ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 3. 1986 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.5

Г. М. ГУБРЕЕВ

ОБОБЩЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЖРБАШЯНА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В этой работе изучаются свойства одного класса интегральных преобразований, который содержит в себе преобразования М. М. Джрбашяна с ядрами Миттаг-Леффлера первого порядка роста. В качестве применения этих результатов получен критерий равномерной корректности одной задачи Коши, а также установлен критерий безусловной базисности в пространстве $L_2(0,1)$ семейств функций вида

$$y(\lambda_k, t)=\frac{d}{dt}\int_0^t y(t-x)\, e^{i\lambda_k x}\, dx,\quad \lambda_k\in\Lambda=\{\lambda_j\}_{-\infty}^{+\infty}. \tag{1}$$

В основу рассмотрений п. 1 статьи положено переосмысливание некоторых результатов из книги [1] с позиций теории операторов, на необходимость которого неоднократно указывал М. Г. Крейн.

В дальнейшем H_+^2 (H_-^2) — класс Харди в верхней (нижней) полуплоскости; R — вещественная прямая; $R_+=\{x\in R\ \ x\geqslant 0\}$; $R+ia=\{x+ia\colon x\in R\}$ $(a\in R)$. Напомним также, что A_2-условие Макенхаупта [2] для неотрицательной функции $f(t)$ выглядит следующим образом:

$$\sup_J\left\{|J|^{-1}\int_J f(t)\,dt\,|J|^{-1}\int_J f^{-1}(t)\,dt\right\}<\infty, \tag{A_2}$$

где J — произвольный интервал вещественной оси, $|J|$ — его длина.

I. Обозначим через Y класс локально принадлежащих L_2 функций $y(t)$ $(t\in R_+)$ и таких, что $|\Phi(x)|^2$ удовлетворяет A_2-условию, где

$$\Phi(x)=ix\int_{R_+} y(t)\,e^{-ixt}\,dt.$$

Например, функция $y(t)=\Gamma^{-1}(\alpha)\,t^{-1}$ $(\alpha>0)$ входит в класс Y тогда и только тогда, когда $\alpha\in(1/2,\ 3/2)$, поскольку в этом случае $\Phi(x)=i^{1-\alpha}(x-i0)^{1-\alpha}$ [3]. В этом пункте изучаются свойства интегрального оператора D, который определяется равенствами

$$(Df)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R_+} y(x,t)\,f(t)\,dt,\quad y(x,t)=\frac{d}{dt}\int_0^t y(t-u)\,e^{ixu}\,du, \tag{2}$$

причем функция $y\in Y$. Имеет место

Теорема 1. *Интегральное преобразование D, порожденное функцией $y \in Y$, действует непрерывно из $L_2(R_+)$ в пространство $L_2(R)$ с мерой $|\Phi(x)|^{-2}\,dx$, то есть*

$$\int_R |(Df)(x)|^2 |\Phi(x)|^{-2}\,dx \leqslant C_1 \int_{R_+} |f(t)|^2\,dt.$$

Далее, если функция $\Phi(x)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\Phi^{-1}(x) \int_R \frac{\Phi(x)-\Phi(t)}{x-t}\, g(t)\,dt \in H_-^2, \quad \forall g \in H_+^2, \tag{3}$$

то для преобразования D справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R (Df)(x)\,\Phi^{-1}(x)\,e^{-ixt}\,dx, \quad t \in R_+ \tag{4}$$

и, следовательно,

$$\int_{R_+} |f(t)|^2\,dt \leqslant C_2 \int_R |(Df)(x)|^2 |\Phi(x)|^{-2}\,dx.$$

Отметим, что при $y(t) = \Gamma^{-1}(\alpha)\,t^{\alpha-1}$ этот результат впервые был получен М. М. Джрбашяном (с оценками для констант C_1, C_2) [1], так как в этом случае условие (3) выполнено, а $y(x, t) = t^{\alpha-1} E_1(ixt; \alpha)$, $\alpha \in (1/2, 3/2)$. Кроме того, из теоремы 1 нетрудно вывести

Следствие. *Если $y \in Y$, то интегральное преобразование*

$$(D_* f)(t) = \int_R y(x, t)\, f(x)\,dx, \quad t \in R_+$$

непрерывно отображает пространство $L_2(R)$ с мерой $|\Phi(x)|^2\,dx$ в пространство $L_2(R_+)$.

Укажем еще один класс интегральных преобразований вида (2), для которых тоже справедлива формула обращения (4). Пусть Y_c обозначает подмножество класса Y, состоящее из функций $y(t)$, которые, начиная с некоторого значения аргумента, постоянны. Если $y \in Y_c$ и $y(t) = a$ при $t > b$, то соответствующая функция $\Phi(x)$ является целой и конечной степени:

$$\Phi(x) = ix \int_0^b e^{-ixt}\, y(t)\,dt + a e^{-ixb}.$$

Будем рассматривать лишь такие $y \in Y_c$, которые удовлетворяют естественному предположению $0 \in G_\Phi$, где G_Φ — индикаторная диаграмма функции Φ.

Теорема 2. *Если $y \in Y_c$ и корни функции $\Phi(x)$ лежат в верхней полуплоскости, то условие (3) выполнено и, стало быть, для преобразования D, порожденного функцией y, справедлива формула обращения (4).*

В следующих пунктах мы рассмотрим некоторые применения сформулированных результатов.

II. В пространстве L_2 (0, 1) рассмотрим плотно заданный оператор A, обратный к которому определяется равенством:

$$A^{-1}h = Bh + (h, f)\,y, \quad y, f \in L_2(0, 1), \tag{5}$$

где $(Bh)(t) = i\int\limits_0^t h(s)\,ds$, а скобки обозначают скалярное произведение в $L_2(0,1)$. Спектр оператора A совпадает с множеством корней Λ целой функции конечной степени $\varphi(\lambda) = 1 - \lambda((I - \lambda B)^{-1}y, f)$, а соответствующие собственные функции имеют вид (1). В вопросах спектральной теории операторов этого класса важно выяснить условия, при которых операторы $\pm iA$ генерируют полугруппы с C_0-условием [4]. Имея в виду для решения этой задачи воспользоваться сформулированными раннее теоремами, введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\lambda) = i\lambda\int\limits_0^1 e^{-i\lambda t}y(t)\,dt + a\,e^{-i\lambda}$$

и будем предполагать, что выполнено следующее условие: существует такое $a \in C$, что функция $\Phi(\lambda)$ удовлетворяет требованиям: а) ширина индикаторной диаграммы (ш. и. д.) $\Phi(\lambda)$ равна 1 и ее корни лежат выше некоторой прямой $R + i\omega_1$; б) функция $|\Phi(\lambda)|^2$ удовлетворяет A_2-условию на прямой $R + i\omega_1$. В дальнейшем это условие, для краткости, будем обозначать через (α). Оно означает, что функция y, продолженная за пределы интервала [0, 1] константой a, принадлежит аналогу класса Y_c, в определении которого R заменена прямой $R + i\omega_1$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (α) *и ш. и. д.* $\varphi(\lambda)$ *равна* 1. *Тогда следующие требования эквивалентны:*

1) *оператор* iA *генерирует* C_0*-полугруппу* U_s, *при всех* $h \in L$ (0,1) *удовлетворяющую оценке*

$$\int\limits_{R_+} e^{2\omega s}\|U_s h\|^2\,ds \leqslant M\|h\|^2, \quad \omega < \omega_1;$$

2) $\inf\limits_{\lambda_k \in \Lambda} \operatorname{Im}\lambda_k > \omega$ и на прямой $R + i\omega$ для функции $|\Phi^{-1}(\lambda)\,\varphi(\lambda)|^2$ выполнено A_2-условие.

В последствии нам понадобятся некоторые факты, связанные с доказательством этой теоремы. Во-первых, центральным моментом в доказательстве теоремы является установление равносильности требования 2) и интегральной оценки:

$$\int\limits_{R+i\omega} |\Phi(\lambda)\,\varphi^{-1}(\lambda)((I - \lambda B)^{-1}h, f)|^2\,d\lambda \leqslant K\|h\|^2, \quad h \in L_2(0,1). \tag{6}$$

Во-вторых, если оператор iA генерирует полугруппу U_s, то линейная оболочка корневых подпространств оператора A плотна в L_2 (0, 1). Отметим также, что для полугруппы U_s справедлива формула:

$$(U_s h)(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R+i\infty} e^{\lambda s}\, y(\lambda, t)\,\frac{((I-\lambda B)^{-1} h, f)}{\varphi(\lambda)}\, d\lambda,\ t\in[0, 1],\ s\geqslant 0.$$

Из теоремы 3 можно извлечь много другой полезной информации об операторах вида (5). Здесь же будет рассмотрен только вопрос о безусловной базисности собственных векторов оператора A.

III. Для решения задачи о базисности семейства функций $\{y(\lambda_k, t)\}$ $(\lambda_k\in\Lambda)$ (см. (1)), кроме уже перечисленных результатов, понадобятся еще два, представляющие самостоятельный интерес. В приведенных ниже теоремах функция $\Phi(\lambda)$ имеет тот же смысл, что и в предыдущем пункте, удовлетворяет условиям а-б), причем для упрощения формулировок считаем, что в этих условиях $\omega_1 = 0$.

Теорема 4. *Пусть $\{\mu_k\}$ — произвольная последовательность из открытой нижней полуплоскости. Тогда семейство дробей $\{(x-\mu_k)^{-1}\}$ образует безусловный базис замыкания своей линейной оболочки в пространстве $L_2(R)$ с мерой $|\Phi(x)|^2\,dx$ (или с мерой $|\Phi(x)|^{-2}dx$) в том и только том случае, когда $\{\mu_k\}$ удовлетворяет условию Карлесона:*

$$\inf_n \prod_{k\neq n} |\mu_n-\mu_k|\,|\mu_n-\bar{\mu}_k|^{-1} > 0.$$

Следующая теорема обобщает один результат М. М. Джрбашяна о параметрическом представлении целых функций конечной степени [1].

Теорема 5. *Каждая целая функция конечной степени $\Psi(\lambda)$, индикаторная диаграмма которой содержится в отрезке $[-i, 0]$ и удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_R |\Phi^{-1}(x)\,\Psi(x)|^2\,dx < \infty$$

допускает единственное представление вида:

$$\Psi(\lambda) = \int\limits_0^1 y(\lambda, t)\,h(t)\,dt,\ \ h\in L_2(0, 1),$$

где $y(\lambda, t)$ определяется равенством (2).

Итак, перейдем к задаче о безусловной базисности семейства (1) в предположении, что функция $\varepsilon\in L_2(0, 1)$, выполнено условие (α), а последовательность Λ подчинена требованию $\inf\limits_{\lambda_k\in\Lambda} \operatorname{Im}\lambda_k > -\infty$. Ответ на этот вопрос дается в терминах функции*

$$\varphi(\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} e^{i\frac{\lambda}{2}}\, v.\,p.\prod_{\lambda_k\in\Lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right), \tag{7}$$

которая называется порождающей функцией рассматриваемого семейства. Связь с предыдущими построениями осуществляется следующим образом.

* Если $0\in\Lambda$, то в этом представлении присутствует множитель λ.

В случае безусловной базисности $\{y(\lambda_k, t)\}$ $(0 \overline{\in} \Lambda)$, эта система совпадает с множеством собственных функций некоторого оператора A вида (5), соответствующая функция $\varphi(\lambda)$ допускает представление (7), причем оператор iA генерирует полугруппу класса C_0. Используя оценку (6), задачу сведем к вопросу о базисности некоторой системы рациональных дробей в весовом пространстве, который решается с помощью теоремы 4. Таким образом, приходим к теореме, при доказательстве достаточности которой используются все предыдущие результаты.

Теорема 6. *Пусть $y \in L_2(0, 1)$, выполнено условие* (α). $\inf\limits_{\lambda_k \in \Lambda} \operatorname{Im} \lambda_k = \omega_2 > -\infty$. *Тогда соответствующее семейство функций* $\{y(\lambda_k, t): \lambda_k \in \Lambda\}$ *образует безусловный базис пространства* $L_2(0, 1)$ *в том и только том случае, когда выполнена совокупность требований:* 1) $\varphi(\lambda)$ *является целой функцией конечной степени, индикаторная диаграмма которой совпадает с отрезком* $[-i, 0]$; 2) *функция* $|\Phi^{-1}(\lambda)\varphi(\lambda)|^2$ *удовлетворяет* A_2*-условию на какой-нибудь прямой* $R + i\omega$, $\omega < \min\{\omega_1, \omega_2\}$; 3) *последовательность* $\{\lambda_k - i\omega : \lambda_k \in \Lambda\}$ *удовлетворяет условию Карлесона.*

Условие (α) в формулировке этой теоремы ослабить нельзя: для каждой функции $y \in L_2(0, 1)$ существует такая последовательность Λ, что для безусловной базисности соответствующего семейства $\{y(\lambda_k, t)\}$ условие (α) необходимо. Если $y(t) = \Gamma^{-1}(\mu) t^{\mu-1}$, то в этой теореме речь идет о базисности семейств функций типа Миттаг-Леффлера и соответствующий результат получен в [5]. В этом случае при $\mu \in (1/2, 3/2)$ условие (α) выполнено, причем для функции Φ справедлива асимптотика $|\Phi(\lambda)| \asymp |\lambda|^{1-\mu}$ $(\lambda \in R + i\omega)$. Можно показать, что это ограничение на параметр μ является необходимым для базисности этого семейства [5]. Отметим, что недавно аналогичное обобщение результатов работы [5], действуя другими методами, получил С. В. Хрущев [6]. Его результат близок к теореме 6, однако не содержит описания порождающих функций и поэтому формулируется в несколько других терминах.

Выражаю глубокую признательность М. Г. Крейну и Д. З. Арову за внимание к работе и поддержку.

Одесский государственный
педагогический институт

Поступила 15. XII. 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
2. *R. A. Hunt, B. Muckeohoupt, R. L. Wheeden.* Trans. Amer. Maht. Soc., 176, 1973.
3. *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов.* Обобщенные функции, т. 1, ГИФМЛ, М., 1958.
4. *С. Г. Крейн.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», М., 1957.
5. *Г. М. Губреев.* Функц. анализ и его прилож., т. 20, вып. 3, 1986.
6. *S. V. Hruščev.* Preprint. Institut D'Estudis Catalans, CdRM, Barcelona, Spain, 1985.