ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 3, 1986 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.988

М. Г. КРЕЙН, Ю. Л. ШМУЛЬЯН

# ОБ ОДНОМ ДОПОЛНЕНИИ К СТАТЬЕ «УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА—ХОПФА, ЯДРА КОТОРЫХ ДОПУСКАЮТ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ ЭКСПОНЕНТЫ»*

В 1952 г. Д. В. Линдлей [6], занимаясь одним вопросом теории очередей, получил теорему, которая в упрощенном виде может быть сформулирована следующим образом:

Теорема L. Пусть функция $k(t)$ $(t \in R)$ обладает свойствами:

$$k(t) \geqslant 0, \quad J_0 := \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |t|\, k(t)\, dt < \infty. \tag{1}$$

Тогда уравнение

$$\varphi(t) - \int_{0}^{\infty} k(t-s)\, \varphi(s)\, ds = 0 \tag{$2_+$}$$

либо имеет единственное **P**-решение, либо ни одного **P**-решения, в зависимости от того будет ли

$$J_1 := \int_{-\infty}^{\infty} tk(t)\, dt < 0 \text{ или } > 0.$$

Здесь **P**-решением уравнения $(2+)$ называется функция $\varphi$, удовлетворяющая этому уравнению, неубывающая**, и такая, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = 1$.

В работах [3, 4] теорема **L** была получена чисто аналитическими средствами.

В нашей статье [5] исследовалось интегральное уравнение $(2+)$ и союзное уравнение

$$\varphi(t) - \int_{0}^{\infty} k(s-t)\, \varphi(s)\, ds = 0 \tag{$2_-$}$$

в случае функции $k(t)$ специального вида:

---

* См. [5].

** У Линдлея [6] дополнительно требовалось, чтобы функция была непрерывной справа. В нашем случае это требование выполняется автоматически.

$$k(t) = k_\sigma(t) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-tu}\, d\sigma(u) \quad (t > 0), \\ -\int_{-\infty}^0 e^{-tu}\, d\sigma(u) \quad (t < 0), \end{cases} \tag{3}$$

где $\sigma$ не убывает на $R_+$, не возрастает на $R_-$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u} < \infty.$$

Естественно, что для специальных ядер $k_\sigma$ вместо теоремы L можно сформулировать более полную теорему, а именно, для таких ядер в [5] была установлена

Теорема 0.1. Пусть для $k = k_\sigma$ выполняются условия (1), а интеграл

$$J_1 := \int_{-\infty}^{\infty} t k(t)\, dt \left( = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u^2} := s_2 \right) \tag{4}$$

абсолютно сходится.

а) Если $J_1 < 0$, то уравнение (2+) имеет решение вида

$$\varphi_+(t) = 1 + \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ut}}{u}\, d\rho_+(u), \tag{$5_+$}$$

где $\rho_+$ — неотрицательная мера на $R_+$ такая, что

$$\int_0^\infty \frac{d\rho_+(u)}{u} < \infty. \tag{$6_+$}$$

б) Если $J_1 > 0$, то уравнение (2—) имеет решение вида

$$\varphi_-(t) = 1 + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{tu} - 1}{u}\, d\rho_-(u), \tag{$5_-$}$$

где $\rho_-$ — неотрицательная мера на $R_-$ такая, что

$$\int_{-\infty}^0 \frac{d\rho_-(u)}{u} < \infty. \tag{$6_-$}$$

(Здесь мы опускаем явные формулы для $\rho_\pm$).

Обратим внимание на то, что третье из условий (1) означает абсолютную сходимость интеграла (4), то есть конечность обоих интегралов

$$s_{2\pm} := J_1^\pm := \int_{R_\pm} |t|\, k(t)\, dt, \tag{7}$$

причем $J_1 = J_1^+ - J_1^-$. Как заметил Л. Г. Арабаджян [1, 2], теорема L может быть дополнена рассмотрением случая, когда один из интегралов (7) конечен, а другой равен $+\infty$. Результат Л. Г. Арабаджяна навел нас на мысль, что его предложение (естественно, с рядом уточнений) может быть установлено для случая $k = k_\sigma$.

Ниже излагается доказательство этого факта. Для краткости мы используем определения и обозначения из [5].

Теорема. *Пусть $k = k_\sigma$ удовлетворяет условию $J_0 = 1$, а $J_1^+ = \infty$, $J_1^- < \infty$ ($J_1^+ < \infty$, $J_1^- = \infty$). Тогда уравнение* ($2_-$) (*уравнение* ($2_+$)) *имеет ограниченное решение вида* ($5_-$), *для которого выполнено условие* ($6_-$) (*вида* ($5_+$), *для которого выполнено условие* ($6_+$)).

Доказательство. Мы будем рассматривать случай $J_1^+ = \infty$ $J_1^- < \infty$. Второй случай рассматривается аналогично.

Пусть

$$w(z) = w_\sigma(z) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u-z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0)$$

— функция, отвечающая данному ядру $k_\sigma$, $w(z) = w_+(z)\,w_-(z)$ — ее факторизация. Здесь

$$w_\pm(z) = 1 \mp \int_{R_\pm} \frac{d\sigma(u)}{u-z} \quad (z \in \operatorname{Ext} R_\pm), \tag{8}$$

где $\sigma_\pm$ — неубывающие на $R_\pm$ функции, для которых

$$\int_{R_\pm} \frac{d\sigma_\pm(u)}{|u|} \leqslant 1.$$

Условие $J_0 = 1$ означает $w(0) = 0$, так что, по крайней мере, одно из чисел $w_\pm(0)$ равно нулю.

Допустим, что $w_+(0) > 0$ и, значит, $w_-(0) = 0$. В силу леммы 5.4 из [5] конечность $J_1^-$ ($= s_{2-}$) влечет конечность $s_2^- = \int_R u^{-2}\,d\sigma_-(u)$, что вместе с условием $w_-(0) = 0$ означает $l_-(w_-) := \lim_{z\to 0} (w_-(z)/z) < \infty$.

В силу следствия из теоремы 5.5 из [5] тогда $J_1^+$ ($= s_{2+}$) $< \infty$, что противоречит условию. Заметим, что $l_+(w_+) := \lim_{z\to 0} (w_+(z)/z) = \infty$, что вытекает снова из теоремы 5.5.

Покажем, что $w_-(0) > 0$. Допустим противное, что $w_-(0) = 0$. Тогда, с учетом уже доказанного равенства $w_+(0) = 0$, будем иметь

$$w_\pm(z) = \mp z \int_{R_\pm} \frac{d\sigma_\pm(u)}{u(u-z)} \quad (z \in \operatorname{Ext} R_\pm).$$

В частности, это равенство имеет место при $z \in R_\mp$. Учитывая формулы (5.11) из [5], получим

$$\infty = J_1^+ = s_{2+} = \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t^2} = \int_0^\infty \frac{w_-(t)}{t} \cdot \frac{d\sigma_+(t)}{t} =$$

$$= \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^0 \frac{d\sigma_-(u)}{u(u-t)} \right] \frac{d\sigma_+(t)}{t} = \int_{-\infty}^0 \frac{d\sigma_-(u)}{u} \left[ \int_0^\infty \frac{d\sigma_+(t)}{t(u-t)} \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{d\sigma_-(u)}{u} \cdot \frac{w_+(u)}{u} = - \int_{-\infty}^0 \frac{d\sigma(u)}{u^2} = s_{2-} = J_1^- < \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что $w_-(0) > 0$.

В силу теоремы 10.1 из [5] уравнение ($2_-$) имеет ограниченное решение ($5_-$), для которого выполнено ($6_-$).

Замечание 1. Если $w_+(0) = w_-(0) = 0$, но $l_+(w_+) = l_-(w_-) = \infty$, то возможен как случай $J_1^+ = J_1^- < \infty$, так и случай $J_1^+ = J_1^- = \infty$.

Для построения соответствующих примеров следует определить $w_\pm(z)$ формулами (8), взяв в качестве $\sigma_\pm$ абсолютно непрерывную функцию на $R_\pm$ со свойством $\int_{R_\pm} d\sigma_\pm(u)/|u| = 1$, производная которой в окрестности нуля равна, соответственно, $|t|$ либо $|t|^{1/2}$.

Замечание 2. Если $w_+(0) = 0$, $w_-(0) > 0$, то возможен случай $J_1^+ = J_1^- = \infty$. (При этом, разумеется, $l_+(w_+) = \infty$).

Пример. Пусть мера $\sigma_\pm$ абсолютно непрерывна на $R_\pm$

$$\sigma'_+(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^{1/2} & \text{при } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{при } t > 1, \end{cases} ; \quad \sigma'_-(t) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} |t|^{1/2} & \text{при } -1 < t < 1, \\ 0 & \text{при } t < -1, \end{cases}$$

где $\theta$ — некоторое число, $0 < \theta < 1$.

Легко проверить, что

$$w_+(t) = |t|^{1/2} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(|t|^{1/2}) \right) \ (t < 0), \quad w_-(0) = 1 - \theta > 0.$$

Поэтому

$$J_1^+ = \int_0^\infty \frac{w_-(t)\, d\sigma_+(t)}{t^2} \geqslant \frac{w_-(0)}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^{3/2}} = \infty,$$

$$J_1^- = \int_{-\infty}^0 \frac{w_+(t)\, d\sigma_-(t)}{t^2} = \frac{\theta}{2} \int_{-1}^0 \frac{|t|^{1/2} (\pi/2 - \operatorname{arctg}(|t|^{1/2})) \cdot |t|^{1/2}}{t^2} dt = \infty.$$

Замечание 3. Если $w_+(0) = w_-(0) = 0$, то возможен случай, когда $J_1^+ = J_1^- = \infty$ и интеграл $J_1$ не существует даже в смысле главного значения.

Пример. Пусть $0 < \alpha_\pm < 1$, $\alpha_+ + \alpha_- = \alpha$, $w_\pm(z) = \left( \frac{z}{z \mp 1} \right)^{\alpha_\pm}$. Нетрудно проверить, что $\sigma_\pm$ абсолютно непрерывны на $R_\pm$

$$\sigma'_{\pm}(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{|t|}{1\mp|t|}\right)^{\alpha_{\pm}}\dfrac{\sin\pi\alpha_{\pm}}{\pi} & \text{при } |t|\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } |t|>1.\end{cases}$$

Имеем

$$d\sigma(t)=w_{-}(t)\,d\sigma_{+}(t)=\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\alpha_-}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_+}\frac{\sin\pi\alpha_{+}}{\pi}\,dt=$$

$$=\frac{\sin\pi\alpha_+}{\pi}\cdot\frac{t^{\alpha}\,dt}{(1+t)^{\alpha_-}(1-t)^{\alpha_+}}\quad(0<t<1),$$

$$d\sigma(t)=-w_{+}(t)\,d\sigma_{-}(t)=-\left(\frac{|t|}{1-|t|}\right)^{\alpha_+}\left(\frac{|t|}{1+|t|}\right)^{\alpha_-}\frac{\sin\pi\alpha_-}{\pi}\,dt=$$

$$=-\frac{\sin\pi\alpha_-}{\pi}\cdot\frac{|t|^{\alpha}\,dt}{(1-|t|)^{\alpha_+}(1+|t|)^{\alpha_-}}\quad(-1<t<0).$$

Если $\alpha\leqslant 1$, то оба интеграла $\int_1^{\pm}$ расходятся. Положим для простоты, что $\alpha<1$. При $\varepsilon\to 0_+$ интегралы

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t^2}=\frac{\sin\pi\alpha_+}{\pi}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{t^{\alpha-2}\,dt}{(1+t)^{\alpha_-}(1-t)^{\alpha_+}},$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{d\sigma(t)}{t^2}=-\frac{\sin\pi\alpha_-}{\pi}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{|t|^{\alpha-2}\,dt}{(1-|t|)^{\alpha_+}(1+|t|)^{\alpha_-}}$$

имеют главные члены, соответственно,

$$\frac{\sin\pi\alpha_+}{\pi(1-\alpha)\,\varepsilon^{1-\alpha}}\ \text{ и }\ -\frac{\sin\pi\alpha_-}{\pi(1-\alpha)\,\varepsilon^{1-\alpha}}.$$

Взяв $\alpha_+\neq\alpha_-$, получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left[\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{d\sigma(t)}{t^2}\right]=\begin{cases}+\infty, & \text{если } \alpha_+>\alpha_-,\\ -\infty, & \text{если } \alpha_+<\alpha_-.\end{cases}$$

Физико-химический институт АН СССР
Одесский институт инженеров морского флота

Поступила 20. VII. 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Г. Арабаджян.* О консервативном уравнении Винера—Хопфа, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVI, № 1, 1981, 65—80.
2. *Л. Г. Арабаджян.* Уравнения Винера—Хопфа в консервативном случае и нелинейные уравнения факторизации, Автореф. канд. диссертации, Новосибирск, 1981.
3. *Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян.* О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера—Хопфа, Препринт ЕрГУ, НИИ ФКС 79—1, Ереван, 1979, 3—27.
4. *Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян.* Интегральные уравнения на полупрямой с разностным ядром и нелинейные функциональные уравнения, Матем. сб., 97 (139), № 1, 1975, 35—58.
5. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян.* Уравнения Винера—Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 17, № 4, 307—327; № 5, 1982, 335—375.
6. *D. V. Lindley.* The theory of quenes with a single server, Proc. of the Cambrindge Philos. Soc., 1952, v. 48, 277—289.