. \qquad (1.17)$$

Более того, $N(t)$ *имеет параметрикс* $N^{\#}(t)$ *такой, что* $\sigma(N^{\#}(t))(x, \xi) \in S\{0, 0, 0\}$, *и*

$$\sigma(N(t)\, N^{\#}(t) - I),\ \sigma(N^{\#}(t)\, N(t) - I) \in C_t(J;\ S^{-\infty}).$$

Доказательство. Мы его опускаем, поскольку оно аналогично доказательству предложения 1, а построение параметрикса $N^{\#}(t)$, по существу, ничем не отличается от принятого в теории ПДО.

§ 2. Приведение к задаче Коши для системы первого порядка

Пусть $\rho(t, \xi)$ — положительный корень уравнения

$$\rho^m - 1 - |\xi|\,\lambda^m(t)\,\Lambda^{1-m}(t)\,|\ln<\xi>|^{m-1} = 0, \tag{2.1}$$

и пусть $h(t, \xi) = \rho(t, \xi)\,\chi(\Lambda(t)<\xi>/N\ln<\xi>) + \lambda(t)<\xi>(I - \chi(\Lambda(t)<\xi>/N\ln<\xi>))$, а

$$H(t) = \begin{bmatrix} h^{m-1}(t, D_x), & 0, & \cdots, & 0 \\ 0 & h^{m-2}(t, D_x), & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots, & 1 \end{bmatrix},$$

Для вектора $U = {}^t(U_1, U_2, \cdots, U_m) = H(t)\,{}^t(u, D_t u, \cdots, D_t^{m-1} u)$ уравнение (0,1) приводит к системе

$$L_0 U = \Phi, \tag{2.2}$$

где

$$L_0 = D_t - A(t) - H_t(t)\,H^{-1}(t), \quad \Phi = H(t)\,{}^t(0, \cdots, 0, f), \tag{2.2'}$$

$$\sigma(A(t))(x, \xi) = \begin{bmatrix} 0, & h, & \cdots, & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \cdots, & h \\ -\sum\limits_{|\alpha|<m} a_{0,\alpha}(t, x)\,\xi^\alpha h^{-m+1}(t, \xi), & -\sum\limits_{|\alpha|<m-1} a_{1,\alpha}(t, x)\,\xi^\alpha h^{-m+2}(t, \xi), & \cdots, & -\sum\limits_{|\alpha|<1} a_{m-1,\alpha}(t, x)\,\xi^\alpha \end{bmatrix}.$$

Упорядочим корни уравнения (1.2): $\operatorname{Re}\tau_1 < \operatorname{Re}\tau_2 < \cdots < \operatorname{Re}\tau_m$, $t \in [t_\xi, T]$. Выберем постоянные $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ и рассмотрим функции $\varphi_k(t, x, \xi) = d_k\,\rho(t, \xi)\,\chi(\Lambda(t)<\xi>/N\ln<\xi>) + \tau_k(t, x, \xi)\,(1 - \chi(\Lambda(t)<\xi>/N\ln<\xi>))$. Очевидно, что $\Delta(t, x, \xi) = \prod\limits_{m>l>j}[(\varphi_l(t,x,\xi) - \varphi_j(t, x, \xi))/h(t, \xi)]$ является равномерно по $t \in J$ эллиптическим символом нулевого порядка, $h(t, \xi)$ — равномерно по $t \in J$ гипоэллиптическим символом, а

$$-\sum_{|\alpha|<m-j} a_{j,\alpha}(t, x)\,\xi^\alpha h^{-m+j+1}(t, \xi) \in S\{1, 1, 0\}, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

По системе $\{\varphi_k h^{-1}\}$ составим матрицу Вандермонда $M^\#(t, x, \xi) = V(\varphi_1 h^{-1}, \varphi_2 h^{-1}, \cdots, \varphi_m h^{-1})$, и пусть $M(t, x, D_x)$ — параметрикс для $M^\#(t, x, D_x)$, т. е. $\sigma(M(t)\,M^\#(t) - I)$, $\sigma(M^\#(t)\,M(t) - I) \in C_t^\infty(J;\ S^{-\infty})$. Тогда вектор $V = M(t)\,U$ будет решением системы

$$D_t V - M(t)\,A(t)\,M^\#(t)\,V - M(t)\,H_t(t)\,H^{-1}(t)\,M^\#(t)\,V - M_t(t)\,M^\#(t)\,V + R_1(t)\,U = M(t)\,\Phi, \tag{2.3}$$

где $\sigma(R_1(t))(x, \xi) \in C_t(J;\ S^{-\infty})$.

Ясно, что (2.3) можно переписать в следущем виде:

$$D_t V - D(t)\,V + B(t)\,V + R_2(t)\,U = \Phi_1, \tag{2.4}$$

где $D(t)$ — оператор с диагональным символом, элементы которого $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$, $R_2(t, x, \xi) \in C_t(J, S^{-\infty})$, $B(t) \in S\{0, 0, 1\}$, а при $t \in [0, t'_\xi]$ для любых α, β выполняются неравенства

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta B(t, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta} \left(\rho(t, \xi) + \frac{\rho_t(t, \xi)}{\rho(t, \xi)}\right) < \xi >^{-|\alpha|}, \tag{2.5}$$

где t'_ξ — решение уравнения (1.1) с заменой N на $2N$.

Действительно, главный символ $M(t, x, D_x)$ есть $[M^{\#}(t, x, \xi)]^{-1}$, а при $t \in [t_\xi, T]$ матрица $M(t, x, \xi)\, A(t, x, \xi)\, M^{\#}(t, x, \xi)$ — диагональная, с $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m$ на диагонали. Остальные члены разложения

$$\sum_\beta \frac{1}{\beta!} \left(\partial_\xi^\beta \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha M(t, x, \xi)\right)\left(D_x^\alpha A(t, x, \xi)\right) D_x^\beta M^{\#}(t, x, \xi)\right) \tag{2.6}$$

принадлежат $S\{1 - |\alpha + \beta|, 1, 0\}$, соответственно, а при $|\gamma| \neq 0$ $S\{1 - |\gamma|, 1, 0\} \subset S\{0, 0, 1\}$. Что касается поведения при $t \in [0, t_\xi]$ разложения (2.6), то учитывая оценку $|D_\xi^\alpha D_x^\gamma A(t, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\gamma} < \xi >^{-|\alpha|} \rho(t, \xi)$, гладко продолжим члены ряда нулем на $[t_\xi, T]$. Тогда его можно просуммировать так, что асимптотическая сумма будет удовлетворять оценке (2.5).

Итак, вернемся к (2.4). Осуществим в зоне $[t_\xi, T]$ полную диагонализацию системы.

Теорема 1. *Существует оператор $N(t)$ такой, что $N(t, x, \xi) \in S\{0, 0, 0\}$, $|\det N(t, x, \xi)| > \mathrm{const} > 0$ на $J \times R_x^n \times R_\xi^n$, и*

$$(D_t - D(t) + B(t))\, N(t) = N(t)\, L_1 \mod C_t(J;\ S^{-\infty}), \tag{2.7}$$

с некоторым L_1 вида

$$L_1 = D_t - D(t) + F(t) + R(t), \tag{2.8}$$

где (i) $F(t, x, \xi)$ — *диагональная матрица*, $F(t, x, \xi) \in S\{0, 0, 1\}$, $F(t, x, \xi) = 0$ *при* $t \in [0, t_\xi]$, (ii) *для любых* α, β *выполнены неравенства*

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta R(t, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta} < \xi >^{-|\alpha|} \left(\rho(t, \xi) + \frac{\rho_t(t, \xi)}{\rho(t, \xi)}\right), \quad t \in [0, t'_\xi], \tag{2.9}$$

и $\sigma R(t) \in \mathrm{H}\{0, 0, 1\}$.

Доказательство. Ищем $N(t)$, $F(t)$ в следующем виде:

$$\begin{cases} N(t) \sim 1 + N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t) + \cdots, \mod \mathrm{H}^\circ, \\ \sigma N^{(\nu)} \in S\{-\nu, -\nu, \nu\},\ N^{(\nu)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi], \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} F(t) \sim F^{(0)}(t) + F^{(1)}(t) + F^{(2)}(t) + \cdots, \mod \mathrm{H}\{0, 0, 1\}, \\ \sigma F^{(\nu)} \in S\{-\nu, -\nu, \nu + 1\},\ F^{(\nu)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi]. \end{cases} \tag{2.11}$$

Пусть $F^{(0)}(t, x, \xi) = \gamma(t, \xi) \operatorname{diag}[B(t, x, \xi)]$. Здесь $\gamma(t, \xi) = 1 - \chi(\Lambda(t) < \xi > / N \ln < \xi >)$, $\operatorname{diag}[B]$ — диагональная часть матрицы B. Положим $N^{(1)}(t, x, \xi) = \gamma(t, \xi)\,(n_{j,k}^{(1)}(t, x, \xi))$, где

$$n_{j,k}^{(1)}(t, x, \xi) = \begin{cases} b_{j,k}(t, x, \xi)/(\varphi_j(t, x, \xi) - \varphi_k(t, x, \xi)),\ j \neq k, \\ 0,\ j = k, \end{cases}$$

а $b_{j,k}(t, x, \xi)$ — элементы матрицы $B(t, x, \xi)$. Ясно, что

$$\sigma N^{(1)} \in S\{-1, -1, 1\}, \quad N^{(1)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi],$$

$$\sigma F^{(0)} \in S\{0, 0, 1\}, \quad F^{(0)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi].$$

Подсчитаем символ оператора

$$\widetilde{B}^{(1)} = (D_t - D + B)(I + N^{(1)}) - (I + N^{(1)})(D_t - D + F^{(0)}) =$$
$$= B - [D, N^{(1)}] - F^{(0)} - iN_t^{(1)} + BN^{(1)} - N^{(1)}F^{(0)}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sigma(B\gamma - [D, N^{(1)}] - F^{(0)}) \in S\{-1, 0, 1\} \subset S\{-1, -1, 2\},$$

$$\sigma(-iN_t^{(1)} + BN^{(1)} - N^{(1)}F^{(0)}) \in S\{-1, -1, 2\}.$$

Поэтому, если обозначить $B^{(1)} = \widetilde{B}^{(1)} - B(1-\gamma)$, то

$$\sigma B^{(1)} \in S\{-1, -1, 2\}, \text{ и } b_{j,k}^{(1)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi].$$

Далее, пусть $F^{(1)} = \operatorname{diag}[B^{(1)}]$, $\sigma N^{(2)} = (n_{j,k}^{(2)})$, где

$$n_{j,k}^{(2)} \begin{cases} b_{j,k}^{(1)}(t, x, \xi)/(\varphi_j(t, x, \xi) - \varphi_k(t, x, \xi)), & j \neq k, \\ 0, \quad j = k, \end{cases}$$

тогда для оператора $\widetilde{B}^{(2)}$ определяемого формулой

$$\widetilde{B}^{(2)} = (D_t - D + B)(I + N^{(1)} + N^{(2)}) - (I + N^{(1)} + N^{(2)})(D_t - D + F^{(0)} +$$
$$+ F^{(1)}) = B(1-\gamma) + (B^{(1)} - [D, N^{(2)}] - F^{(1)}) - iN_t^{(2)} + BN^{(2)} - N^{(1)}F^{(1)} -$$
$$- N^{(2)}(F^{(0)} + F^{(1)}),$$

получаем

$$\sigma(B^{(1)} - [D, N^{(2)}] - F^{(1)}) \in S\{-2, -1, 2\} \subset S\{-2, -2, 3\},$$

$$\sigma(-iN_t^{(2)} + BN^{(2)} - N^{(1)}F^{(1)} - N^{(2)}(F^{(0)} + F^{(1)})) \in S\{-2, -2, 3\}.$$

Следовательно, если $B^{(2)} = \widetilde{B}^{(2)} - B(1-\gamma)$, то $\sigma B^{(2)} \in S\{-2, -2, 3\}$, и $b_{j,k}^{(2)}(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$. Итак, пусть

$$F^{(\nu)} = \operatorname{diag}[B^{(\nu)}], \quad \sigma N^{(\nu+1)} = (n_{j,k}^{(\nu+1)}),$$

где

$$n_{j,k}^{(\nu+1)} \begin{cases} b_{j,k}^{(\nu)}/(\varphi_j - \varphi_k), & j \neq k, \\ 0 \quad, & j = k, \end{cases}$$

$$\widetilde{B}^{(\nu+1)} = (D_t - D + B)\left(I + \sum_{\mu=1}^{\nu+1} N^{(\mu)}\right) - \left(I + \sum_{\mu=1}^{\nu+1} N^{(\mu)}\right)\left(D_t - D + \sum_{\mu=0}^{\nu} F^{(\mu)}\right)$$

$(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$. Для оператора $B^{(\nu+1)} = -B(1-\gamma) + \widetilde{B}^{(\nu+1)}$ имеем

$$\sigma B^{(\nu+1)} \in S\{-\nu-1, -\nu-1, \nu+2\}, \text{ и } b_{j,k}^{(\nu+1)}(t, x, \xi) = 0 \text{ при } t \in [0, t_\xi]. \quad (2.12)$$

Учитывая включение $\sigma(B^{(\nu)} - [D, N^{(\nu+1)}] - F^{(\nu)}) \in S\{-\nu-1, -\nu, \nu+1\} \subset$ $\subset S\{-\nu-1, -\nu-1, \nu+2\}$ по индукции получаем (2.12) для всех

$\nu=0, 1, \cdots$. С помощью предложения 1 строим символы $N(t)$, $F(t)$ такие, что для оператора $\bar{R}=(D_t-D+B)N-N(D_t-D+F)$ имеет место $\bar{R}\in H\{0, 0, 1\}$, и $\tilde{R}(t, x, \xi)=B(t, x, \xi)$ при $t\in[0, t_\xi]$. Пусть теперь $N^{\#}(t)$ — параметрикс оператора $N(t)$. Полагаем $R(t)= = N^{\#}(t)\bar{R}(t)$. Теорема доказана.

Итак, согласно теореме 1, оператор $D_t-D(t)+B(t)$ диагонализируем в главном, в том смысле, что в L_1, как будет показано в дальнейшем, $R(t)$ можно рассматривать как возмущение, влияющее только на амплитудные функции ИОФ, входящих в ф. р., и не приводящее к дополнительной потере гладкости в зоне $[t_\xi, T]$.

§ 3. Гамильтоновы поля. Построение фазовой функции

Обозначим через $\lambda(t, x, \xi)$ вещественную часть одной из функций $\varphi_i(t, x, \xi)$, $i=1, 2, \cdots, m$. Рассмотрим систему Гамильтона

$$dq/dt=-\nabla_\xi\lambda(t, q, p),\quad dp/dt=\nabla_x\lambda(t, q, p), \tag{3.1}$$

и для нее задачу Коши:

$$q|_{t=s}=y,\quad p|_{t=s}=\xi. \tag{3.2}$$

Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решение задачи существует при всех $t\in[0, T_0]$, $\xi\in R^n$, $y\in R^n$, $\langle\xi\rangle\geqslant M$, если T_0 достаточно мало. Опишем поведение решения $(q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi))$. Введем вспомогательную точку t_ξ^* с помощью (1.1), где N заменено на N_1, $N_0<N_1<N$.

Лемма 3. *Если $0<s\leqslant t\leqslant t_\xi$, или $0\leqslant t<s<t_\xi$, то*

$$p(t, s, y, \xi)=\xi,\quad q(t, s, y, \xi)=y-\int_s^t\lambda_\xi(\tau, \xi)\,d\tau. \tag{3.3}$$

Далее, существуют $0<T_0\leqslant T$, M, такие, что для любых j, k, α, β существуют постоянные $C_{j,k,\alpha,\beta}$, $C_{j,\alpha,\beta}$, так, что при всех $y\in R^n$, $\xi\in R^n$, $\langle\xi\rangle\geqslant M$, справедливы оценки:

(i) *при $t_\xi^*\leqslant s\leqslant t<T_0$,*

$$|D_t^jD_s^kD_\xi^\alpha D_y^\beta(q(t, s, y, \xi)-y)|\leqslant C_{j,k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\Lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^j\left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k, \tag{3.4}$$

$$|D_t^jD_s^kD_\xi^\alpha D_y^\beta(p(t, s, y, \xi)-\xi|\leqslant C_{j,k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{1-|\alpha|}\Lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^j\left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k; \tag{3.5}$$

(ii) *при $0\leqslant s<t_\xi^*\leqslant t_\xi\leqslant t\leqslant T_0$*

$$|D_t^jD_\xi^\alpha D_y^\beta(q(t, s, y, \xi)-y)|\leqslant C_{j,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\Lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^j; \tag{3.6}$$

(iii) *при* $t_\xi^* \leqslant t \leqslant s \leqslant T_0$

$$|D_t^j D_s^k D_\xi^\alpha D_y^\beta (q(t, s, y, \xi) - y)| \leqslant C_{j, k, \alpha, \beta} < \xi >^{-|\alpha|} \Lambda(s) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^j \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k, \tag{3.7}$$

$$|D_t^j D_s^k D_\xi^\alpha D_y^\beta (p(t, s, y, \xi) - \xi)| \leqslant C_{j,k,\alpha,\beta} < \xi >^{1-|\alpha|} \Lambda(s) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^j \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k. \tag{3.8}$$

Если же $t \leqslant s$, $0 \leqslant t \leqslant t_\xi^*$, *то верны формулы*

$$\left|\begin{aligned} & p(t, s, y, \xi) = p(t_\xi^*, s, y, \xi), \\ & q(t, s, y, \xi), = q(t_\xi^*, s, y, \xi) + \int_t^{t_\xi^*} \lambda_\xi(\tau, p(t_\xi^*, s, y, \xi))\, d\tau. \end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что (3.3) очевидно, т. к. при указанных t и s функция $\lambda(t, x, \xi)$ не зависит от x. (i). Обозначим через $|p|$ норму вектора p. Из (3.1) выводим

$$d|p|^2/dt = 2(p \cdot \nabla_x \lambda(t, q, p)).$$

Но, выбрав $<\xi> \geqslant 2M$, можно написать неравенство

$$|\nabla_x \lambda(t, x, \xi)| \leqslant c\lambda(t)|\xi|, \quad x \in R^n, \quad t \in [0, T], \quad \xi \in R^n.$$

Действительно, на множестве, где $\nabla_x \lambda(t, x, \xi) \neq 0$, это следует из леммы 1. Поэтому

$$|d|p|^2/dt| < c\lambda(t)|p(t)|^2, \quad t_\xi^* \leqslant s \leqslant t < T.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$< p(s) > e^{c[\Lambda(s) - \Lambda(t)]} \leqslant < p(t) > \leqslant < p(s) > e^{c[\Lambda(t) - \Lambda(s)]},$$

где $p(s) = \xi$. Очевидно, что

$$\frac{\Lambda(t) < p(t) >}{N_0 \ln < p(t) >} \geqslant \frac{\Lambda(t) < \xi > \exp(c[\Lambda(s) - \Lambda(t)])}{N_0 \ln(< \xi > \exp(c[\Lambda(t) - \Lambda(s)]))} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\Lambda(s) < \xi >}{N_1 \ln < \xi >} \left\{ \frac{N_1}{N_0} \left(1 + \frac{c[\Lambda(t) - \Lambda(s)]}{\ln < \xi >}\right)^{-1} \exp(c[\Lambda(s) - \Lambda(t)]) \right\}.$$

Для фиксированных N_0, N_1, $N_0 < N_1$ выражение в фигурной скобке может быть сделано больше или равным единице за счет выбора T_0. Таким образом, если $s \geqslant t_\xi^*$, то пара $(t, p(t))$ попадает во вторую зону. С другой стороны,

$$p(t) = \xi + \int_s^t \nabla_x \lambda(\tau, q(\tau), p(\tau))\, d\tau,$$

откуда

$$|p(t, s, y, \xi) - \xi| \int_s^t |\nabla_x \lambda(\tau, q(\tau), p(\tau))|\, d\tau \leqslant c \int_s^t \lambda(\tau) < p(\tau) > d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c < \xi > (\Lambda(t) - \Lambda(s)) \leqslant c < \xi > \Lambda(t),$$

$$|q(t,s,y,\xi)-y|\leqslant\int_s^t|\nabla_\xi\lambda(\tau,q(\tau),p(\tau))|\,d\tau\leqslant c\int_s^t\lambda(\tau)\,d\tau\leqslant c\Lambda(t),$$

равномерно по s, $t_\xi\leqslant s\leqslant t\leqslant T_0$. Итак, (3,4), (3.5) с $j=k=|\alpha|=|\beta|=0$ доказаны. Получим теперь их с $j=k=0$, $|\alpha|=|\beta|=1$. Введем $Q_1=\nabla_y q(t,s,y,\xi)$, $Q_2=\nabla_\xi q(t,s,y,\xi)$, $P_1=\nabla_y p(t,t,y,\xi)$, $P_2=\nabla_\xi p(t,s,y,\xi)$. Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}Q_1, & Q_2\\ P_1, & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\nabla_\xi\nabla_x\lambda, & -\nabla_\xi\nabla_\xi\lambda\\ \nabla_x\nabla_x\lambda, & \nabla_\xi\nabla_x\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1, & Q_2\\ P_1, & P_2\end{pmatrix},\\[2mm] \begin{pmatrix}Q_1, & Q_2\\ P_1, & P_2\end{pmatrix}_{t=s}=\begin{pmatrix}I, & 0\\ 0, & I\end{pmatrix}.\end{cases}$$

Введем энергию

$$E(t)=\|Q_1-I\|^2+\|<\xi>Q_2\|^2+\|P_2-I\|^2+\left\|\frac{1}{<\xi>}P_1\right\|^2.$$

Для нее нетрудно получить неравенство

$$\left|\frac{dE(t)}{dt}\right|\leqslant c\lambda(t)E(t)+c\lambda(t)\sqrt{E(t)},\quad t_\xi<s\leqslant t\leqslant T_0,$$

из которого, учитывая $E(s)=0$, выводим

$$E(t)\leqslant c\Lambda^2(t),\quad t_\xi\leqslant s\leqslant t\leqslant T_0,$$

что приводит к рассматриваемому частному случаю (3.4), (3.5). Индукцией по $|\alpha+\beta|$ доказываем (3.4), (3.5) для всех α, β, когда $j=k=0$. Если $j=1$, $k=0$, то указанные оценки для всех α, β следуют из (3.1) и уже доказанных с $j=k=0$. Для $k=0$ и произвольных j, α, β, они получаются индукцией по j дифференцированием (3.1) по t нужное число раз.

Для получения производных по параметру s рассматриваем вспомогательную систему

$$\frac{dQ}{dt}=-\nabla_\xi\lambda(t+s,Q,P),\quad\frac{dP}{dt}=\nabla_x\lambda(t+s,Q,P),\tag{3.10}$$

с начальными условиями $Q(0)=y$, $P(0)=\xi$. Тогда $q(t,s,y,\xi)=Q(t-s,s,y,\xi)$, $p(t,s,y,\xi)=P(t-s,s,y,\xi)$. Дифференцируя (3.10) по s и подставляя в получившуюся систему вместо аргумента t значение $t-s$ для энергии $E_1(t-s)=|(D_sQ)(t-s)|^2+|(D_s(<\xi>P))(t-s)|^2$, легко получаем

$$\left|\frac{dE_1(t-s)}{dt}\right|\leqslant cE_1(t-s)+c\lambda_t(t)\sqrt{E_1(t-s)},$$

что приводит к неравенству

$$\sqrt{E_1(t-s)}\leqslant c\lambda(t)\leqslant c\Lambda(t)\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\leqslant c\Lambda(t)\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}$$

равномерно по $t_\xi^{\cdot} \leqslant s \leqslant t < T_0$. Аналогично оцениваются оставшиеся производные. Итак (i) доказано. Доказательство (iii) почти ничем не отличается от изложенного выше, и мы его не приводим.

Для доказательства (ii) заметим, что при $s \leqslant t_\xi^{\cdot} < t_\xi \leqslant t \leqslant T_0$

$$|q(t, s, y, \xi) - y| = \left|\int_s^t \nabla_\xi \lambda(\tau, q(\tau, s, y, \xi), p(\tau, s, y, \xi))\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_s^{t_\xi} |\nabla_\xi \lambda(\tau, \xi)|\, d\tau + \int_{t_\xi}^t |\nabla_\xi \lambda(\tau, q(\tau, s, y, \xi), p(\tau, s, y, \xi))|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c|\xi|^{\frac{1-m}{m}} \int_0^{t_\xi} \lambda(\tau)\, \Lambda^{\frac{1-m}{m}}(\tau) |\ln \lambda(\tau)|^{\frac{m-1}{m}}\, d\tau + c\int_{t_\xi}^t \lambda(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\Lambda(t_\xi)\left(\frac{|\ln \lambda(t_\xi)|}{|\xi|\,\Lambda(t_\xi)}\right)^{\frac{m-1}{m}} + c\Lambda(t) < c\Lambda(t_\xi) + c\Lambda(t) \leqslant c\Lambda(t).$$

С помощью (3.3)—(3.5) получаем оставшиеся неравенства в (3.6).

Для доказательства (3.9) замечаем, что при достаточно малом T_0 (3.8) ($j = k = |\alpha| = |\beta| = 0$) означает, что $t \leqslant t_{p(t)}$, если $t \leqslant t_\xi^{\cdot}$, и, следовательно, $\nabla_x \lambda(t, q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi)) = 0$. Лемма доказана.

Естественно ввести следующее

Определение 2. Пусть m_1, m_2, m_3, m_4, m_5— действительные числа. Через $S_{s<t}\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ (соответственно $S_{t<s}\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$) обозначим множество всех функций $a(t, s, x, \xi) \in C^\infty(J \times J \times R_x^n \times R_\xi^n)$ таких, что с некоторыми m, ρ, δ $a \in C(J \times J;\ S^m_{\rho,\delta})$, и для любых j, k, α, β с некоторыми постоянными $C_{j,k,\alpha,\beta}$ справедливы неравенства

$$|D_t^j D_s^k D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{j,k,\alpha,\beta} < \xi >^{m_1 - |\alpha|} \lambda^{m_2}(t) \times$$

$$\times \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3+j} \lambda^{m_4}(s) \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^{m_5+k}. \tag{3.11}$$

при всех $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$, $s \in J$, $t \in J$, $t_\xi^{\cdot} \leqslant s \leqslant t \leqslant T_0$ (соответственно, $t_\xi^{\cdot} \leqslant t \leqslant s \leqslant T_0$).

Таким образом

$$p(t, s, y, \xi) - \xi \in S_{s<t}\{1; 1, -1; 0, 0\},\ p(t, s, y, \xi) - \xi \in S_{t<s}\{1; 0, 0; 1, -1\}, \tag{3.12}$$

$$q(t, s, y, \xi) - y \in S_{s<t}\{0; 1, -1; 0, 0\},\ q(t, s, y, \xi) - y \in S_{t<s}\{0; 0, 0; 1, -1\}. \tag{3.13}$$

Для построения фазовой функции нам потребуется

Лемма 4. *Пусть* $T_1 (0 < T_1 \leqslant T_0)$ *и* $\varepsilon (0 < \varepsilon \leqslant 1)$ *такие постоянные, что*

$$|\partial q/\partial y - I| \leqslant 1 - \varepsilon, \text{ при } s, t \in [0, T_1],\ y \in R^n,\ \xi \in R^n, <\xi> \geqslant M. \tag{3.14}$$

Тогда для отображения $x=q(t,s,y,\xi): R^n_y \ni y \to x \in R^n_x$ *с параметрами* (t, s, ξ) *существует обратное отображение* $y=y(t,s,x,\xi)$, *причем*

$$y(t,s,x,\xi)-x\in S_{s<t}\{0;1,-1;0,0\},\ y(t,s,x,\xi)-\\ -x\in S_{t<s}\{0;0,0;1,-1\}, \tag{3.15}$$

$$|\partial y/\partial x-I|\leqslant(1-\varepsilon)/\varepsilon,\ t,s\in[0,T_1],\ x\in R^n,\ \xi\in R^n, <\xi> > M. \tag{3.16}$$

Далее, для любых k, α, β *с некоторыми постаянными* $C_{k,\alpha,\beta}$ *выполнены неравенства*

$$|D^k_s D^\alpha_\xi D^\beta_x (y(t,s,x,\xi)-x)|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}<\xi>^{-|\alpha|}\Lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k \tag{3.17}$$

при всех $0\leqslant s\leqslant t^\bullet_\xi\leqslant t\leqslant T_1$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $<\xi> > M$, *и неравенства*

$$|D^k_s D^\alpha_\xi D^\beta_x (y(t,s,x,\xi)-x)|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}<\xi>^{-|\alpha|}\Lambda(s)\left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k \tag{3.18}$$

при всех $0<t\leqslant t^\bullet_\xi\leqslant s\leqslant T_1$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, $<\xi>\geqslant M$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $t\leqslant s$. При $s\leqslant t_\xi$ достаточно воспользоваться (3.3), поэтому будем считать $t_\xi\leqslant t\leqslant s$. Существование отображения $y=y(t,s,x,\xi)$ есть следствие (3.13) и теоремы о неявной функции. Имеем, далее, $x-q(t,s,y(t,s,x,\xi),\xi)=0$, откуда

$$|y(t,s,x,\xi)-x|=|x-q(t,s,y(t,s,x,\xi),\xi)+q(t,s,y(t,s,x,\xi),\xi)-\\ -y(t,s,x,\xi)|\leqslant c\Lambda(s).$$

Ясно, что

$$\frac{D(y(t,s,x,\xi)-x)}{Dx}=\left[\frac{D(q(t,s,y,\xi)-y)}{Dy}+I\right]^{-1}\times\\ \times\left[\frac{D(y-q(t,s,y,\xi))}{Dy}\right], \tag{3.19}$$

и, так как при выборе T_1 достаточно малым, согласно лемме 3 верно (3.14), то из (3.19) выводим (3.16), а из (3.7) получаем $|D_x(y(t,s,x,\xi)-x)|\leqslant c\Lambda(s)$. Остальные производные оцениваются точно так же. Если $0\leqslant t\leqslant t^\bullet_\xi\leqslant t_\xi\leqslant s\leqslant T_1$, то

$$\left|\frac{\partial q}{\partial y}-I\right|\leqslant\left|\frac{\partial q(t^\bullet_\xi,s,y,\xi)}{\partial y}-I\right|+\left|\int_t^{t^\bullet_\xi}\lambda_{\xi\xi}(\tau,p(t^\bullet_\xi,s,y,\xi))d\tau\times\\ \times\frac{\partial p(t^\bullet_\xi,s,y,\xi)}{\partial y}\right|\leqslant c\Lambda(s)+c\Lambda(s)<\xi>\int_0^{t^\bullet_\xi}|\lambda_{\xi\xi}(\tau,p(t^\bullet_\xi,s,y,\xi))|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant c\Lambda(s)\left\{1+<\xi>^{\frac{1-m}{m}}\cdot\int_0^{t^\bullet_\xi}\lambda(\tau)\Lambda^{\frac{1-m}{m}}(\tau)|\ln\lambda(\tau)|^{\frac{m-1}{m}}d\tau\leqslant\right.$$

$$\leqslant c\Lambda(s)\{1+N_1^{1/m}(|\ln\lambda(t^\bullet_\xi)|)/<\xi>\}\leqslant c\Lambda(s),$$

поэтому обратная функция $y = y(t, s, x, \xi)$ существует, и

$$|y(t, s, x, \xi) - x| \leqslant |(t_\xi^*, s, y, \xi) - y| + \left|\int_t^{t_\xi^*} \lambda_\xi(\tau, p(t_\xi^*, s, y, \xi))\, d\tau\right| \leqslant c\Lambda(s).$$

Аналогично оцениваются оставшиеся производные в (3.18). Случай $s \leqslant t$ ничем не отличается от рассмотренного. Лемма доказана.

Перейдем теперь к построению фазовой функции. Рассмотрим для уравнения эйконала

$$iD_t\Phi - \lambda(t, x, \nabla_x\Phi) = 0 \tag{3.20}$$

задачу Коши

$$\Phi|_{t=s} = x\cdot\xi. \tag{3.21}$$

Лемма 5. *Если* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_\xi$ *или* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant t_\xi$, *то*

$$\Phi(t, s, x, \xi) = x\cdot\xi + \int_s^t \lambda(\tau, \xi)\, d\tau. \tag{3.22}$$

Далее

$$\Phi(t, s, x, \xi) - x\cdot\xi \in S_{s<t}\{1; 1, -1; 0, 0\},$$
$$\Phi(t, s, x, \xi) - x\cdot\xi \in S_{t<s}\{1; 0, 0; 1, -1\}. \tag{3.23}$$

Для любых k, α, β с некоторыми постоянными $C_{k,\alpha,\beta}$ справедливы оценки

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta(\Phi(t, s, x, \xi) - x\cdot\xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} <\xi>^{1-|\alpha|}\Lambda(t)\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^k, \tag{3.24}$$

при всех $0 \leqslant s \leqslant t_\xi^* \leqslant t_\xi \leqslant t \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$, *и неравенства*

$$|D_s^k D_\xi^\alpha D_x^\beta(\Phi(t, s, x, \xi) - x\cdot\xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} <\xi>^{1-|\alpha|}\Lambda(s)\left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^k, \tag{3.25}$$

при всех $0 \leqslant t \leqslant t_\xi^* \leqslant t_\xi \leqslant s \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$.

Доказательство. Формула (3.22) очевидна. Рассмотрим случай $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1$. Пусть $y = y(t, s, x, \xi)$ — отображение из леммы 4. Определим функцию $u = u(t, s, y, \eta)$ по формуле

$$u(t, s, y, \eta) = y\cdot\eta + \int_s^t \{\lambda - p\cdot\nabla_\xi\lambda\}(\tau, q(\tau, s, y, \eta), p(\tau, s, y, \eta))\,d\tau.$$

Тогда решение задачи (3.20), (3.21) задается формулой (см. доказательство теоремы 3.1 [5])

$$\Phi(t, s, x, \xi) = u(t, s, y(t, s, x, \xi), \xi). \tag{3.26}$$

Утверждение (3.24) и первое из (3.23) являются следствиями этой формулы и лемм 1, 3, 4. Случай $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T_1$ аналогичен. Лемма доказана.

§ 4. Ф. р. задачи Коши для элементарного оператора

Согласно лемме 5, функция $\Phi(t, s, x, \xi)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым в работе Кумано-го [5] к неоднородным фазовым функциям.

Определим теперь ИОФ $A_\Phi = a_\Phi(x, D_x)$ с фазовой функцией $\Phi(x, \xi)$ и символом $a(x, \xi) \in S^m$ по формуле

$$A_\Phi u(x) = Os - \iint e^{i(\Phi(x, \xi) - x' \xi)} a(x, \xi) u(x') (2\pi)^{-n} d\xi dx'$$

$(u \in B(R^n))$. Основные свойства таких операторов можно найти в § 2 [5].

Определим в области $[0, T_1] \times R^n_x$ элементарный гиперболический оператор первого порядка

$$L = D_t - \lambda(t, x, D_x) + f(t, x, D_x), \tag{4.1}$$

где $\lambda(t, x, \xi)$ — та же функция, что и в § 3, $f(t, x, \xi) \in S\{0, 0, 1\}$, и $f(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} Lu = \varphi(t) \text{ на } [s, T_1] \times R^n_x, \\ u|_{t=s} = \psi \quad (0 \leqslant s < T_1), \end{cases} \tag{4.2}$$

для малых T_1. Построим, предварительно, параметрикс задачи (4.2) с $\varphi(t) = 0$, т. е. оператор $\tilde{E}_\Phi(t, s)$ такой, что

$$\begin{cases} L\tilde{E}_\Phi(t, s) = 0 \mod C_{t, s}(S^{-\infty}) \; 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1, \\ \tilde{E}_\Phi(s, s) = I \text{ (тождественный оператор).} \end{cases} \tag{4.3}$$

Ищем $\tilde{E}_\Phi(t, s)$ в виде ИОФ:

$$\tilde{E}_\Phi \psi(x) = Os - \iint e^{i(\Phi(t, s, x, \xi) - y \cdot \xi)} \tilde{e}(t, s, x, \xi) \psi(y) (2\pi)^{-n} d\xi dy, \tag{4.4}$$

с символом, разлагающимся в асимптотический ряд

$$\tilde{e}(t, s, x, \xi) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu(t, s, x, \xi), \mod C_{t, s}(S^{-\infty}). \tag{4.5}$$

Определим как в [8]

$$g(t, s, x, \xi) = -i \sum_{|\alpha| = 2} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)) \cdot \partial_x^\alpha \Phi(t, s, x, \xi) + \\ + f(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)), \tag{4.6}$$

$$Z = D_t - \sum_{|\alpha| = 1} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)) D_x^\alpha + g(t, s, x, \xi). \tag{4.7}$$

Если $e_{\nu, \Phi}(t, s)$ — ИОФ с символом $e_\nu(t, s, x, \xi)$, то

$$\sigma(Le_{\nu, \Phi}(t, s))(x, \xi) = Ze_\nu + r_\nu(t, s, x, \xi), \tag{4.8}$$

где

$$r_\nu(t, s, x, \xi) \sim -\sum_{|\alpha|\geqslant 2} \frac{1}{\alpha!} \{D_y^\alpha (\lambda^{(\alpha)}(t, x, \bar{\nabla}_x \Phi(t, s, x, y, \xi)) e_\nu(t, s, y, \xi))\}_{y=x},$$

$$\mod C_{t,s}(S^{-\infty}) \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \tag{4.9}$$

$$\bar{\nabla}_x \Phi(t, s, x, y, \xi) = \int_0^1 \nabla_x \Phi(t, s, y + \theta(x-y), \xi)\, d\theta. \tag{4.10}$$

Итак, пусть

$$\begin{cases} Ze_0 = 0, \ Ze_\nu + r_{\nu-1} = 0, \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1, \\ e_0(s, s) = 1, \ e_\nu(s, s) = 0 \quad (\nu = 1, 2 \cdots). \end{cases} \tag{4.11}$$

Согласно (3.24), (3.25) [8] для $e_0(t, s, x, \xi)$, $e_\nu(t, s, x, \xi)$ имеем

$$e_0(t, s, x, \xi) = \exp\left[-i \int_s^t g(\sigma, s, q(\sigma, s, y(t, s, x, \xi), \xi), \xi)\, d\sigma\right], \tag{4.12}$$

$$e_\nu(t, s, x, \xi) = -i \int_0^t r_{\nu-1}(\sigma, s, q(\sigma, s, y(t, s, x, \xi), \xi), \xi) \times$$

$$\times \left[-i \int_\sigma^t g(\sigma', s, q(\sigma', s, y(t, s, x, \xi), \xi), \xi)\, d\sigma'\right] d\sigma \ (\nu = 1, 2, \cdots), \tag{4.13}$$

с помощью которых нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 6. *Если* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_\xi$, *то для всех* $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geqslant M$,

$$e_0(t, s, x, \xi) = 1, \ e_\nu(t, s, x, \xi) = 0 \ (\nu = 1, 2, \cdots). \tag{4.14}$$

Далее, выберем положительную постоянную K так, что

$$K > \varlimsup_{N\to\infty, M\to\infty} \sup_{\substack{x\in R^n, \ t\in[t_\xi, T_1] \\ \xi\in R^n, \ \langle \xi \rangle \geqslant M}} \left\{\frac{\Lambda(t)}{\lambda(t)} \operatorname{Im} f(t, x, \xi)\right\}, \tag{4.15}$$

если же $\operatorname{Im} f(t, x, \xi) = 0$ (*при всех* $t \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$), *то* $K = 0$. *Тогда существуют* N_0, M *такие, что для любых* l, j, α, β *существуют постоянные* $C_{l,j,\alpha,\beta}$, $C_{l,\alpha,\beta}$ *такие, что для* $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ *выполнены неравенства*

$$|D_t^l D_s^j D_\xi^\alpha D_x^\beta e_\nu(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{l,j,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|-\nu} \Lambda^{K+\nu}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^l \times$$

$$\times \Lambda^{-K}(s) \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^j \left|\ln \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(s)}\right|^{l+j+|\alpha|+|\beta|}, \tag{4.16}$$

при всех $\dot{t}_\xi \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geqslant M$, *и неравенства*

$$|D_t^l D_\xi^\alpha D_x^\beta e_\nu(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{l,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{K-|\alpha|-\nu} \Lambda^{K+\nu}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^l \times$$

$$\times (\ln \langle \xi \rangle)^{l+|\alpha|+|\beta|}, \tag{4.17}$$

при всех $0 \leqslant s \leqslant \dot{t}_\xi \leqslant t_\xi \leqslant t \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geqslant M$.

Следствие. Так как $e_\nu \in \bigcap_{0<\varepsilon<1} S\{K+\varepsilon-\nu,\ K,\ -K\}$, $\nu=1, 2, \cdots$, равномерно по $s\in J$, $s\leqslant t$ то, согласно предложению 1, $\bar{e}(t, s, x, \xi)$. из (4.5) существует, удовлетворяет неравенствам (4.16), (4.17) с $\nu=0$, и является символом искомого параметрикса (4.4).

Таким образом, с символом $r_\infty(t, s, x, \xi)\in C_{t,s}(S^{-\infty})$, $s\leqslant t$, имеем

$$\widetilde{L e_\Phi}(t, s, x, D_x)=r_\infty(t, s, x, D_x),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1. \tag{4.18}$$

Замечание. Параметрикс $\bar{E}_\Phi$ можно представить в виде $\widetilde{E}_\Phi(t, s)=A(t, s)+B_\Phi(t, s)$, где $A(t, s)$ — ПДО с символом $\chi(\langle\xi\rangle/ /\langle\xi_t\rangle)(\exp\{i\int_s^t\lambda(\tau, \xi)\,d\tau\}$, $B_\Phi(t, s)$ — ИОФ с символом $(1-\chi(\langle\xi\rangle/ \langle\xi_t\rangle))\ \bar{e}(t, s, x, \xi)$, а функция χ определена в § 1.

С помощью $\bar{E}_\Phi(t, s)$, $R_\infty(t, s)=r_\infty(t, s, x, D_x)$ ф. р. строится обычным образом использованием теории ПДО с кратными символами (см., например, [5]), Полагая $W_1(t, s)=-iR_\infty(t, s)$, $W_{\nu+1}(t, s)= =\int_s^t W_1(t, \theta)\,W_\nu(\theta, s)\,d\theta\ (\nu=1, 2,\cdots)$, мы получаем ф. р. в форме

$$E_\Phi(t, s)=\widetilde{E}_\Phi(t, s)+\int_s^t\widetilde{E}_\Phi(t, \theta)\sum_{\nu=1}^\infty W_\nu(\theta, s)\,d\theta, \tag{4.19}$$

с символом $e(t, s, x, \xi)=\tilde{e}(t, s, x, \xi)+\bar{e}_\infty(t, s, x, \xi)$, где $\bar{e}_\infty(t, s, x, \xi)\in \in C_{t,s}(S^{-\infty})$, $s\in J$, $s\leqslant t$.

Теорема 2. *Выберем постоянную k как в лемме 6. Тогда на $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1$ существует единственный символ $e(t, s, x, \xi)$, удовлетворяющий неравенствам (4.16), (4.17) с $\nu=0$ при соответствующих значениях t, s, x, ξ, и, следовательно, принадлежащий равномерно по $s\in J$, $s\leqslant t$, классу $\bigcap_{0<\varepsilon<1} S\{K+\varepsilon,\ K,\ -K\}$, так что ИОФ $E_\Phi(t, s)=e_\Phi(t, s, x, D_x)$ с фазовой функцией из леммы 5 является фундаментальным решением задачи Коши для L (4.1) в области $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, т. е.*

$$\begin{cases} LE_\Phi(t, s)=0,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_1, \\ E_\Phi(s, s)=I\ (\textit{тождественный оператор}). \end{cases} \tag{4.20}$$

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось только проверить единственность ф. р. Это будет проделано ниже.

Рассмотрим теперь задачу Коши L (4.1) в области $0\leqslant t\leqslant s\leqslant T$. Построим предварительно параметрикс $\bar{E}_\Phi(t, s)$, т. е. ИОФ такой, что

$$\begin{cases} L\bar{E}_\Phi(t, s)=0 \mod C_{t,s}(S^{-\infty}),\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T_1, \\ \bar{E}_\Phi(s, s)=I\ (\text{тождественный оператор}), \end{cases} \tag{4.21}$$

где $\Phi(t, s, x, \xi)$ — фазовая функция из леммы 5, а символ $\tilde{e}(t, s, x, \xi)$ разлагается в ряд (4.5). Справедлива

Лемма 7. *Если* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant t_\xi$, *то для всех* $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle\xi\rangle \geqslant M$

$$e_0(t, s, x, \xi) = 1, \; e_\nu(t, s, x, \xi) = 0 \; (\nu = 1, 2, \cdots). \tag{4.22}$$

Далее, выберем положительную постоянную K' так, что

$$K' > \lim_{N\to\infty,\, M\to\infty} \; {}^{n}\sup_{\substack{x\in R,\; t\in[t_\xi, T_1]\\ \xi\in R^n,\; \langle\xi\rangle > M}} \left\{ -\frac{\Lambda(t)}{\lambda(t)} \operatorname{Im} f(t, x, \xi) \right\}, \tag{4.23}$$

если же $\operatorname{Im} f(t, x, \xi) = 0$ (*при всех* $t \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$), *то* $K' = 0$. *Тогда существуют N_0, M такие, что для любых l, j, α, β существуют постоянные $C_{l,j,\alpha,\beta}$, $C_{j,\alpha,\beta}$ такие, что для* $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ *выполнены неравенства*

$$|D_t^l D_s^j D_\xi^\alpha D_x^\beta e_\nu(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{l,j,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{-|\alpha|-\nu} \Lambda^{K'+\nu}(s) \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^j \times$$

$$\times \Lambda^{-K'}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^l \cdot \left| \ln \frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)} \right|^{l+j+|\alpha|+|\beta|}, \tag{4.24}$$

при всех $t_\xi \leqslant t \leqslant s \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle\xi\rangle \geqslant M$, *и неравенства*

$$|D_s^j D_\xi^\alpha D_x^\beta e_\nu(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{j,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{K'-|\alpha|-\nu} \Lambda^{K'+\nu}(s) \times$$

$$\times \left(\frac{\lambda(s)}{\Lambda(s)}\right)^j (\ln \langle\xi\rangle)^{j+|\alpha|+|\beta|}, \tag{4.25}$$

при всех $0 \leqslant t \leqslant t_\xi \leqslant t_\xi \leqslant s \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle\xi\rangle \geqslant M$.

Следствие. Так как $e_\nu \in \bigcap_{0<\varepsilon<1} S_s[K'+\varepsilon-\nu, K', -K']$, $\nu = 1, 2, \cdots$, равномерно по $t \in J$, $t \leqslant s$, то, согласно предложению 1, $\tilde{e}(t, s, x, \xi)$ из (4.5) существует, удовлетворяет неравенствам (4.24), (4.25) с $\nu = 0$, и является символом искомого параметрикса (4.21).

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству леммы 6, и мы его не приводим. Теперь уже нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Выберем постоянную K' как в лемме 7. Тогда на $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T_1$ существует единственный символ $e(t, s, x, \xi)$, удовлетворяющий неравенствам (4.24), (4.25) с $\nu = 0$ при соответствующих значениях t, s, x, ξ, и, следовательно, принадлежащий равномерно по $t \in J$, $t \leqslant s$, классу $\bigcap_{0<\varepsilon<1} S_s[K'+\varepsilon, K', -K']$, так что* ИОФ $E_\Phi(t, s) = e_\Phi(t, s, x, D_x)$ *с фазовой функцией из леммы 5 является фундаментальным решением задачи Коши для L (4.1) в области $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T_1$, т. е.*

$$\begin{cases} LE_\Phi(t, s) = 0, \; 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T_1, \\ E_\Phi(s, s) = I \; (\text{тождественный оператор}). \end{cases} \tag{4.26}$$

Единственность в теореме 2 (соответственно, в теореме 3) доказывается рассмотрением сопряженной задачи Коши для формально сопряженного оператора и использованием построенного в теореме 3 (соответственно в теореме 2) ф. р..

Замечания. (i) Для всех $0 \leqslant s, \tau, t \leqslant T_1$ имеет место $E_\Phi(t, s) = E_\Phi(t, \tau) E_\Phi(\tau, s)$. (ii) Очевидно, что „потеря гладкости" в теоремах 2, 3 равна $K+\varepsilon$, $K'+\varepsilon$, соответственно, где ε — любое положительное число. (iii) При $\operatorname{Im} f(t, x, \xi) = 0$ задачу Коши для L (4.1) можно исследовать и обычным энергетическим методом, и, в частности, получить оценки производных $D_x^\alpha u$ решения $u(t, x)$.

Следствие 1. Задача Коши (с L из (4.1))

$$\begin{cases} Lu = \varphi(t) \text{ на } [0, T_1] \\ u|_{t=s} = \psi \quad (0 \leqslant s \leqslant T_1), \end{cases} \tag{4.27}$$

с $\varphi(t) \in C_t(J;\ S(R^n))$, $\psi \in S(R^n)$ имеет единственное решение $u(t, s, x)$, и оно представимо в виде

$$u(t, s, x) = E_\Phi(t, s)\psi(x) + i\int_s^t E_\Phi(t, \sigma)\varphi(\sigma, x)\, d\sigma. \tag{4.28}$$

Следствие 2. Пусть $m \times m$ $(m \geqslant 2)$ матричный диагональный оператор L_2 имеет вид

$$L_2 = D_t - D(t) + F(t), \tag{4.29}$$

где $D_{ij}(t) = \delta_{ij}\lambda_i(t, x, D_x)$, $F_{ij}(t) = \delta_{ij} f_i(t, x, D_x)$, а λ_i, f_i, $i = 1, \cdots, m$, как в теоремах 2, 3, и пусть $E_{j,\Phi_j}(t, s)$ — ф. р. задачи Коши для $L_j = D_t - \lambda_j(t, x, D_x) + f_j(t, x, D_x)$. Тогда ф. р. задачи Коши

$$\begin{cases} L_2 U = \Phi(t) \text{ на } [0, T_1] \\ U|_{t=s} = \Psi \quad (0 \leqslant s \leqslant T_1), \end{cases} \tag{4.30}$$

существует, единственно и имеет вид

$$E_2(t, s) = \begin{bmatrix} E_{1,\Phi_1}(t, s) & & 0 \\ & \ddots & \\ & & E_{m,\Phi_m}(t, s) \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

Приведем, наконец, один, почти очевидный, факт.

Предложение 3. *Пусть $a(t, x, \xi)$ — символ, удовлетворяющий оценкам*

$$|D_t^j D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, x, \xi)| \leqslant C_{j,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m_1 - |\alpha|} \lambda^{m_2}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3 + j} (\ln\langle\xi\rangle)^{|\alpha+\beta|+j} \tag{4.32}$$

при всех $t \in [t_\xi, T_1]$, а $r(t, x, \xi) \in \mathrm{H}\{m_1', m_2', m_3'\}$, причем $a(t, x, \xi) = r(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$. И пусть $A_\Phi = a_\Phi(t, x, D_x)$ — ИОФ с фазовой функцией из леммы 5, а $R = r(t, x, D_x)$. Тогда как $R_1 = A_\Phi R$, так и $R_2 = RA_\Phi$ являются ПДО с символами

$$r_j(t, x, \xi) \in \mathrm{H}\{m_1 + m_1', m_2 + m_2', m_3 + m_3'\},\ j = 1, 2, \tag{4.33}$$

и $r_j(t, x, \xi) = 0$ при $t \in [0, t_\xi]$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Обозначим $\tilde{a}(t, x, \xi) = e^{i(\Phi(t, x, \xi) - x\cdot\xi)}\, a(t, x, \xi)$. Тогда при $t > t_\xi$

$$|D_t^j D_\xi^\alpha D_x^\beta \tilde{a}(t, x, \xi)| \leqslant C_{j,\alpha,\beta} < \xi >^{m_1-|\alpha|} \lambda^{m_2}(t)(\Lambda(t) < \xi >)^{|\alpha+\beta|+j} \times$$
$$\times \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3+j} (\ln < \xi >)^{|\alpha+\beta|+j}.$$

Покажем, что для любых ν, γ, β, j,

$$|D_\xi^\gamma D_x^\beta D_t^j \tilde{a}^{(\alpha)}(t, x, \xi)) r_{(\alpha)}(t, x, \xi)| \leqslant C_{\gamma,\beta,j,\nu} < \xi >^{m_1+m_1'-\nu-|\alpha+\gamma|} \times$$
$$\times \lambda^{m_2+m_2'-\nu}(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3+m_3'+\nu+j}. \tag{4.34}$$

Действительно, так как $r \in H\{m_1', m_2', m_3'\}$, то для любого τ имеем

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta D_t^j (\Lambda(t) < \xi > \ln < \xi >)^\tau r(t, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,j} < \xi >^{m_1'-\nu-|\alpha|} \lambda^{m_2'-\tau}(t) \times$$
$$\times \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^{m_3'+\nu+j} (< \xi > \Lambda(t))^{-2\tau} (< \xi > \Lambda(t) \ln < \xi >)^\tau,$$

и поскольку $(< \xi > \Lambda(t))^{-\tau} \leqslant c(\ln < \xi >)^{-\tau}$. при $\tau > 0$, $t \geqslant t_\xi$, то получаем (4.34). Итак, для любого τ $(< \xi > \Lambda(t) \ln < \xi >)^\tau r_{(\alpha)} \in H\{m_1', m_2'$ $m_3'\}$, откуда $\tilde{a}^{(\alpha)} r_{(\alpha)} \in H\{m_1 + m_1' - |\alpha|, m_2 + m_2', m_3 + m_3'\}$. Далее,

$$r_1(t, x, \xi) = \sum_{|\alpha| < l} \frac{1}{\alpha!} \tilde{a}^{(\alpha)}(t, x, \xi) r_{(\alpha)}(t, x, \xi) +$$
$$+ l \sum_{|\alpha| = l} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^{l-1} h_{\alpha,\theta}(t, x, \xi) d\theta,$$

где для любого целого $\nu \geqslant 0$

$$h_{\alpha,\theta}(t, x, \xi) = Os - \iint e^{iy\cdot\eta} < \eta >^{-\nu} \tilde{a}^{(\alpha)}(t, x, \xi + \theta\eta) \times$$
$$\times < D_y >^\nu r_{(\alpha)}(t, x + y, \xi) d\eta\, dy (2\pi)^{-n}.$$

Но семейство $\{h_{\alpha,\theta}(t, x, \xi\}_{|\alpha|=l,\, 0<\theta<1}$ ограничено в $H\{m_1 + m_1', m_2 + m_2', m_3 + m_3'\}$, откуда получаем

$$r_1(t, x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \tilde{a}^{(\alpha)}(t, x, \xi) r_{(\alpha)}(t, x, \xi), \bmod C_t(S^{-\infty}) \tag{4.35}$$

и, следовательно, (4.33). Аналогично рассматривается R_2. Предложение доказано.

§ 5. Фундаментальное решение задачи Коши для системы $L_1 U = \Phi$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} L_1 U = \Phi(t) \text{ на } [0, T_1] \\ U|_{t=s} = \Psi, \end{cases} \tag{5.1}$$

для матричного ПДО L_1 вида (2.8), описанного в теореме 1. Ф. р. задачи (5.1) будем искать в виде

$$E_1(t, s) = E_2(t, s)(I + Q(t, s)) + Q_\infty(t, s), \tag{5.2}$$

где $Q_\infty(t, s) \in C_{t,s}(S^{-\infty})$. Для операторов L_1, у которых в лемме 1 $Q(m-2)=0$, $E_2(t, s)$ можно выбрать из следствия 2 § 4, и предложение 3 окажется достаточным для дальнейшего построения. В общем же случае мы воспользуемся следующим вариантом теоремы Ю. В. Егорова [18], [19]. Введем бозначение

$$K(t, \xi) = \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} + Q(m-2)\,\frac{\lambda(t)\ln^2\lambda(t)}{\Lambda^2(t)<\xi>}.$$

Предложение 4. *Пусть $E_\Phi(t, s)$, $E_\Phi(s, t)$ — ф. р., задаваемые теоремами 2, 3, соответственно, с $K'=K=0$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Предположим, что $r(t, x, \xi)/K(t, \xi) \in S[0, 0, 0]$, и $r(t, x, \xi)=0$ при $t \in [0, t_\xi]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$. Тогда $E_\Phi(s, t)\, r(t, x, D_x)\, E_\Phi(t, s)$ есть ПДО $r_1(t, s, x, D_x)$ с символом $r_1(t, s, x, \xi)$ таким, что $r_1(t, s, x, \xi)=0$ при $t \in [0, t_\xi]$, и удовлетворяющим оценкам*

$$|D_t^l D_\xi^\alpha D_x^\beta r_1(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{l,\alpha,\beta} K(t, \xi)<\xi>^{-|\alpha|}\left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^l \times$$

$$\times(\ln<\xi>)^{l+|\alpha|+|\beta|} \tag{5.3}$$

при всех $t \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$, равномерно по $s \in J$, $s \leqslant t$.

Доказательство. Достаточно повторить схему второго доказательства теоремы Ю. В. Егорова, изложенного на стр. 172—175 [19], либо воспользоваться соответствующими теоремами из [5]. Отметим здесь только то, что главный символ оператора $r_1(t, s, x, D_x)$ в точке (x_0, ξ_0) равен $r(t, s, y_0, \eta_0)$, где точка (y_0, η_0) получается из (x_0, ξ_0) движением по траектории потока, порожденного векторным полем (3.1) за время от s до t. Подробности мы оставляем читателю.

Вернемся к (5.2). Здесь $Q(t, s)$ — ПДО, который будет построен как решение задачи Коши ($R_0(t, s) = R(t, s)$)

$$\begin{cases} D_t Q(t, s) + R(t, s)\, Q(t, s) + R_0(t, s) \in C_{t,s}(S^{-\infty}), \\ Q(s, s)=0 \quad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1), \end{cases} \tag{5.4}$$

или эквивалентного интегрального уравнения с ПДО-значным ядром

$$Q(t, s) + i\int_s^t R(\tau, s)\, Q(\tau, s)\, d\tau + i\int_s^t R_0(\tau, s)\, d\tau \in C_{t,s}(S^{-\infty}),\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1. \tag{5.5}$$

Справедливо следующее

Предложение 5. *Пусть $R(t, s)$, $R_0(t, s)$ — матричные ПДО с символами $r(t, s, x, \xi)$, $r_0(t, s, x, \xi)$, соответственно. Предположим, что с некоторыми p, K, m для любых α, β с положительными постоянными $C_{\alpha,\beta}$, C_0 при всех $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$ выполнены неравенства*

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta r(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta} <\xi>^{-|\alpha|} (\ln<\xi>)^{|\alpha+\beta|} g(t, \xi), \tag{5.6}$$

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta r_0(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta} < \xi >^{p-|\alpha|}(\ln < \xi >)^{|\alpha+\beta|} g(t, \xi), \quad (5.6_0)$$

$$\int_0^{T_1} g(\tau, \xi)\, d\tau \leqslant K \ln < \xi >, \quad g(t, \xi) \leqslant C_0 < \xi >^m. \quad (5.7)$$

Тогда существует решение $Q(t, s)$ *задачи* (5.4) *с символом* $q(t, s, x, \xi)$, *удовлетворяющим при всех* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $< \xi > \geqslant M$ *неравенствам*

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta q(t, s, x, \xi)| \leqslant C'_{\alpha,\beta} < \xi >^{K+p-|\alpha|}(\ln < \xi >)^{2|\alpha+\beta|}, \quad (5.8)$$

и, следовательно, принадлежащим классу $q \in C_t([s, T_1]; \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K+p+\varepsilon}) \cap \cap C_t^1([s, T_1]; \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K+p+m+\varepsilon})$. *Это решение единственно по модулю* $C_t^1(S^{-\infty})$.

Доказательство. Выберем собственные представители классов эквивалентности операторов $R(t, s)$, $R_0(t, s)$ и построим собственный оператор $Q(t, s)$. Достаточно рассмотреть случай $p = 0$. Решение будем искать в виде

$$q \sim q_0 + q_1 + q_2 + \cdots \pmod{C_t^1(S^{-\infty})}, \quad (5.9)$$

где

$$D_t q_k + r q_k + r_k = 0, \quad q_k(s, s) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \quad (5.10)$$

$$r_k = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=k-l} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha r)(D_x^\alpha q_l), \quad k = 1, 2, \cdots, \quad (5.11)$$

$$q_k = -i \int_s^t r_k(s_1)\, ds_1 + \sum_{l=2}^{\infty} (-i)^l \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots$$
$$\cdots \int_s^{s_{l-1}} ds_l\, r(s_1) \cdots r(s_{l-1})\, r_k(s_l). \quad (5.12)$$

Введем оператор $(Ir)(t) = \int_s^t r(s_1)\, ds_1$. Если g — скалярная функция, то $\underbrace{Ig\, Ig \cdots Ig}_{l} = (Ig)^l/l!$. Перепишем (5.12) в виде

$$q_k = -i\, Ir_k + \sum_{l=2}^{\infty} (-i)^l \underbrace{Ir\, Ir \cdots Ir}_{l}\, Ir_k.$$

Лемма 8. *Для любых* α, β, $k\,(k=1, 2, \cdots)$ *имеют место неравенства*

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta r_k(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,k} < \xi >^{-|\alpha|-k} g(t, \xi)(\ln < \xi >)^{|\alpha+\beta|+2k} \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+2k-1}}{l!} (Ig)^l, \quad (5.13)$$

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta q_k(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,k} < \xi >^{-|\alpha|-k}(\ln < \xi >)^{|\alpha+\beta|+2k} \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+2k}}{(l+1)!} (Ig)^{l+1}. \quad (5.14)$$

Доказательство проведем индукцией по k. Так как из (5.12)

$$q_0 = \sum_{l=1}^{\infty} (-i)^l \underbrace{Ir\, Ir \cdots Ir}_{l} r_0,$$

то

$$\| D_\xi^\alpha D_x^\beta q_0 \| \leqslant C_{\alpha,\beta} < \xi >^{-|\alpha|} (\ln < \xi >)^{|\alpha+\beta|} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|}}{l!} (Ig)^l.$$

Осуществим переход к $k = 1$. Так как

$$r_1 = \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha r)(D_x^\alpha q_0),$$

то

$$\| D_\xi^\alpha D_x^\beta r_1 \| \leqslant C_{\alpha,\beta} < \xi >^{-|\alpha|-1} (\ln < \xi >)^{2+|\alpha+\beta|} g \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+1}}{l!} (Ig)^l,$$

откуда

$$< \xi >^{|\alpha|+1} (\ln < \xi >)^{-2-|\alpha+\beta|} \| D_\xi^\alpha D_x^\beta q_1 \| \leqslant C_{\alpha,\beta} \Big\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{|\alpha+\beta|+1}}{(l+1)!} (Ig)^{l+1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{|\alpha+\beta|} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^i \underbrace{Ig\, Ig \cdots Ig}_{l} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1-i}}{m!} (Ig)^m \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha,\beta} \Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1}}{(m+1)!} (Ig)^{m+1} + \sum_{i=0}^{|\alpha+\beta|} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1-i}}{(m+l)!} (Ig)^{m+l} \Big\}.$$

Но при $i > 0$ имеем

$$\sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1-i}}{(m+l)!} (Ig)^{m+l} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} (l-1)^i \sum_{k=l}^{\infty} \frac{(k+1-l)^{|\alpha+\beta|+1-i}}{(k+1)!} (Ig)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (Ig)^{k+1} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{k} (l-1)^i (k+1-l)^{|\alpha+\beta|+1-i} \leqslant C_{\alpha,\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^i k^{|\alpha+\beta|+2-i}}{(k+1)!} (Ig)^{k+1} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha,\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{|\alpha+\beta|+2}}{(k+1)!} (Ig)^{k+1}.$$

Если же $i = 0$, то

$$\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1}}{(m+l)!} (Ig)^{m+l} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1}}{(m+1)!} (Ig)^{m+1} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+1}}{(m+l)!} (Ig)^{m+l} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (Ig)^{k+1} \sum_{l=1}^{k} (k+1-l)^{|\alpha+\beta|+1} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha,\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{|\alpha+\beta|+2}}{(k+1)!} (Ig)^{k+1}.$$

Таким образом, (5.14) при $k = 1$ доказано. Предположим теперь, что для k (5.13), (5.14) доказаны, и докажем их для $k+1$. Имеем

$$r_{k+1} = \sum_{l=0}^{k} \sum_{|\gamma|=k+1-l} \frac{1}{\gamma!} (\partial_\xi^\gamma r)(D_x^\gamma q_l),$$

откуда

$$\left\| D_\xi^\alpha D_x^\beta r_{k+1} \right\| = \left\| \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \sum_{l=0}^{k} \sum_{|\gamma|=k+1-l} \frac{1}{\gamma!} \frac{\alpha!}{\alpha_1!\,\alpha_2!} \frac{\beta!}{\beta_1!\,\beta_2!} \times \right.$$

$$\left. \times (\partial_\xi^{\gamma+\alpha_1} D_x^{\beta_1} r)(\partial_\xi^{\alpha_2} D_x^{\gamma+\beta_2} q_l) \right\|.$$

Поэтому рассмотрим при $l \neq 0$ норму следующей матрицы:

$$\|(\partial_\xi^{\gamma+\alpha_1} D_x^{\beta_1} r)(\partial_\xi^{\alpha_2} D_x^{\gamma+\beta_2} q_l)\| \leqslant C_{\gamma,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,l} < \xi >^{-|\gamma+\alpha_1+\alpha_2|-l} g \times$$

$$\times (\ln < \xi >)^{(2l+|\alpha+\beta|+2|\gamma|)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha_2+\gamma+\beta_2|+2l}}{(m+1)!} (Ig)^{m+1} = C \ldots < \xi >^{-|\alpha|-(k+1)} g \times$$

$$\times (\ln < \xi >)^{|\alpha+\beta|+2(k+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{(k+1)+l+|\alpha+\beta|-|\alpha_1+\beta_1|}}{(m+1)!} (Ig)^{m+1} \leqslant$$

$$\leqslant C \ldots < \xi >^{-|\alpha|-(k+1)} (\ln < \xi >)^{|\alpha+\beta|+2(k+1)} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1}}{m!} (Ig)^m.$$

Если же $l = 0$, то

$$\|(\partial_\xi^{\gamma+\alpha_1} D_x^{\beta_1} r)(\partial_\xi^{\alpha_2} D_x^{\gamma+\beta_2} q_0)\| \leqslant C_{\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2} < \xi >^{-|\alpha|-(k+1)} g \times$$

$$\times (\ln < \xi >)^{|\alpha+\beta|+2(k+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha_2+\gamma+\beta_2|}}{m!} (Ig)^m \leqslant C \ldots < \xi >^{-|\alpha|-(k+1)} g \times$$

$$\times (\ln < \xi >)^{|\alpha+\beta|+2(k+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1}}{m!} (Ig)^m.$$

Таким образом, (5.13) доказано. Рассмотрим теперь q_{k+1}:

$$< \xi >^{|\alpha|+(k+1)} (\ln < \xi >)^{-|\alpha+\beta|-2(k+1)} \|D_\xi^\alpha D_x^\beta q_{k+1}\| \leqslant C_{\alpha,\beta,k} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+(2k+1)-1}}{(m+1)!} (Ig)^{m+1} + \sum_{l=0}^{|\alpha+\beta|} \sum_{l=2}^{\infty} (l-1)^l \sum \frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)-1-l}}{(m+l)!} (Ig)^{m+l} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C \ldots \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{|\alpha+\beta|+2(k+1)}}{(m+1)!} (Ig)^{m+1}.$$

Лемма доказана.

Окончание доказательства предложения 5. Из (5.14) следует, что

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta q_k(t, s, x, \xi)\| \leqslant C_{\alpha,\beta,k} < \xi >^{K-k-|\alpha|} (\ln < \xi >)^{2(|\alpha+\beta|+2k)} \qquad (5.15)$$

равномерно по $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1$. Отсюда $q_k \in C_t([s, T_1]; \bigcap_{0<\varepsilon<1} S^{K+\varepsilon-k})$.

Для доказательства единственности заметим, что сопряженная к (5.4) задача Коши удовлетворяет тем же условиям (5.6)—(5.7), так что достаточно воспользоваться стандартными рассуждениями (см., например, стр. 173 [21]). Предложение доказано.

Замечание. В предложении осуществлено построение экспоненты матричного ПДО в том случае, когда он не удовлетворяет условиям ни одной из известных нам теорем (см., например, [21]). Интересно выяснить, можно ли сформулировать и доказать в теории полугрупп подобное предложение средствами функционального анализа.

Итак, если $Q(m-2)=0$, выбор $E_2(t, s)$ уже указан. В общем же случае через $E_2(t, s)$ обозначим ф. р. задачи Коши для диагонального ПДО с символом

$$\delta_{ij}(\tau - \operatorname{Re}\varphi_j(t, x, \xi) + \operatorname{Re} f_j(t, x, \xi)), \quad i, j = 1, \cdots, m$$

(здесь δ_{ij} — символ Кронекера, τ—двойственная к t переменная), так что соответствующие $E_{j,\,\Phi_j}(t, s)$ имеют символы $e_j(t, s, x, \xi)$, удовлетворяющие оценкам (4.16), (4.17), (4.24), (4.25) с $K=K'=\nu=0$. Очевидно также, что вместо ф. р. можно воспользоваться параметриксами. В первом случае получаем ядро $R(t, s)=E_2(s, t)\,R(t)\,E_2(t, s)$, во втором, допуская некоторую вольность в обозначениях, $-R(t, s)= = E_2(s, t)[-\operatorname{Im} D(t)+\operatorname{Im} F(t)+R(t)]\,E_2(t, s)$. В двух случаях в (5.4), (5.5) $R_0(t, s)=R(t, s)$. В силу предложений 3, 4 выполнены условия предложения 5, так как нетрудно убедиться в том, что (см. [3])

$$\int\limits_0^{t_\xi} \left(\rho(t, \xi) + \frac{\rho_t(t, \xi)}{\rho(t, \xi)} \right) dt \leqslant C \ln \langle \xi \rangle, \tag{5.16}$$

$$\int\limits_{t_\xi}^{T} K(t, \xi)\, dt \leqslant C \ln \langle \xi \rangle. \tag{5.17}$$

Таким образом, нами доказана следующая основная

Теорема 4. *Пусть L и L—операторы вида* (2.4), (2.2), соответственно, *и пусть $E_1(t, s)$—фундаментальное решение задачи Коши для L_1* (2.8). *Тогда фундаментальные решения $E(t, s)$ и $E_0(t, s)$ задач Коши для L и L_0 могут быть найдены в форме*

$$\left| \begin{array}{l} E(t, s) = N(t)\, E_1(t, s)\, N^{\#}(t) + R_\infty(t, s), \\ \sigma(R_\infty(t, s))(x, \xi) \in C_{t,s}(S^{-\infty}),\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1, \end{array} \right. \tag{5.18}$$

и

$$\left| \begin{array}{l} E_0(t, s) = M^{\#}(t)\, N(t)\, E_1(t, s)\, N^{\#}(t)\, M(t) + \widetilde{R}_\infty(t, s), \\ \sigma(\widetilde{R}_\infty(t, s))(x, \xi) \in C_{t,s}(S^{-\infty})\ (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_1), \end{array} \right. \tag{5.19}$$

соответственно, где $M(t)$, $N(t)$, $M^{\#}(t)$, $N^{\#}(t)$ описаны в § 2. Более того $E(t, s)$ и $E_0(t, s)$ представляются в виде сумм ИОФ с фазовыми функциями $\Phi_j(t, s, x, \xi)$, $j=1, \cdots, m$, и с символами, описанными выше.

С помощью теоремы 4 и преобразования $H(t)$ § 2 легко доказывается основная теорема настоящей работы.

Теорема 5. *Пусть оператор L* (0.1) *удовлетворяет условиям* (0.3)—(0.7). *Тогда решение задачи Коши* (0.1), (0.2) *с $f(t) \in B_t(S)$ и $\psi_j \in S$, $j=0, 1, \cdots, m-1$, существует, единственно на $[s, T] \times R^n$ $(0 \leqslant s < T)$ и может быть записано в виде*

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{m-1} E_0^{1, j+1}(t, s, x, D_x)\,\psi_j + i\int_s^t E_0^{1, m}(t, \sigma, x, D_x)\, f(\sigma, x)\, d\sigma,$$

где $E_0^{1, j}$ *есть* $(1, j)$*-элемент фундаментального решения* E_0 *задачи Коши оператора*

$$D_t + \begin{bmatrix} 0, & 1, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & 1\cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_{0, \alpha}(t, x)\, D_x^{\alpha}, & \sum\limits_{|\alpha| \le m-1} a_{1, \alpha}(t, x)\, D_x^{\alpha}, & \cdots, & \sum\limits_{|\alpha| \le 1} a_{m-1, \alpha}(t, x)\, D_x^{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Как следствие из этой теоремы можно получить корректность задачи Коши, доказанную в [2], [3], а также уточнить потерю гладкости. Далее, построенный параметрикс и фундаментальное решение позволяют доказать необходимость для C^∞-корректности задачи Коши условий (0.6), (0.7), и исследовать вопрос распространения и ветвления особенностей в той полноте, как это сделано в [10], [14], [20], [17].

В заключение автор выражает благодарность всем участникам руководимого А. Б. Нерсесяном семинара за полезные обсуждения настоящей работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 10. VII. 1985

Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Բազմապատիկ բնութագրիչներով օպերատորների համար Կոշու խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը և նրա հետ կապված պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների դասը *(ամփոփում)*

Հոդվածում կառուցվում է Կոշու խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը փոփոխական պատիկությամբ բնութագրիչ արմատներով բարձր կարգի հիպերբոլական տիպի օպերատորների համար։ Ենթադրվում է, որ օպերատորների ցածր կարգի անդամների գործակիցները բավարարում են որոշ պայմանների, որոնք հանդիսանում են C^∞*-կոռեկտության անհրաժեշտ պայմաններ բավականին ընդհանուր դասերի հավասարումների համար [3]։ Ֆունդամենտալ լուծման կառուցումը կատարվում է օպերատորի սիմվոլի որոշման տիրույթը երկու գոտիների տրոհման և t պարամետրից կախված համապատասխան ձևով որոշված պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների և Ֆուրյեի ինտեգրալ օպերատորների որոշ դասերի օգնությամբ։ Նշված դասերը ընդհանրացնում են Բուտե դե Մոնվելի հայտնի պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների դասերը, որոնց սահմանումը հիմնված է կվազիհամասեռության գաղափարի վրա։*

K. H. YAGDJIAN. *Fundamental solutions for a degenerate hyperbolic operators and related pseudo-differential operators* (summary)

The paper deals with the operators which have variable multiplicity characteristics. It is assumed that the coefficients satisfy some conditions which in general are necessary for C^∞-well-posedness of the Cauchy problem [3]. We construct the fundamental solutions of the Cauchy problem by means of zonal subdivision of the cotangent bundle. Some classes of pseudo-differential operators which are generalization of the well-known Boutet de Monvel classes are used. (Engl. transl. see Souviet J. of Contemporary Math. Anal., 1986, v. 21, n. 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. А. Ягджян.* О корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений. Изв. АН АрмССР, «Математика», 15, № 6, 1980, 475—487. (Engl. transl.:Souviet J. of Contemporary Math. Anal., 1980, v. 15, n. 6, 54—65).
2. *S. Tarama.* Sur le probleme de Cauchy pour une class des operateurs differetieles du type faiblement hyperbolique, Jour. Math. Kyoto Univ., 1982, v. 22, n. 2, 333—368.
3. *К. А. Ягджян.* Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками. Изв. АН АрмССР, «Математика», 20, № 1, 1985, 3—25 (Engl. transl.: Souviet J. of Contemporary Math. Anal. 1985, v. 20, n. 1, 1—23).
4. *L. Boutet de Monvel.* Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. Gomm. Pure Appl. Math., 1974, v. 27, 585—639.
5. *H. Kumano-go.* A calculus of Fourier integral operators on R^n and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type, Comm. Partial Diff. Equation, 1976, v. 1, n. 1, 1—44.
6. *A. Yoshikawa.* Constaction of a parametrix for the Cauchy problem of some, weakly hyperbolic equation I, II, III, Hokkaido Math. J., 1977, v. 6, n. 2, 313—344, 1978, v. 7, n. 1, 1—26, n. 1, 127—141.
7. *H. Kumano-go.* Fundamental solution for a hyperbolic system with diagonal principal part. Comm. Partial Diff. Equation, 1979, v. 4, n. 9, 959—1015.
8. *K. Shinkai.* On the fundamental solution for a degenerate hyperbolic system. Osaka J. Math., 1981, v. 18, n. 1, 257—288.
9. *K. Taniguchi and Y. Tozaki.* A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities, Math. Japonica, 1980, v. 25, n. 3, 279—300.
10. *K. Shinkai.* Branching of singularities for a degenerator hyperbolic system, Comm, Partial Diff. Equation, 1982, v. 7, n. 5, 581—607.
11. *K. Amano and G. Nakamura.* Branching of singularities for degenerate hyperbolic operators, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 1984, v. 20, n. 2, 225—275.
12. *A. Yoshikawa.* Fundamental solutions to the Cauchy problem of some weakly hyperbolic equation, Proc. Japan Acad., 1977, v. 53, 103—107.
13. *N. Hanges.* Parametrices and propagation of singularities for operators with noninvolutive charecteristics, Indiana Univ. Math. J., 1979, v. 28, n. 1, 87—97.
14. *В. Я. Иврий.* О волновых фронтах решений некоторых псевдодифференциальных уравнений, Функц. анализ и его прилож., 1976, 10, № 2, 71—72.
15. *Y. Morimoto.* Fundamental solutions for a hyperbolic equations with involutive charecteristics of variable multiplicity, Comm. Partial Diff. Equation, 1979, v. 4, n. 6, 609—643.
16. *C. Iwasaki and Y. Morimoto.* Propagation of singularities of solutions for a hyperbolic system with nilpotent charecteristics, I, II, Comm. in PDE v. 7, n. 7, 1982, 743—794, Comm. in PDE, v. 9, n. 15, 1984, 1407—1436.
17. *W. Ichinose.* Propagation of singularities of solutions for a hyperbolic system with double characteristics, Osaka J. Math., 1982, v. 19, n. 1, 171—187.
18. *Ю. В. Егоров.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа, М., «Наука», 1984.
19. *М. Тейлор.* Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1985.
20. *Г. Р. Александрян.* Параметрикс и распространение волнового фронта решения задачи Коши для одного модельного уравнения, Изв. АН АрмССР, «Математика», 1984, 19, № 3, 219—232 (Engl. transl.: Souviet J. of Contemporary Math. Anal, 1984, v. 19, n. 3, 33—46).
21. *Ф. Трев.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, т. 1, 2, М., «Мир», 1984.