ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXI, № 3, 1986 Математика

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

СООТНОШЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ

Содержание

§ 0. Введение

Хорошо известна работа Р. Неванлинны [1] 1924 года, где им были установлены ставшие уже классическими результаты о факторизации и граничных свойствах мероморфных в круге функций ограниченного вида — класса N. В этой работе Р. Неванлинна по существу решил для класса N задачу, которой можно дать следующую формулировку.

Задача 1. *Описать структуру мероморфной в области функции, имея информацию о ее росте вблизи границы области, заданную ограниченностью некоторой характеристики роста, не дающей преимущества ни одной из граничных точек области.*

Такую постановку задачи принято трактовать как *рассмотрение всей границы области в виде одной существенно особой точки*. Очевидно, что эту задачу было естественнее рассматривать для функций, мероморфных в круге. Мероморфная в единичном круге функция $f(z)$ принадлежит классу N, если

$$\sup_{0<r<1} \{T(r, f)\} \equiv \sup_{0<r<1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_0^r \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + n(0, \infty) \log r \right\} < +\infty.$$

Существенную роль в указанных результатах Р. Неванлинны сыграла формула Иенсена—Неванлинны, из которой по существу и рождается его характеристика $T(r, f)$. Параметрическое представление класса N было получено Р. Неванлинной путем предельного перехода $r \to 1-0$ в формуле Пуассона—Иенсена для концентрических кругов радиуса $r<1$.

В своей следующей, также хорошо известной статье [2] 1925 года, Р. Неванлинна совершенно другим методом решил иную, *локальную*, задачу. Эту задачу можно сформулировать так.

Задача 2. *Предполагая, что функция аналитична в замкнутой области, кроме одной точки границы, описать структуру этой функции, имея лишь информацию о ее росте вблизи указанной точки.*

В отличие от первой, эту задачу естественно рассматривать для функций, аналитических (или мероморфных) в полуплоскости, а существенно особой точкой считать бесконечно удаленную. Кстати, отметим, что частичным решением подобной задачи можно считать также классический принцип Фрагмена—Линделёфа.

Р. Неванлинной, в частности, были рассмотрены следующие локальные условия:

$$\varliminf_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \log |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta < +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ |f(t)|}{1+t^2} dt < +\infty.$$

Выполнение этих условий для аналитической в замкнутой верхней полуплоскости функции приводит к ее факторизации. Отсюда непосредственно следует, что такая функция представима в виде отношения двух аналитических и ограниченных в полуплоскости функций, т. е. является функцией ограниченного вида, или, как принято говорить, принадлежит классу N в полуплоскости.

Вышеприведенные локальные условия Р. Неванлинны по существу порождались из формулы Т. Карлемана для полукольца [3]. Факторизационный же результат Р. Неванлинны для полуплоскости был получен путем предельного перехода $R \to +\infty$ в формуле Ф. и Р. Неванлинн [4] для полукруга радиуса R.

В исследованиях [5] (гл. IX) и [6] М. М. Джрбашяна были построены теории факторизаций и граничных свойств новых, широких классов N_α и N_ω мероморфных в круге функций. Теории этих классов были построены с привлечением, соответственно, оператора интегродифференцирования Римана—Лиувилля и одного существенного его обобщения [7]. Применение этих операторов давало возможность рассматривать функции произвольно быстрого роста у границы круга, с тем, чтобы введенные М. М. Джрбашяном новые характеристики роста $T_\alpha(r; f)$ и $T_\omega(r; f)$, не дающие преимущества ни одной из граничных точек круга, оставались ограниченными.

Отмеченные исследования М. М. Джрбашяна содержат *окончательное решение задачи* 1 в том смысле, что объединение классов N_ω совпадает с множеством всех мероморфных в круге функций. Задача, решенная в этих работах, и развитые в них методы принципиально отличаются от задачи 2 для полуплоскости и методов, развитых Р. Неванлинной при ее решении.

Хорошо известна еще одна задача теории аналитических функций, которую также наиболее естественно рассматривать для функций, аналитических в полуплоскости. Формулировка ее такова:

Задача 3. *Описать структуру аналитической в полуплоскости (открытой) функции, имея информацию о ее росте у границы полуплоскости, заданную ограниченностью характеристики роста, не дающей преимущества ни одной из конечных граничных точек полуплоскости и учитывающей рост функции у бесконечно удаленной точки некоторым особым образом.*

Такую постановку задачи очевидно можно трактовать как *разбиение границы полуплоскости на две существенно особые точки — ∞ и совокупность остальных граничных точек.*

Отметим, что первым решением такой задачи явилась теория классов $\mathbf{H}^p$ полуплоскости Хилла и Тамаркина [8], которые естественным образом связаны, например, с исследованием уравнений Винера—Хопфа.

В. И. Крыловым [9] задача 3 была решена для более широких классов аналитических в полуплоскости функций. Им были найдены параметрические представления классов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_m$ аналитических в верхней полуплоскости функций, определенных, соответственно, следующими условиями:

$$\sup_{y>0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\log^+|f(x+iy)|\,dx\right\}<+\infty,$$

$$\sup_{y>0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\big|\log|f(x+iy)|\big|\,dx\right\}<+\infty.$$

Надо отметить, во-первых, что как и в случае решения задачи 2 Р. Неванлинной, $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_m \subset N$, а, во-вторых, что классы В. И. Крылова являются такими же естественными расширениями классов $\mathbf{H}^p$ Хилла и Тамаркина, *каким является класс* N Р. Неванлинны в круге для классов H^p Харди. Далее следует отметить, что существует естественная связь между классами $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_m$ и формулами Ф. и Р. Неванлинн и Б. Я. Левина (см. [10], гл. IV, § 2), записанными для полуплоскости.

Настоящая статья посвящена решению задач 2 и 3 для возможно более широких классов аналитических в полуплоскости функций. В ней с привлечением оператора интегродифференцирования Г. Вейля [11] построена теория факторизации новых, широких классов аналитических в полуплоскости функций, зависящих от непрерывного параметра α $(-1< <\alpha<+\infty)$. В случае $\alpha=0$ результаты этой теории переходят в вышеуказанные результаты Р. Неванлинны и В. И. Крылова, относящиеся к решению задач 2 и 3 для полуплоскости.

Несмотря на определенную идейную близость между операциями интегродифференцирования Римана—Лиувилля и Вейля, методы построения теории классов N_α и методы, примененные автором, существенно различны, как это имеет место и в классическом случае решения задач для круга и полуплоскости. Одно из основных, принципиальных различий заключается в том, что в теории классов N_α произведения типа Бляшке М. М. Джрбашяна рождаются естественным образом из найденного им семейства формул типа Иенсена—Неванлинны. А в развитой в статье факторизационной теории существенную роль играют произведения типа Бляшке для полуплоскости, которые были построены автором [12], [13] совершенно другим методом.

Следует отметить, что задачу 2 оказалось целесообразно рассматривать для функций, мероморфных в нижней полуплоскости, в несколько ином виде, переместив существенно особую точку из бесконечно удаленной в начало координат. Однако, все основные результаты статьи, относящиеся к решению этой задачи, посредством инверсии сформулированы в классической форме, для функций, мероморфных в верхней полуплоскости. Инверсия переводит рассматриваемую существенно особую точку в бесконечно удаленную, а оператор Вейля — в некий интегродифференциальный оператор *типа* Римана—Лиувилля с криволинейным контуром интегрирования. Результаты для мероморфных в верхней полуплоскости функций, а также указанный оператор типа Римана—Лиувилля, служат лишь аппаратом интерпретации результатов, полученных с привлечением оператора Вейля. Все остальные результаты статьи, относящиеся к решению задачи 3, получены с привлечением оператора Вейля и для функций, мероморфных в нижней полуплоскости. Они также допускают переформулировки посредством инверсии для функций, мероморфных в верхней полуплоскости.

В § 1 статьи исследован ряд свойств оператора интегродифференцирования Г. Вейля, лежащий в основе дальнейшего изложения.

В § 2, после краткой сводки ряда свойств указанных выше произведений типа Бляшке для полуплоскости, на которые существенно опирается данное исследование, установлены общие формулы типа формул Ф. и Р. Неванлинн для двух конкретных областей — полукруга $G^{(+)}(R)=\{z: \operatorname{Im} z>0,\ |z|<R\}$ $(0<R<+\infty)$ и полуплоскости $G_\rho^{(-)}=\{w: \operatorname{Im} w<\rho\}$ $(-\infty<\rho<0)$ (теоремы 2.1 и 2.2). Затем, путем особого предельного перехода установлены формулы типа Т. Карлемана для полукруга и Б. Я. Левина — для полуплоскости (теоремы 2.3 и 2.4).

В § 3 иным способом установлены формулы типа Т. Карлемана и Б. Я. Левина, соответственно, для полукольца и области вида $\left\{z: \left|z-i\dfrac{R}{2}\right|<\dfrac{R}{2},\ |z|>R_0\right\}$ $(0<R_0<R<+\infty)$. Установленные в §§ 2, 3 формулы можно рассматривать как новые *соотношения равновесия* для мероморфных в полуплоскости функций. Из них естественным образом порождаются новые, общие характеристики типа характеристик Р. Неванлинны для угла и характеристик Цудзи [14]. Непосредственные применения этих соотношений равновесия приводят к частичному решению задач 2 и 3 — нахождению естественных ограничений, при выполнении которых нули аналитической в верхней полуплоскости функции удовлетворяют условию плотности

$$\sum_k \left|\operatorname{Im} \frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha} < +\infty$$

при данном $\alpha \in (-1, +\infty)$. Отметим, что это условие есть условие сходимости отмеченных выше произведений типа Бляшке для полуплоскости.

В § 4 установлены основные факторизационные теоремы статьи для широких классов аналитических в полуплоскости функций. Функции этих классов являются функциями *обобщенно-ограниченного вида* в смысле, рассмотренном автором в работе [15].

В теореме 4.1 установлены факторизации для семейства классов аналитических в замкнутой полуплоскости функций, включающих *функции любого конечного порядка*. В теоремах 4.2 и 4.3 установлены параметрические представления новых, широких классов аналитических в полуплоскости функций $\mathbf{N}_\alpha$ и $\mathbf{N}^m_\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$, которые, по существу, совпадают с классами В. И. Крылова $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_m$ в случае, когда $\alpha = 0$. Отметим, что как теорема 4.2, так и формулы типа Ф. и Р. Неванлинн и Т. Карлемана, на основе которых она установлена, были анонсированы в заметке автора [16].

Необходимо отметить, что как факторизационные теоремы 4.1 и 4.3, так и более общие факторизационные теоремы для классов мероморфных в полуплоскости функций, могут быть получены путем предельных переходов $R \to +\infty$ и $\rho \to 0$ в формулах типа Ф. и Р. Неванлинн, установленных в § 2. Причем эти классы будут определены ограниченностью характеристик роста, которые естественным образом порождаются из соотношений равновесия §§ 2, 3. Однако, автор предпочел избрать другой путь, основанный на применении результатов Р. Неванлинны и В. И. Крылова, который быстрее приводит к цели.

Таким образом, факторизационные теоремы заключительного § 4 данной работы являются решениями задач 2 и 3 для аналитических в полуплоскости функций, охватывающими существенно более широкие семейства функций, чем упомянутые выше классы Р. Неванлинны и В. И. Крылова.

§ 1. Оператор интегродифференцирования Г. Вейля

Настоящий параграф имеет предварительный характер. В нем дается систематическое изложение ряда основных свойств оператора интегродифференцирования Г. Вейля. Эти свойства, а также введенные затем классы функций, определенных в областях некоторого особого, звездообразного типа, лежат в основе всего дальнейшего изложения.

1.1. Всюду ниже будем полагать, что $U(v)$, вообще говоря, комплексная функция, измеримая на интервале $-\infty < v < d$ $(-\infty < d < +\infty)$.

Предполагая абсолютную сходимость нижеследующих интегралов почти для всех $v \in (-\infty, d)$, введем в рассмотрение функцию

$$W^{-\alpha} U(v) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{v} (v-t)^{\alpha-1} U(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} U(v-\sigma)\, d\sigma \quad (0<\alpha<+\infty). \tag{1.1}$$

Эту функцию принято называть *интегралом порядка α по Вейлю от функции* $U(v)$.

Введем в рассмотрение простейший класс функций, для которых интеграл (1.1) абсолютно сходится почти для всех $v \in (-\infty, d)$.

Будем говорить, что функция $U(v)$ принадлежит классу $\mathbf{L}_\alpha(-\infty, d)$ $(0<\alpha<+\infty)$, если для любого $\varepsilon>0$

$$(1+|t|)^{\alpha-1} U(t) \in L_1(-\infty; d-\varepsilon). \tag{1.2}$$

Заметим, что при любых α_1 и α_2 $(0<\alpha_1<\alpha_2<+\infty)$ имеет место включение

$$\mathbf{L}_{\alpha_2}(-\infty, d) \subset \mathbf{L}_{\alpha_1}(-\infty, d). \tag{1.3}$$

Лемма 1.1. 1°. *Пусть при некотором $\alpha \in (0, +\infty)$ имеем $U(v) \in \mathbf{L}_\alpha(-\infty, d)$. Тогда интеграл $W^{-\alpha} U(v)$ абсолютно сходится почти для всех $v \in (-\infty, d)$ и представляет функцию, суммируемую на любом отрезке $[a, b] \subset (-\infty, d)$.*

2°. *Если $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, +\infty)$ и $U(v) \in \mathbf{L}_{\alpha_1+\alpha_2}(-\infty, d)$, то*

$$W^{-\alpha_1} |U(v)| \in \mathbf{L}_{\alpha_2}(-\infty, d).$$

Доказательство. 1°. Пусть $-\infty<a<b<d$. Очевидно, что

$$\int_a^b |W^{-\alpha} U(v)|\, dv \leqslant \int_a^b W^{-\alpha} |U(v)|\, dv =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b dv \int_{-\infty}^a (v-t)^{\alpha-1} |U(t)| dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b dv \int_a^v (v-t)^{\alpha-1} |U(t)|\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^a [(b-t)^\alpha - (a-t)^\alpha] |U(t)|\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b (b-t)^\alpha |U(t)|\, dt.$$

Заметим теперь, что выбором достаточно большой постоянной $C \equiv C(a, b, \alpha) \in (0, +\infty)$ можно добиться одновременного выполнения неравенств

$$0<(b-t)^\alpha - (a-t)^\alpha \leqslant C(1+|t|)^{\alpha-1}, \text{ при } -\infty<t<a,$$

$$(b-t)^\alpha < C(1+|t|)^{\alpha-1}, \text{ при } a<t<b.$$

В силу этого

$$\int_a^b W^{-\alpha} |U(v)|\, dv \leqslant \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^b (1+|t|)^{\alpha-1} |U(t)|\, dt < +\infty.$$

2°. Для доказательства второго утверждения леммы воспользуемся формулой

$$\int_{t_2}^{v}(v-t_1)^{\alpha_1-1}(t_1-t_2)^{\alpha_2-1}\,dt_1=\frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}(v-t_2)^{\alpha_1+\alpha_2-1},\ t_2<v. \tag{1.4}$$

Пусть $\varepsilon>0$ — любое. Очевидно

$$\int_{-\infty}^{d-\varepsilon}(1+|t|)^{\alpha_2-1}\,W^{-\alpha_1}|U(t)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{-\infty}^{d-\varepsilon}|U(x)|\,dx\int_{-d+\varepsilon}^{-x}(-x-t)^{\alpha_1-1}(1+|t|)^{\alpha_2-1}\,dt.$$

Выбор достаточно большой постоянной $C_1\equiv C_1(\alpha,d,\varepsilon)\in(0,+\infty)$ обеспечивает выполнение неравенства $(1+|t|)^{\alpha_2-1}\leqslant C_1(t+d)^{\alpha_2-1}$ при $-d+\varepsilon<t<+\infty$. Поэтому, используя формулу (1.4), получим

$$\int_{-d+\varepsilon}^{-x}(-x-t)^{\alpha_1-1}(1+|t|)^{\alpha_2-1}\,dt\leqslant C_1\int_{-d}^{-x}(-x-t)^{\alpha_1-1}(t+d)^{\alpha_2-1}\,dt=$$

$$=C_1\frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}(d-x)^{\alpha_1+\alpha_2-1}.$$

Однако, как нетрудно убедиться, $(d-x)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\leqslant C_2(1+|x|)^{\alpha_1+\alpha_2-1}$ $(-\infty<x<d-\varepsilon)$ при некотором $C_2\equiv C_2(\alpha_1+\alpha_2,d,\varepsilon)\in(0,+\infty)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{d-\varepsilon}(1+|t|)^{\alpha_2-1}\,W^{-\alpha_1}|U(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C_1C_2\frac{\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int_{-\infty}^{d-\varepsilon}(1+|x|)^{\alpha_1+\alpha_2-1}|U(x)|\,dx<+\infty.$$

Лемма 1.2. *Пусть при некоторых положительных числах* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ *имеем* $U(v)\in L_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}(-\infty,d)$. *Тогда множества тех* $v\in(-\infty,d)$, *для которых абсолютно сходятся интегралы* $W^{-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)}U(v)$ *и* $W^{-\alpha_1}W^{-\alpha_2}\dots W^{-\alpha_n}U(v)$, *совпадают, и для таких* v *(т. е. почти всюду на* $(-\infty,d)$*) справедливо равенство*

$$W^{-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)}U(v)=W^{-\alpha_1}W^{-\alpha_2}\dots W^{-\alpha_n}U(v). \tag{1.5}$$

Доказательство. При $n=1$ утверждение леммы очевидно. На основании формулы (1.4) приходим к равенствам, доказывающим утверждение леммы в случае, когда $n=2$:

$$W^{-\alpha_1}W^{-\alpha_2}|U(v)|=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}\int_{-\infty}^{v}|U(t_2)|\,dt_2\int_{t_2}^{v}(v-t_1)^{\alpha_1-1}(t_1-t_2)^{\alpha_2-1}\,dt_1=W^{-(\alpha_1+\alpha_2)}|U(v)|.$$

Продолжая это рассуждение по индукции, убеждаемся в справедливости леммы при любом натуральном $n \geqslant 1$.

Замечание. Пусть $\alpha \in [1, +\infty)$ и $U(v) \in L_\alpha(-\infty, d)$. Тогда, в силу лемм 1.1 и 1.2, как нетрудно убедиться, интеграл $W^{-\alpha} U(v)$ абсолютно сходится уже для всех $v \in (-\infty, d)$ и представляет непрерывную функцию на $(-\infty, d)$. Далее в силу тех же лемм 1.1 и 1.2, если $U(v) \in L_p(-\infty, d)$ при некотором натуральном $p \geqslant 1$, то всюду на $(-\infty, d)$

$$W^{-p} U(v) = \int_{-\infty}^{v} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{p-1}} U(t_p)\, dt_p.$$

Тем самым, функция $W^{-p} U(v)$ является p-кратной первообразной от функции $U(v)$.

1.2. Леммы этого пункта дадут возможность естественным образом распространить определение (1.1) оператора $W^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < +\infty)$ на случай $\alpha = 0$. Их доказательства являются модификациями доказательств соответствующих утверждений об операторе Римана—Лиувилля из теоремы 1 работы [17]. В конце пункта мы введем в рассмотрение также производную произвольного порядка в смысле Вейля.

Ввиду включения (1.3) и леммы 1.1, если при некотором $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ имеем $U(v) \in L_{\alpha_0}(-\infty, d)$, то при любом $\alpha \in (0, \alpha_0]$ интеграл $W^{-\alpha} U(v)$ абсолютно сходится почти для всех $v \in (-\infty, d)$. Более того, справедлива следующая

Лемма 1.3. *Пусть при некотором $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ имеем $U(v) \in L_{\alpha_0}(-\infty, d)$. Тогда при любом $\alpha \in (0, \alpha_0]$ интеграл $W^{-\alpha} U(v)$ абсолютно сходится в каждой точке Лебега $v \in (-\infty, d)$ функции $|U|$.*

Доказательство. Если $\alpha \geqslant 1$, то лемма очевидна ввиду замечания в конце предыдущего пункта. Рассмотрим случай, когда $0 < \alpha < 1$ $(\alpha \in (0, \alpha_0])$. Предполагая, что $v \in (-\infty, d)$ — точка Лебега функции $|U|$, запишем интеграл $W^{-\alpha} |U(v)|$ в виде следующей суммы:

$$W^{-\alpha} |U(v)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right) \sigma^{\alpha-1} |U(v-\sigma)|\, d\sigma \equiv I_\alpha^{(1)} + I_\alpha^{(2)}.$$

Для оценки $I_\alpha^{(2)}$ выберем постоянную $C \equiv C(v, \alpha_0) \in (0, +\infty)$ так, чтобы при $-\infty < t < v-1$ имели

$$(v-t)^{\alpha_0 - 1} \leqslant C(1+|t|)^{\alpha_0 - 1}. \tag{1.6}$$

Тогда, в силу того, что $U(v) \in L_{\alpha_0}(-\infty, d)$, будем иметь

$$I_\alpha^{(2)} \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{+\infty} \sigma^{\alpha_0 - 1} |U(v-\sigma)|\, d\sigma \leqslant \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{v-1} (1+|t|)^{\alpha_0 - 1} |U(t)|\, dt < +\infty.$$

Остается показать, что сходится также интеграл $I_\alpha^{(1)}$. Для этого достаточно убедиться в конечности предела

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\delta}^{1}\sigma^{\alpha-1}\,|U(v-\sigma)|\,d\sigma.$$

С этой целью введем следующую непрерывную на $0<\sigma<+\infty$ функцию:

$$\Phi_v(\sigma)\equiv\int\limits_{0}^{\sigma}|U(v-t)|\,dt=\int\limits_{v-\sigma}^{v}|U(\tau)|\,d\tau$$

и заметим, что для любого $\sigma>0$ имеем

$$\left|\frac{\Phi_v(\sigma)}{\sigma}-|U(v)|\right|\leqslant\frac{1}{\sigma}\int\limits_{0}^{\sigma}\big||U(v-t)|-|U(v)|\big|\,dt.$$

Так как $v\in(-\infty, d)$—точка Лебега функции $|U|$, то

$$\lim_{\sigma\to+0}\sigma^{-1}\Phi_v(\sigma)=|U(v)|.$$

Далее, ввиду определения функции $\Phi_v(\sigma)$

$$\int\limits_{\delta}^{1}\sigma^{\alpha-1}\,|U(v-\sigma)|d\sigma=\int\limits_{\delta}^{1}\sigma^{\alpha-1}\,d\Phi_v(\sigma)=$$

$$=\Phi_v(1)-\delta^{\alpha-1}\,\Phi_v(\delta)+(1-\alpha)\int\limits_{\delta}^{1}\sigma^{\alpha-2}\,\Phi_v(\sigma)\,d\sigma.$$

Отсюда следует конечность вышеуказанного предела и, таким образом, лемма доказана.

Перейдем к доказательству основной леммы этого пункта.

Лемма 1.4. *Пусть при некотором $\alpha_0\in(0,+\infty)$ имеем $U(v)\in\in L_{\alpha_0}(-\infty, d)$. Тогда в каждой точке Лебега $v\in(-\infty, d)$ функции U справедливо соотношение*

$$\lim_{\alpha\to+0}W^{-\alpha}\,U(v)=U(v). \qquad (1.7)$$

Доказательство. Пусть $\alpha\in(0, \alpha_0]$, $0<\alpha<1$ и $v\in(-\infty, d)$ — точка Лебега функции U. Как и при доказательстве предыдущей леммы, запишем интеграл $W^{-\alpha}\,U(v)$ в виде суммы

$$W^{-\alpha}\,U(v)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg(\int\limits_{0}^{1}+\int\limits_{1}^{+\infty}\Bigg)\sigma^{\alpha-1}\,U(v-\sigma)\,d\sigma\equiv J_\alpha^{(1)}+J_\alpha^{(2)}. \qquad (1.8)$$

Очевидно, что в силу оценки (1.6)

$$|J_\alpha^{(2)}|\leqslant\frac{C}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{v-1}(1+|t|)^{\alpha_0-1}\,|U(t)|\,dt\underset{\alpha\to+0}{\longrightarrow}0. \qquad (1.9)$$

Определим теперь непрерывную на полуоси $0<\sigma<+\infty$ функцию

$$F_v(\sigma)\equiv\int_0^\sigma U(v-\sigma)\,d\sigma=\int_{v-\sigma}^{v}U(\tau)\,d\tau.$$

Так как $v\in(-\infty, d)$ — точка Лебега функции U, то при $\sigma\to+0$ имеем

$$\left|\frac{F_v(\sigma)}{\sigma}-U(v)\right|\leqslant\frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma|U(v-t)-U(v)|\,dt=o(1),$$

и, тем самым

$$\lim_{\sigma\to+0}\sigma^{-1}F_v(\sigma)=U(v).$$

Поэтому функцию $F_v(\sigma)$ можно записать в виде

$$F_v(\sigma)=\sigma[U(v)+\omega_v(\sigma)],$$

где $\omega_v(\sigma)\equiv\sigma^{-1}F_v(\sigma)-U(v)$ — непрерывная на полуоси $0<\sigma<+\infty$ функция, причем $\omega_v(+0)=0$.

Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем число $\delta\equiv\delta(\varepsilon)\in(0,1)$ настолько малым, чтобы при $0<\sigma<\delta$ имели $|\omega_v(\sigma)|<\varepsilon/5$.

Очевидно, что

$$J_\alpha^{(1)}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\sigma^{\alpha-1}\,dF_v(\sigma)=\frac{F_v(1)}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1-\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}U(v)+$$

$$+\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\delta\omega_v(\sigma)\sigma^{\alpha-1}\,d\sigma+\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_\delta^1\omega_v(\sigma)\sigma^{\alpha-1}\,d\sigma.$$

Однако, нетрудно видеть, что

$$\left|\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\delta\omega_v(\sigma)\sigma^{\alpha-1}\,d\sigma\right|\leqslant\frac{1-\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\frac{\varepsilon}{5}\int_0^\delta\sigma^{\alpha-1}\,d\sigma<\frac{\varepsilon}{5}\frac{1-\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},$$

$$\left|\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_\delta^1\omega_v(\sigma)\sigma^{\alpha-1}\,d\sigma\right|\leqslant\delta^{\alpha-1}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1|\omega_v(\sigma)|\,d\sigma<$$

$$<\delta^{-1}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\max_{0<\sigma<1}|\omega_v(\sigma)|.$$

Поэтому

$$|J_\alpha^{(1)}-U(v)|<\frac{|F_v(1)|}{\Gamma(\alpha)}+\left|\frac{1-\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right||U(v)|+$$

$$+\frac{\varepsilon}{5}\frac{1-\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\delta^{-1}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\max_{0<\sigma<1}|\omega_v(\sigma)|.$$

Выберем теперь число $\delta'\in(0,\min\{\alpha_0,1\})$ настолько малым, чтобы при $0<\alpha<\delta'$ каждое из слагаемых правой части последней оценки было меньше $\varepsilon/4$. Тогда

$$|J_\alpha^{(1)} - U(v)| < \varepsilon \text{ при } 0 < \alpha < \delta',$$

и ввиду произвольности $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha \to +0} J_\alpha^{(1)} = U(v).$$

Отсюда и из (1.8), (1.9) следует утверждение леммы.

Замечание. В силу лемм 1.1 и 1.2 очевидно, что при выполнении условия леммы 1.4, для любого $\alpha_1 \in (0, \alpha_0)$ и почти для всех $v \in (-\infty, d)$ справедливо соотношение

$$\lim_{\alpha \to \alpha_1 + 0} W^{-\alpha} U(v) = W^{-\alpha_1} U(v), \tag{1.7'}$$

то есть оператор Вейля $W^{-\alpha} (0 < \alpha < +\infty)$ „непрерывен справа" по α.

В силу соотношений (1.7)—(1.7'), определение (1.1) оператора $W^{-\alpha} (0 < \alpha < +\infty)$ естественно распространить на значение $\alpha = 0$, положив

$$W^0 U(v) \equiv U(v). \tag{1.10}$$

Введем теперь в рассмотрение производную произвольного порядка в смысле Вейля.

Пусть $\alpha (0 < \alpha < +\infty)$ — произвольное положительное число, и натуральное число $p \geqslant 1$ определено из неравенств $p - 1 < \alpha \leqslant p$. Введем в рассмотрение функцию

$$W^\alpha U(v) \equiv W^{-(p-\alpha)} \left\{ \frac{d^p}{dv^p} U(v) \right\}, \tag{1.11}$$

предполагая, что она существует почти для всех $v \in (-\infty, d)$. Эту функцию мы будем называть *производной порядка α от функции $U(v)$*.

Отметим, что ввиду (1.10), при натуральных p

$$W^p U(v) = \frac{d^p}{dv^p} U(v), \tag{1.11'}$$

то есть $W^p U(v)$ совпадает с обычной производной функции $U(v)$ порядка p.

1.3. Всюду ниже оператор Вейля мы будем применять по переменной v к функциям $U(w) \equiv U(u + iv)$, заданным в областях, содержащих вместе с каждой внутренней точкой $w = u + iv$ и полупрямую

$$\Gamma(\infty, w) = \{\omega = w - i\sigma : 0 < \sigma < +\infty\}, \tag{1.12}$$

направленную от ∞ к точке w. Такие области мы в дальнейшем будем называть звездообразными относительно бесконечно удаленной точки, или, короче, ∞-звездообразными.

Для дальнейшего изложения условимся там, где не оговорено иное, считать, что функция $U(w)$ определена и гармонична в некоторой ∞-звездообразной области D, кроме, быть может, счетного множества точек разрыва $\{w_m\}$. При этом, мы будем полагать, что для каждого $w \in D$ на полупрямой $\Gamma(\infty, w)$ лежит не более, чем конечное число точек из $\{w_m\}$, и, что в лежащей на этой полупрямой достаточно малой окрестности каждой точки $w_m \in \Gamma(\infty, w)$ функция $U(w)(w - w_m)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

Подразумевая под сходимостью нижеследующего интеграла его абсолютную сходимость на любом интервале, замыкание которого не содержит точек разрыва функции $U(w)$, и сходимость в смысле главного значения Коши на остальных отрезках контура интегрирования, первообразной порядка α $(0<\alpha<+\infty)$ функции $U(w)$ назовем интеграл

$$W^{-\alpha} U(w) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{v} (v-t)^{\alpha-1} U(u+it)\, dt \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} U(w-i\sigma)\, d\sigma; \; w=u+iv \in D. \tag{1.13}$$

В случае $\alpha=0$ положим

$$W^0 U(w) \equiv U(w); \; w \in D.$$

Для определения производной произвольного порядка α $(0<\alpha<+\infty)$ от функции $U(w)$ предположим, что ограничениям, наложенным выше на эту функцию, удовлетворяет производная

$$\frac{\partial^p}{\partial v^p} U(w); \; w=u+iv \in D,$$

где $p \geqslant 1$ — натуральное число, определенное неравенствами $p-1<\alpha \leqslant p$, и положим

$$W^{\alpha} U(w) \equiv W^{-(p-\alpha)} \left\{ \frac{\partial^p}{\partial v^p} U(w) \right\}; \; w=u+iv \in D.$$

Введем теперь в рассмотрение необходимые для дальнейшего изложения классы определенных в ∞-звездообразных областях функций.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $U(w)$, заданная в ∞-звездообразной области D, принадлежит классу $M_\beta(D)$ $(0 \leqslant \beta<+\infty)$, если существует угловой сектор вида $\Delta(\delta_0, R_0)=\{w: |\pi/2+\arg w| \leqslant \delta_0, |w| \geqslant R_0\}$ (где $0<\delta_0 \leqslant \pi/2$, $0<R_0<+\infty$), такой, что для любого компакта $K \subset D \cap \Delta(\delta_0, R_0)$*

$$\sup_{w \in K} \left\{ \int_{1}^{+\infty} \sigma^{\beta-1} |U(w-i\sigma)|\, d\sigma \right\} < +\infty. \tag{1.14}$$

Будем говорить, что функция $U(w)$ принадлежит классу $K_\gamma(\delta_0, D)$ $(0<\gamma<+\infty)$, если при некоторых δ_0 $(0<\delta_0 \leqslant \pi/2)$ и R_0 $(0<R_0<+\infty)$ справедлива оценка

$$|U(w)| \leqslant C |w|^{-\gamma}; \; w \in D \cap \Delta(\delta_0, R_0), \tag{1.15}$$

где $C \in (0, +\infty)$ — постоянная.

Очевидно, что для любых β_1, β_2 $(0 \leqslant \beta_1<\beta_2<+\infty)$ имеет место включение

$$M_{\beta_2}(D) \subset M_{\beta_1}(D),$$

а для любых γ_1, γ_2 $(0<\gamma_1<\gamma_2<+\infty)$ и δ_0 $(0<\delta_0\leqslant\pi/2)$ — включение

$$K_{\gamma_2}(\delta_0, D)\subset K_{\gamma_1}(\delta_0, D).$$

Таким образом, *при возрастании параметров* β *и* γ *классы* M_β *и* K_γ *сужаются*. Кроме того, справедлива следующая

Лемма 1.5. *Пусть* $\beta\in[0, +\infty)$ *и* $\gamma\in(\beta, +\infty)$. *Тогда при любом* δ_0 $(0<\delta_0\leqslant\pi/2)$ *имеет место включение*

$$K_\gamma(\delta_0, D)\subset M_\beta(D). \tag{1.16}$$

Доказательство. Установим предварительно одно неравенство. Как нетрудно убедиться, для любых положительных чисел a, b и $\varkappa$ имеем $(a+b)^{-\varkappa}\leqslant\max\{1, 2^{1-\varkappa}\}(a^\varkappa+b^\varkappa)^{-1}$. В силу этого, для любых w $(\operatorname{Im} w<0)$ и $\sigma, \gamma\in(0, +\infty)$ будем иметь

$$|w-i\sigma|^{-\gamma}\leqslant(|w-i\sigma|^2)^{-\frac{\gamma}{2}}=[|w|^2+\sigma^2(1+2\sigma^{-1}|\operatorname{Im} w|)]^{-\frac{\gamma}{2}}<$$

$$<(|w|^2+\sigma^2)^{-\gamma/2}\leqslant\max\{1, 2^{1-\gamma/2}\}(|w|^\gamma+\sigma^\gamma)^{-1}.$$

Таким образом, при любом w $(\operatorname{Im} w<0)$ и любых положительных σ и γ справедливо неравенство

$$|w-i\sigma|^{-\gamma}<C(\gamma)(|w|^\gamma+\sigma^\gamma)^{-1}, \tag{1.17}$$

где $C(\gamma)=\max\{1, 2^{1-\gamma/2}\}$.

Предположим теперь, что при некотором δ_0 $(0<\delta_0\leqslant\pi/2)$ имеем $U(w)\in K_\gamma(\delta_0, D)$, где $\gamma\in(\beta, +\infty)(\beta\geqslant 0)$, и $\mathbf{K}$— любой компакт, лежащий в $D\cap\Lambda(\delta_0, R_0)$. Тогда для любого $w\in\mathbf{K}$ (а при $w\in\mathbf{K}$, очевидно, $\operatorname{Im} w<0$), ввиду оценок (1.15) и (1.17), будем иметь

$$\int_1^{+\infty}\sigma^{\beta-1}|U(w-i\sigma)|\,d\sigma\leqslant C\int_1^{+\infty}\frac{\sigma^{\beta-1}\,d\sigma}{|w-i\sigma|^\gamma}\leqslant$$

$$\leqslant CC(\gamma)\int_1^{+\infty}\frac{\sigma^{\beta-1}\,d\sigma}{|w|^\gamma+\sigma^\gamma}\leqslant CC(\gamma)|w|^{\beta-\gamma}\int_{R_0^{-1}}^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}\,dx}{1+x^\gamma}.$$

Так как при $w\in\mathbf{K}$ величина $|w|^{\beta-\gamma}$ равномерно ограничена, то верна оценка (1.14) и, тем самым, справедливо включение (1.16).

1.4. Лемма 1.6. *Пусть функция* $U(w)$ *непрерывна в* ∞*-звездообразной области* D *и при некотором* $\beta\in(0, +\infty)$ *имеет место включение* $U(w)\in M_\beta(D)$. *Тогда для любого* $\alpha\in(0, \beta]$ *и любого компакта* $\mathbf{K}\subset D$ *справедлива оценка*

$$\sup_{w\in\mathbf{K}}\left\{\int_0^{+\infty}\sigma^{\alpha-1}|U(w-i\sigma)|\,d\sigma\right\}<+\infty. \tag{1.18}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{K}\subset D$ — любой компакт. Выберем число $H_0\in[0, +\infty)$ настолько большим, чтобы компакт $\mathbf{K}-iH_0=\{\zeta=w-iH_0: w\in\mathbf{K}\}$ целиком содержался в угловом секторе $\Lambda(\delta_0, R_0)$ из определения 1 класса $M_\beta(D)$. Далее, полагая, что $w\in\mathbf{K}$ — любая точка, запишем

$$\int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} |U(w-i\sigma)|\, d\sigma =$$

$$=\left(\int_0^{H_0+1} + \int_{H_0+1}^{+\infty}\right) \sigma^{\alpha-1} |U(w-i\sigma)|\, d\sigma \equiv I_1(w)+I_2(w).$$

Очевидно, что если мы покажем ограниченность интегралов $I_1(w)$ и $I_2(w)$ равномерно по $w \in \mathrm{K}$, то лемма будет доказана.

Заметим сначала, что, в силу непрерывности функции $U(w)$ в D, для интеграла $I_1(w)$ имеем

$$I_1(w)=\int_0^{H_0+1} \sigma^{\alpha-1} |U(w-i\sigma)|\, d\sigma \leqslant \frac{(H_0+1)^\alpha}{\alpha} \max_{\substack{\zeta\in\mathrm{K}-i\sigma \\ 0\leqslant\sigma\leqslant H_0+1}} |U(\zeta)| < +\infty.$$

Для оценки $I_2(w)$ воспользуемся очевидным неравенством

$$(\sigma+H_0)^{\alpha-1} \leqslant C\sigma^{\beta-1};\ 1\leqslant \sigma < +\infty,$$

где $C \equiv C(\alpha, \beta, H_0) < +\infty$ — постоянная. Ввиду этого неравенства и включения $\mathrm{K} - iH_0 \subset D \cap \Lambda(\vartheta_0, R_0)$ справедливы оценки

$$I_2(w)=\int_1^{+\infty} (\sigma+H_0)^{\alpha-1} |U(w-i(H_0+\sigma))|\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant C\int_1^{+\infty} \sigma^{\beta-1} |U(w-i(H_0+\sigma))|\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{\zeta\in\mathrm{K}-iH_0} \left\{\int_1^{+\infty} \sigma^{\beta-1} |U(\zeta-i\sigma)|\, d\sigma\right\} < +\infty;\ w\in\mathrm{K}.$$

Лемма 1.7. *Пусть функция $U(w)$ непрерывна в ∞-звездообразной области D и $U(w)\in M_\beta(D)$ для некоторого $\beta\in(0, +\infty)$. Тогда:*

1°. *При любых $u\in(\inf_{w\in D}\{\mathrm{Re}\, w\}, \sup_{w\in D}\{\mathrm{Re}\, w\})$ и $d<\sup_{w\in D}\{\mathrm{Im}\, w\}$ функция $U_u(v)\equiv U(u+iv)$ принадлежит классу $\mathrm{L}_\beta(-\infty, d)$.*

2°. *При любом $\alpha\in(0, \beta]$ функции $W^{-\alpha}U(w)$ и $W^{-\alpha}|U(w)|$ определены всюду, конечны и измеримы в D.*

Доказательство. 1°. Пусть $\varepsilon>0$—любое. Легко видеть, что при $-\infty<t<d-\varepsilon$ имеем $(1+|t|)^{\beta-1}\leqslant C(d-t)^{\beta-1}$, где $C\equiv C(\beta, d, \varepsilon)\in(0, +\infty)$—постоянная. Поэтому, ввиду непрерывности функции $U(w)$

$$\int_{-\infty}^{d-\varepsilon} (1+|t|)^{\beta-1}|U(u+it)|\, dt \leqslant C\int_{-\infty}^{d-\varepsilon} (d-t)^{\beta-1} |U(u+it)|\, dt =$$

$$= C\int_\varepsilon^{+\infty} \sigma^{\beta-1} |U(u+id-i\sigma)|\, d\sigma < +\infty.$$

2°. В силу непрерывности функции $U(w)$, при любом $N \geqslant 1$ непрерывны в D также функции

$$f_N(w) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^N \sigma^{\alpha-1} U(w - i\sigma)\, d\sigma,$$

$$F_N(w) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^N \sigma^{\alpha-1} |U(w - i\sigma)|\, d\sigma.$$

Далее, ввиду оценки (1.18), существуют конечные пределы

$$\lim_{N\to\infty} f_N(w) = W^{-\alpha}\, U(w), \quad \lim_{N\to\infty} F_N(w) = W^{-\alpha}\, |U(w)|.$$

Основным результатом этого пункта является следующая

Лемма 1.8. *Пусть функция $U(w)$ гармонична в ∞-звездообразной области D и при некотором $\beta \in [0, +\infty)$ имеем $U(w) \in M_\beta(D)$. Тогда для любого $\alpha \in [0, \beta]$ функция $W^{-\alpha}\, U(w)$ также гармонична в D.*

Доказательство. Так как W^0 — тождественный оператор, в случае $\alpha = 0$ утверждение леммы очевидно. Рассмотрим случай, когда $\beta \in (0, +\infty)$ и $\alpha \in (0, \beta]$.

В силу предыдущей леммы, функция $W^{-\alpha}\, U(w)$ конечна и измерима в D. Поэтому (см., напр., [18], приложение, § 1, п. 1), для доказательства гармоничности функции $W^{-\alpha}\, U(w)$ в D достаточно показать, что для любых $w_0 \in D$ и $r \in (0, +\infty)$, таких, что $\overline{O_r(w_0)} = \{\zeta : |\zeta - w_0| \leqslant r_0\} \subset D$, справедливо равенство

$$W^{-\alpha}\, U(w_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W^{-\alpha}\, U(w_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

С этой целью заметим, что, в силу леммы 1.7 и оценки (1.18), функция $W^{-\alpha}\, |U(w)|$ также измерима и конечна в D, и

$$\int_0^{2\pi} W^{-\alpha}\, |U(w_0 + re^{i\theta})|\, d\theta < +\infty.$$

Поэтому нижеследующие интегралы абсолютно сходятся и переменой порядка интегрирования мы приходим к равенствам

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W^{-\alpha}\, U(w_0 + re^{i\theta})\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(w_0 + re^{i\theta} - i\sigma)\, d\theta \right\} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} U(w_0 - i\sigma)\, d\sigma = W^{-\alpha} U(w_0),$$

чем и завершим доказательство леммы.

Отметим, что условия, наложенные на функцию $U(w)$, можно значительно ослабить, с тем, чтобы утверждение доказанной леммы оставалось в силе. Именно, вместо равномерной ограниченности интеграла (1.14) в любом компакте $K \subset D \cap \Lambda(\delta_0, R_0)$ достаточно потребовать равномерную ограниченность этого интеграла лишь на семействе непрерывных кривых $\{l_k\} \subset D$, таких, чтобы для любого $K \subset D$ существовало $k \geqslant 1$, такое, что $\operatorname{Re} K \subset \operatorname{Re} l_k$. Однако, на этом мы останавливаться не будем.

1.5. Докажем еще две леммы, необходимые для целей дальнейшего изложения.

Лемма 1.9. *Пусть функция $U(w)$ непрерывна в угловом секторе*

$$\Lambda(\delta_0, R_0) = \left\{ w : \left| \frac{\pi}{2} + \arg w \right| \leqslant \delta_0,\ |w| \geqslant R_0 \right\} \left(0 < \delta_0 \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 < R_0 < +\infty \right)$$

и при некоторых положительных α и $\varkappa$ удовлетворяет неравенству

$$|U(w)| \leqslant C\, |w|^{-(\alpha+\varkappa)};\quad w \in \Lambda(\delta_0, R_0),$$

где $C \in (0, +\infty)$ — постоянная.

Тогда в том же угловом секторе при некоторой постоянной $C_1 \in (0, +\infty)$ справедлива оценка

$$W^{-\alpha} |U(w)| \leqslant C_1 |w|^{-\varkappa};\quad w \in \Lambda(\delta_0, R_0).$$

Доказательство. Если $w \in \Lambda(\delta_0, R_0)$, то в силу неравенства (1.17)

$$W^{-\alpha} |U(w)| \leqslant \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\alpha-1}\, d\sigma}{|w - i\sigma|^{\alpha+\varkappa}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{CC(\alpha+\varkappa)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\alpha-1}\, d\sigma}{|w|^{\alpha+\varkappa} + \sigma^{\alpha+\varkappa}} =$$

$$= \frac{CC(\alpha+\varkappa)}{\Gamma(\alpha)} |w|^{-\varkappa} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{1 + x^{\alpha+\varkappa}} \equiv C_1 |w|^{-\varkappa}.$$

Лемма 1.10. *Пусть функция $U(w)$ гармонична в ∞-звездообразной D. Тогда:*

1°. *Если $U(w) \in M_p(D)$ при некотором p $(p = 0, 1, 2, \cdots)$, то для любого $\alpha \in [0, p]$*

(а) *$W^{-\alpha} U(w)$ — гармоническая в D функция.*

(б) $\partial^p / \partial v^p\, W^{-(p-\alpha)} [W^{-\alpha} U(w)] = U(w),\ w = u + iv \in D.$ (1.19)

2°. *Если $\partial/\partial v\, U(u + iv) \in M_1(D)$, то при любом $\alpha \in (-1, 0)$*

(а) *$W^{-\alpha} U(w)$ — гармоническая в D функция.*

(б) $W^{\alpha}\, W^{-\alpha}\, U(w) = U(w) - \lim\limits_{t\to+\infty} U(u-it);\ w = u+iv \in D,$ (1.20)

при этом,

$$\lim_{t\to+\infty} U(u-it) = a_1 u + a_0, \tag{1.20'}$$

где $a_0,\ a_1 \in (-\infty,\ +\infty)$ — *постоянные.*

Доказательство. 1°. Утверждение (а) доказано в лемме 1.8. Для доказательства (б) заметим, что, в силу лемм 1.7 (1°) и 1.2, если $w = u + iv \in D$, то для всех t, таких, что $u + it \in D$

$$W^{-(p-\alpha)}\, W^{-\alpha}\, U(u+it) = W^{-p}\, U(u+it).$$

Поэтому

$$\frac{\partial^p}{\partial v^p}\, W^{-(p-\alpha)}\, [W^{-\alpha}\, U(u+iv)] = \frac{\partial^p}{\partial v^p}\, W^{-p}\, U(u+iv) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\int_{-\infty}^{v} U(u+it)\, dt = U(u+iv).$$

2°. Утверждение (а) очевидно. Для доказательства (б) заметим, что

$$W^{\alpha}\, W^{-\alpha}\, U(u+iv) = W^{\alpha}\, W^{-(1+\alpha)}\, \frac{\partial}{\partial v}\, U(u+iv) =$$

$$= W^{-1}\,\frac{\partial}{\partial v}\, U(u+iv) = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{v}\frac{\partial}{\partial t}\, U(u+it)\, dt =$$

$$= U(u+iv) - \lim_{t\to+\infty} U(u-it) \equiv U(u+iv) - \varphi(u),$$

где предел существует, конечен и зависит только от u. С другой стороны, этот предел — гармоническая в D функция, поэтому имеет место (1.20′).

1.6. Введем теперь в рассмотрение некоторый интегродифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля, который, как мы увидим ниже, получается из рассмотренного оператора Вейля посредством инверсии.

Пусть $z \in \overline{C}$ — любая точка и $w = z^{-1}$ $(\infty^{-1} = 0)$. По аналогии с полупрямой (1.12) $\Gamma(\infty,\ w)$, будем рассматривать дугу

$$L(0,\ z) = [\Gamma(\infty,\ w)]^{-1} = \{\zeta = \omega^{-1} : \omega \in \Gamma(\infty,\ w)\} \tag{1.21}$$

ортогональной к вещественной оси окружности, направленную от начала координат к точке z. Далее, будем говорить, что область D $(0 \in \mathrm{D})$ звездообразного типа относительно начала координат, или, короче, 0-звездообразна, если наряду с каждой точкой $z \in \mathrm{D}$ она содержит дугу $L(0,\ z)$.

Для дальнейшего изложения условимся там, где не оговорено иное, считать, что функция $u(z)$ определена и гармонична в некоторой 0-звездообразной области D, кроме, быть может, счетного множества точек разрыва $\{z_m\}$. При этом, мы будем полагать, что для каждого $z \in \mathrm{D}$ на дуге $L(0,\ z)$ лежит не более, чем конечное число точек разрыва функции $u(z)$, и что в лежащей на $L(0,\ z)$ достаточно малой окрестности каждой точки z_m функция $u(z)(z-z_m)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

В приводимом ниже определении интегродифференциального оператора типа Римана—Лиувилля $\overline{W}^{\alpha}$ $(-\infty<\alpha<+\infty)$ предполагается, что 0-звездообразная область определения D функции $u(z)$ лежит в верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$.

Подразумевая под сходимостью нижеследующего интеграла его абсолютную сходимость на любой дуге $L(0,\zeta)\subset L(0,z)$, компактно не содержащей точек разрыва функции $u(z)$ и сходимость в смысле главного значения Коши на остальном отрезке контура интегрирования $L(0,z)$, *первообразной порядка* α $(0<\alpha<+\infty)$ *функции* $u(z)$ назовем интеграл

$$\overline{W}^{-\alpha}u(z)\equiv e^{i\pi(\alpha-1)}\frac{z^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{L(0,z)}[i(\zeta-z)]^{\alpha-1}\zeta^{-1-\alpha}u(\zeta)\,d\zeta. \tag{1.22}$$

Далее, положим

$$\overline{W}^{0}u(z)\equiv u(z);\quad z\in\mathrm{D}. \tag{1.23}$$

Для определения *оператора дифференцирования* $\overline{W}^{\alpha}$ $(0<\alpha<+\infty)$ предположим, что ограничениям, наложенным выше на функцию $u(z)$, удовлетворяет производная

$$\frac{\partial^p}{\partial\left(\operatorname{Im}\frac{1}{z}\right)^p}u(z)=\frac{\partial^p}{\partial\left(\operatorname{Im}\frac{1}{z}\right)^p}u\left(\frac{1}{\operatorname{Re}\frac{1}{z}+i\operatorname{Im}\frac{1}{z}}\right);\quad z\in\mathrm{D},$$

где $p\geqslant 1$ — целое число, определенное неравенствами $p-1<\alpha\leqslant p$, и положим

$$\overline{W}^{\alpha}u(z)\equiv\overline{W}^{-(p-\alpha)}\left\{\frac{\partial^p}{\partial\left(\operatorname{Im}\frac{1}{z}\right)^p}u(z)\right\};\quad z\in\mathrm{D}. \tag{1.24}$$

Легко заметить, что если функция $U(w)$ определена в ∞-звездообразной области D, то функция $u(z)$, заданная тождеством

$$u(z)\equiv U(z^{-1});\quad z^{-1}\in D, \tag{1.25}$$

определена уже в 0-звездообразной области $\mathrm{D}=D^{-1}$. Кроме того, справедлива следующая лемма, устанавливающая связь между оператором $\overline{W}^{\alpha}$ $(-\infty<\alpha<+\infty)$ и оператором Вейля.

Лемма 1.11. *Если функции $U(w)$ и $u(z)$, определенные соответственно в ∞-звездообразной области $D\subset G^{(-)}=\{w:\operatorname{Im} w<0\}$ и в 0-звездообразной области $\mathrm{D}=D^{-1}\subset G^{(+)}$ связаны тождеством* (1.25), *то при любом* α $(-\infty<\alpha<+\infty)$

$$W^{\alpha}U(w)\equiv\overline{W}^{\alpha}u(z);\quad z=w^{-1}\in\mathrm{D}\subset G^{(+)}, \tag{1.26}$$

причем существование одной из сторон тождества влечет существование другой стороны.

Доказательство. В случае $\alpha = 0$ утверждение леммы очевидно, ввиду тождественности операторов W^{α} и $\overline{W}^{\alpha}$. Далее, при любом целом $p \geqslant 1$ очевидно тождество

$$\frac{\partial^p}{\partial\left(\mathrm{Im}\,\frac{1}{z}\right)^p}\, u(z) \equiv -\frac{\partial^p}{\partial(\mathrm{Im}\, w)^p}\, U(w);\; z = w^{-1} \in \mathrm{D}.$$

Поэтому достаточно доказать утверждение леммы в случае $\alpha \in (-\infty, 0)$. С этой целью, предполагая, что $w \in D$ — любая точка, произведем линейную замену переменной $\mathrm{Re}\, w + it = \omega$ в формуле (1.1). Тогда получим

$$W^{\alpha} U(w) \equiv -\frac{i}{\Gamma(|\alpha|)} \int\limits_{\Gamma(-\infty,\, w)} [i(\omega - w)]^{|\alpha|-1}\, U(\omega)\, d\omega;\; w \in D.$$

Далее, заменой переменной $\omega = \zeta^{-1}$, в силу (1.21) и (1.25), будем иметь

$$W^{\alpha} U(w) = \frac{i}{\Gamma(|\alpha|)} \int\limits_{L(0,\, z)} \left(\frac{i}{\zeta} - \frac{i}{z}\right)^{|\alpha|-1} \zeta^{-2}\, u(\zeta)\, d\zeta;\; z = w^{-1}.$$

Эта замена переменной оправдана свойствами функции $U(w)$ (см., напр., [19], гл. 1, § 3, п. 3.5). В полученном интеграле, очевидно,

$$\arg\left[\, i\left(\frac{i}{\zeta} - \frac{i}{z}\right)^{|\alpha|-1} \zeta^{-2}\, d\zeta \,\right] = 0.$$

Непосредственным подсчетом можно убедиться в том, что если $z = \rho_0\, e^{i\theta_0} \in G^{(+)}$, и $\zeta = \rho e^{i\theta} \in L(0, z)$, то

$$\arg\,[i(\zeta - z)] = \theta_0 + \theta - \pi,$$

$$d\zeta = \frac{\rho_0}{|\cos\theta_0|}\, e^{2i\theta}\, |d\theta|,$$

и что

$$\arg\,[e^{i(|\alpha|-1)\pi}\, z^{1-\alpha}\, [i(\zeta - z)]^{|\alpha|-1}\, \zeta^{1-|\alpha|}\, d\zeta] = 0.$$

Тем самым, справедлива формула (1.26), причем, ввиду обратимости произведенных операций, существование одного из ее интегралов влечет существование другого.

Введем теперь в рассмотрение классы определенных в 0-звездообразных областях функций, аналогичные классам $M_\beta(D)$ и $K_\gamma(\delta_0, D)$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $u(z)$, заданная в 0-звездообразной области* D, *принадлежит классу* $\overline{M}_\beta(\mathrm{D})$ $(0 \leqslant \beta < +\infty)$, *если существует угловой сектор вида* $\lambda(\delta_0, r_0) = \left\{z: \left|\frac{\pi}{2} - \arg z\right| \leqslant \delta_0,\ |z| < r_0\right\}$ *(где* $0 < \delta_0 \leqslant \pi/2$ *и* $0 < r_0 < +\infty$*), такой, что для любого компакта* $\mathrm{K} \subset \mathrm{D} \cap \lambda(\delta_0, r_0)$

$$\sup_{z \in \mathrm{K}} \left\{ \int\limits_{L(0,\,(z^{-1}-i)^{-1})} |z - \zeta|^{\beta-1}\, |\zeta|^{-1-\beta}\, |u(\zeta)|\, |d\zeta| \right\} < +\infty.$$

Будем говорить, что функция $u(z)$ принадлежит классу $\widetilde{\mathbf{K}}_\gamma(\delta_0, \mathbf{D})(0<\gamma<+\infty)$, если при некоторых δ_0 $(0<\delta_0\leqslant\pi/2)$ и r_0 $(0<r_0<+\infty)$ справедлива оценка

$$|u(z)|\leqslant C\,|z|^\gamma;\quad z\in \mathbf{D}\cap\lambda(\delta_0, r_0),$$

где $C\in(0, +\infty)$ — постоянная.

Как нетрудно убедиться, если функции $U(w)$ и $u(z)$ связаны тождеством (1.25), то при любых $\beta\in[0, +\infty)$, $\gamma\in(0, +\infty)$ и $\delta_0\in(0, \pi/2]$ включения $U(w)\in M_\beta(D)$ и $U(w)\in K_\gamma(\delta_0, D)$ эквивалентны, соответственно, включениям $u(z)\in\widetilde{M}_\beta(\mathbf{D})$ и $u(z)\in\widetilde{K}_\gamma(\delta_0, \mathbf{D})(\mathbf{D}=D^{-1})$, т. е.

$$\widetilde{M}_\beta(\mathbf{D})=\{u(z)\equiv U(z^{-1}):\ U(w)\in M_\beta(\mathbf{D}^{-1})\},\tag{1.27}$$

$$\widetilde{K}_\gamma(\delta_0, \mathbf{D})=\{u(z)\equiv U(z^{-1}):\ U(w)\in K_\gamma(\delta_0, \mathbf{D}^{-1})\}.$$

Поэтому все доказанные выше леммы о функциях классов $M_\beta(D)$ и $K_\gamma(\delta_0, D)$ могут быть очевидным образом переформулированы для функций классов $\widetilde{M}_\beta(\mathbf{D})$ и $\widetilde{K}_\gamma(\delta_0, \mathbf{D})$. На этих переформулировках мы останавливаться не будем. Отметим только, что в силу равенств (1.27) и леммы 1.5, при любых $\beta\in[0, +\infty)$, $\gamma\in(\beta, +\infty)$ и $\delta_0\in(0, \pi/2]$ имеет место включение

$$\widetilde{K}_\gamma(\delta_0, \mathbf{D})\subset\widetilde{M}_\beta(\mathbf{D}).\tag{1.28}$$

§ 2. Формулы типа Ф. и Р. Неванлинн, Т. Карлемана и Б. Я. Левина

В этом параграфе установлены общие формулы типа формул Ф. и Р. Неванлинн для следующих двух конкретных звездообразных областей— полукруга $G^{(+)}(R)=\{z: \operatorname{Im} z>0,\ |z|<R\}$ $(0<R+\infty)$ и полуплоскости $G_\rho^{(-)}=\{w: \operatorname{Im} w<\rho\}$ $(-\infty<\rho<0)$. Затем, опираясь на полученные формулы, путем особых предельных переходов установлены формулы типа Т. Карлемана для полукруга и формулы типа Б. Я. Левина для полуплоскости.

2.1. Для любого $w\in\mathbf{C}$ обозначим

$$\Gamma^*[w, \infty)=\{\zeta=w+i\sigma:\ 0\leqslant\sigma<+\infty\}.$$

Далее, для любой области D через D^* обозначим ее ∞-звездообразное продолжение —

$$D^*=\{\zeta=w-i\sigma:\ w\in D,\ 0\leqslant\sigma<+\infty\}.$$

Приведем теперь ряд свойств факторов и произведений типа Бляшке, установленных в работе [13]. Эти произведения, а также их свойства играют существенную роль в данной работе.

Фактор типа Бляшке для полуплоскости при любых $\zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}=\{w: \operatorname{Im} w<0\}$ и $\alpha\in(-1, +\infty)$ был введен следующим образом:

$$b_\alpha(w,\zeta) \equiv \exp\left\{-\int_0^{|\eta|}\left([\tau+i(w-\zeta)]^{-1-\alpha}+[i(w-\overline{\zeta})-\tau]^{-1-\alpha}\right)\tau^\alpha\,d\tau\right\}. \tag{2.1}$$

При этом

$$b_0(w,\zeta)=\frac{w-\zeta}{w-\overline{\zeta}}.$$

Теорема 2. А. *При любом* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *функция* $b_\alpha(w,\zeta)$ *аналитична в области* $\mathbf{C}\setminus\Gamma^*[\xi,\infty)$ *и обращается в нуль только в точке* $\zeta\in G^{(-)}$, *где имеет нуль первого порядка.*

Лемма 2.А. *Функция* $W^{-\alpha}\log b_\alpha(w,\zeta)$ $(-1<\alpha<+\infty)$ *аналитична в области* $\mathbf{C}\setminus[\zeta,\overline{\zeta}]$, *где справедливы представления*

$$W^{-\alpha}\log b_\alpha(w,\zeta)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt}{t-i(w-\xi)}, \tag{2.2}$$

$$(-1<\alpha<+\infty),$$

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w,\zeta)|=\frac{2\operatorname{Im}w}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{|\eta|}\frac{|w-\xi|^2-t^2}{|(w-\xi)^2+t^2|^2}(|\eta|-t)^\alpha\,dt. \tag{2.2'}$$

Кроме того, при отрицательных α $(-1<\alpha<0)$ *в достаточно малых окрестностях точек* ζ *и* $\overline{\zeta}$ *справедливы представления*

$$W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w,\zeta)|=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}|w-\zeta|^\alpha\cos[\alpha\arg(i(w-\zeta))]+u_\alpha^{(0)}(w),\\[2mm] \dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}|w-\overline{\zeta}|^\alpha\cos[\alpha\arg(i(\overline{\zeta}-w))]+u_\alpha^{(1)}(w),\end{cases} \tag{2.3}$$

где функции $u_\alpha^{(0)}(w)$ *и* $u_\alpha^{(1)}(w)$ *гармоничны, соответственно, в окрестностях точек* ζ *и* $\overline{\zeta}$.

Теорема 2. Б. 1° *Пусть* $\{w_k\}\subset G^{(-)}$ — *произвольная последовательность комплексных чисел (конечная или бесконечная), удовлетворяющая условию*

$$\sum_k|\operatorname{Im}w_k|^{1+\alpha}<+\infty \tag{2.4}$$

при данном α $(-1<\alpha<+\infty)$.

Тогда произведение типа Бляшке

$$B_\alpha(w)\equiv\prod_k b_\alpha(w,w_k). \tag{2.5}$$

для любого $\rho\in(-\infty,0)$ *абсолютно и равномерно сходится в замкнутой полуплоскости* $\overline{G_\rho^{(-)}}=\{w\colon\operatorname{Im}w\leqslant\rho\}$. *При этом функция* $B_\alpha(w)$ *аналитична в полуплоскости* $G^{(-)}$ *и имеет нули только в точках последовательности* $\{w_k\}$ *с кратностями, равными кратностям появления соответствующих точек* w_k *в последовательности* $\{w_k\}$.

2°. *Если* $\{w_k\}\subset G^{(-)}$ — *ограниченная последовательность, и при данном* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *соответствующее произведение абсолютно и равномерно сходится внутри* $G^{(-)}$, *то* $\{w_k\}$ *удовлетворяет условию* (2.4).

Замечание. При выполнении условия (2.4) функция $B_\alpha(w)$ $(-1<\alpha<+\infty)$ аналитически продолжается через любой интервал (a, b), не содержащий точек последовательности $\{\mathrm{Re}\, w_k\}$, в полосу $\{w: a<\mathrm{Re}\, w<b,\ 0\leqslant \mathrm{Im}\, w<+\infty\}$.

Теорема 2. В. 1°. *Если при данном* α $(0<\alpha<+\infty)$ *выполнено условие* (2.4), *то функция* $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|$ *непрерывна и субгармонична в полуплоскости* $G^{(-)}$, *причем она гармонична в области* $G^{(-)}\setminus\{\bigcup_k [w_k, \mathrm{Re}\, w_k)\}$.

Одновременно, выполняется неравенство

$$W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|\leqslant 0,\ w\in G^{(-)}.$$

2°. *Если при данном* α $(-1<\alpha<0)$ *выполнено условие* (2.4), *то функция* $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|$ *непрерывна и супергармонична в области* $G^{(-)}\setminus\{w_k\}$, *причем она гармонична в области* $G^{(-)}\setminus\{\bigcup_k[w_k, \mathrm{Re}\, w_k)\}$.

Одновременно, для любого $w\in G^{(-)}$ *такого, что* $|w-\mathrm{Re}\, w_k|>|\mathrm{Im}\, w_k|$ $(k\geqslant 1)$, *выполнено неравенство*

$$W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|\leqslant 0.$$

Замечание. При выполнении условия (2.4) ряд

$$\sum_k W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w, w_k)|=W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|\ (-1<\alpha<+\infty)$$

абсолютно и равномерно сходится в любом компакте $\mathbf{K}\subset\mathbf{C}$, не содержащем точек сгущения последовательности $\{\mathrm{Re}\, w_k\}$. Ввиду этого, функция $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|$ непрерывно продолжается из $G^{(-)}$ через любой интервал (a, b), содержащий не более, чем конечное число точек из $\{\mathrm{Re}\, w_k\}$ и

$$W^{-\alpha}\log|B_\alpha(u)|=0,\ a<u<b. \tag{2.6}$$

Теорема 2. Г. *Пусть последовательность* $\{w_k\}\subset G^{(-)}$ *подчинена условию* (2.4) *при данном* α $(-1<\alpha<+\infty)$. *Тогда для соответствующего произведения типа Бляшке справедливы неравенства*

$$\sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|B_\alpha(u+iv)||\,du\leqslant\frac{6\pi}{\Gamma(2+\alpha)}\sum_k|\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha}. \tag{2.7}$$

При $\mathrm{Im}\, w<-2\max_k|\mathrm{Im}\, w_k|$

$$|\log|B_\alpha(w)||\leqslant\frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}\{\sum_k|\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha}\}\,|\mathrm{Im}\, w|^{-1-\alpha}, \tag{2.8}$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial(\mathrm{Im}\, w)}\log|B_\alpha(w)|\right|\leqslant 2^{3+\alpha}\{\sum_k|\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha}\}\,|\mathrm{Im}\, w|^{-2-\alpha}, \tag{2.8'}$$

а при $\sup\limits_k |w_k| = M < +\infty$ *и* $|w| > 4M$ $(w \in \overline{G^{(-)}})$

$$\|\log|B_\alpha(w)|\| \leq \frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}\{\sum_k |\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha}\}|w|^{-1-\alpha} \tag{2.9}$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial(\mathrm{Im}\, w)}\log|B_\alpha(w)|\right| \leq 2^{3+\alpha}\{\sum_k |\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha}\}|w|^{-2-\alpha}. \tag{2.9'}$$

Отметим, что последние четыре неравенства не приведены в работе [13]. Однако в их справедливости нетрудно убедиться.

В дальнейшем изложении играют существенную роль также факторы и произведения типа Бляшке, которые получаются из вышеприведенных инверсией:

$$\tilde{b}_\alpha(z, s) \equiv b_\alpha(z^{-1}, s^{-1}),\ \tilde{B}_\alpha(z) \equiv \prod_k \tilde{b}_\alpha(z, s)\,(-1 < \alpha < +\infty). \tag{2.10}$$

Свойства этих функций, в том числе описываемые посредством оператора $\tilde{W}^{-\alpha}$ — инверсии оператора Вейля, являются простыми переформулировками соответствующих свойств функций $b_\alpha(w, \zeta)$ и $B_\alpha(w)$. На этих свойствах мы останавливаться не будем. Отметим только, что условие сходимости произведения $\tilde{B}_\alpha(z)\,(-1 < \alpha < +\infty)$, налагаемое на последовательность точек $\{z_k\} \in G^{(+)} = \{z\colon \mathrm{Im}\, z > 0\}$, имеет вид

$$\sum_k \left|\mathrm{Im}\,\frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{2.11}$$

В дальнейшем изложении мы неоднократно будем опираться также на введенные в § 1 определения и обозначения.

2.2. Установим следующую предварительную лемму.

Лемма 2.1. *Пусть функция $F(w)$ мероморфна в ∞-звездообразной области D и какова бы ни была область $D_1 \subset D$ такая, что $\overline{D}_1 \setminus \{\infty\} \subset D$, в ее ∞-звездообразном продолжении D_1^* эта функция имеет конечное число нулей a_k и полюсов b_n. Тогда:*

1°. *Если при данном $\alpha \in (0, +\infty)$ имеем $\log|F(w)| \in M_\alpha(D)$, то функция $W^{-\alpha}\log|F(w)|$ непрерывна в D и гармонична в области $D \setminus \{[\bigcup\limits_k \Gamma^*[a_k, \infty)] \cup [\bigcup\limits_n \Gamma^*[b_n, \infty)]\}$.*

2°. *Если при данном $\alpha \in (-1, 0)$ имеем $\partial/\partial(\mathrm{Im}\, w)\log|F(w)| \in M_{1+\alpha}(D)$, то функция $W^{-\alpha}\log|F(w)|$ непрерывна в области $D \setminus [\{a_k\} \cup \{b_n\}]$ и гармонична в области $D \setminus \{[\bigcup\limits_k \Gamma^*[a_k, \infty)] \cup [\Gamma^* b_n, \infty)]\}$. При этом, в достаточно малой окрестности каждой точки $A \in \{a_k\} \cup \{b_n\}$ справедливо представление*

$$W^{-\alpha}\log|F(w)| = d_A\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}|w - A|^\alpha \cos\{\alpha \arg[i(w - A)]\} + \psi_\alpha(w, A),$$

где d_A — кратность нуля (тогда $d_A \geq 1$) или полюса (тогда $d_A \leq -1$) в точке A, а $\psi_\alpha(w, A)$ — гармоническая в окрестности этой точки функция.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим область $D_\varepsilon = \{w \in D: \overline{O_\varepsilon(w)} = \{\zeta: |\zeta - w| \leqslant \varepsilon\} \subset D\}$. Далее, выберем любое $\rho > 0$ и составим область $D_{\varepsilon,\rho} = D_\varepsilon \cap G_\rho^{(-)}$.

Заметив теперь, что в области $D_{\varepsilon,\rho}$ функция $F(w)$ имеет конечное число нулей и полюсов, составим гармоническую в $D_{\varepsilon,\rho}$ функцию

$$U_\alpha(w) = \log\left|\frac{\prod\limits_{b_n \in D_{\varepsilon,\rho}} b_\alpha(w - i\rho, b_n - i\rho)}{\prod\limits_{a_k \in D_{\varepsilon,\rho}} b_\alpha(w - i\rho, a_k - i\rho)} F(w)\right| \quad (-1 < \alpha < +\infty),$$

где b_α — факторы типа Бляшке (2.1). Очевидно тождество

$$W^{-\alpha}\log|F(w)| \equiv W^{-\alpha}U_\alpha(w) + \sum_{a_k \in D_{\varepsilon,\rho}} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w - i\rho, a_k - i\rho)| -$$

$$- \sum_{b_n \in D_{\varepsilon,\rho}} W^{-\alpha}|b_\alpha(w - i\rho, b_n - i\rho)|; \ -1 < \alpha < +\infty. \quad (2.12)$$

1°. В силу оценки (2.9) и неравенства (1.17), при достаточно большом $R_0 \in (0, +\infty)$ и любом $\zeta = \xi + i\eta \in G_\rho^{(-)}$ имеем

$$|\log|b_\alpha(w - i\rho, \zeta - i\rho)|| \leqslant \frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}|\eta - \rho|^{1+\alpha}|w - i\rho|^{-(1+\alpha)} <$$

$$< C(1+\alpha)\frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}|\eta - \rho|^{1+\alpha}|w|^{-(1+\alpha)}; \ |w| > R_0, \ \operatorname{Im} w < 0.$$

Поэтому, ввиду включения (1.16) леммы 1.5

$$\log|b_\alpha(w - i\rho, \zeta - i\rho)| \in M_\alpha(D_{\varepsilon,\rho}) \text{ и } U_\alpha(w) \in M_\alpha(D_{\varepsilon,\rho}).$$

Следовательно, в силу леммы 1.8, функция $W^{-\alpha}U_\alpha(w)$ гармонична в $D_{\varepsilon,\rho}$, и в силу тождества (2.12) и теоремы 2. В функция $W^{-\alpha}\log|F(w)|$ непрерывна в $D_{\varepsilon,\rho}$ и гармонична в области $D_{\varepsilon,\rho} \setminus \{[\bigcup\limits_k \Gamma^*[a_k, \infty)] \cup \cup [\bigcup\limits_n \Gamma^*[b_n, \infty)]\}$. Ввиду произвольности чисел $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$ отсюда приходим к заключению, что функция $W^{-\alpha}\log|F(w)|$ непрерывна в D и гармонична в области $D \setminus \{[\bigcup\limits_k \Gamma^*[a_k, \infty)] \cup [\bigcup\limits_n \Gamma^*[b_n, \infty)]\}$.

2°. Утверждения леммы в случае $\alpha \in (-1, 0)$ доказываются вполне аналогичным образом, опираясь на включения

$$\frac{\partial}{\partial \operatorname{Im} w}\log|b_\alpha(w - i\rho, \zeta - i\rho)| \in K_{2+\alpha}\left(\frac{\pi}{2}, D_{\varepsilon,\rho}\right) \subset M_{1+\alpha}(D_{\varepsilon,\rho}),$$

которые очевидны, ввиду оценок (2.9′) и (1.17), на теорему 2.1 и первое из представлений (2.3).

Замечание. Если нули и полюсы функции $F(w)$ из предыдущей леммы расположены так, что множества $\{\bigcup\limits_k \Gamma^*[a_k, \infty)\}$ и $\{\bigcup\limits_n \Gamma^*[b_n, \infty)\}$ не пересекаются, то на основании тождества (2.12) и свойств функции $W^{-\alpha}\log|b_\alpha|$, приведенных в теореме 2. В, можно дополнительно утверждать, что:

а) если $\alpha \in (0, +\infty)$, то функция $W^{-\alpha} \log|F(w)|$ в точках $w \in \in \bigcup_k \Gamma^*[a_k, \infty)$ субгармонична, а в точках $w \in \bigcup_n \Gamma^*[b_n, \infty)$ супергармонична, т. е. при достаточно малых $r > 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W^{-\alpha} \log|F(w+re^{i\theta})|\, d\theta \begin{cases} > W^{-\alpha}\log|F(w)|, & w \in \bigcup_k \Gamma^*[a_k, \infty), \\ < W^{-\alpha}\log|F(w)|, & w \in \bigcup_n \Gamma^*[b_n, \infty); \end{cases}$$

б) если $\alpha \in (-1, 0)$, то функция $W^{-\alpha} \log|F(w)|$ в точках $w \in \in \{\bigcup_k \Gamma^*[a_k, \infty)\} \setminus \{a_k\}$ супергармонична, а в точках $w \in \{\bigcup_n \Gamma^*[b_n, \infty)\} \setminus \setminus \{b_n\}$ субгармонична.

2.3. Для дальнейшего изложения нужны также следующие две леммы.

Лемма 2.2. *Пусть функция $u(z)$ гармонична в полукруге $G^{(+)}(R) = \{z: \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$ $(0 < R < +\infty)$ и непрерывна в ее замыкании, кроме, быть может, некоторого конечного множества точек $\{c_m\}_1^q \subset \partial G^{(+)}(R)$ $(c_m \neq 0,\ 1 \leqslant m \leqslant q)$, в достаточно малой окрестности каждой из которых справедливо одно из представлений*

$$u(z) = d_m \log|z - c_m| + \Phi_m(z),$$

$$u(z) = E_m |z - c_m|^{-\gamma} |c_m z|^{\gamma} \cos\{\gamma \arg[i(z^{-1} - c_m^{-1})]\} + \tag{2.13}$$

$$+ \Psi_m(z);\ 0 \leqslant \gamma < 1,$$

где d_m, $E_m \in (-\infty, +\infty)$ — постоянные, а $\Phi_m(z)$ и $\Psi_m(z)$ — гармонические в соответствующих окрестностях функции.

Тогда в любой точке $z \in G^{(+)}(R)$ справедливо представление

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G^{(+)}(R)} u(\zeta)\, \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n}\, ds \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G^{(+)}(R)} u(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \bar z} - \left(\frac{z}{R^2 - \zeta z} - \frac{\bar z}{R^2 - \zeta \bar z}\right)\right] d\zeta, \tag{2.14}$$

где $G(\zeta, z)$ — функция Грина полукруга $G^{(+)}(R)$, $\partial/\partial n$ — оператор дифференцирования по внутренней нормали, а ds — элемент длины дуги.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1 из гл. 1 § 1 монографии [20].

Лемма 2.3. *Пусть функция $U(w)$ гармонична в полуплоскости $G_\rho^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < \rho\}$ $(-\infty < \rho < 0)$ и непрерывна в ее замыкании $\overline{G_\rho^{(-)}} = \{w: \operatorname{Im} w \leqslant \rho\}$, кроме, быть может, конечного множества точек $\{A_m\}_1^q \subset \partial G_\rho^{(-)}$ $(A_m \neq \infty,\ 1 \leqslant m \leqslant q)$, в окрестности каждой из которых допускает одно из представлений*

$$U(w) = d_m \log|w - A_m| + \varphi_m(w), \tag{2.13'}$$

$$U(w) = E_m |w - A_m|^{-\gamma} \cos\{\gamma \arg[i(w - A_m)]\} + \psi_m(w);\ 0 \leqslant \gamma < 1,$$

где d_m, $E_m \in (-\infty, +\infty)$ — постоянные, а $\varphi_m(w)$ и $\psi_m(w)$ — гармонические в соответствующих окрестностях функции.

Тогда, если

$$\sup_{v<\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}|U(u+iv)|\,du<+\infty,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|U(u+i\rho)|\,du<+\infty, \tag{2.15}$$

и справедливо представление

$$U(w)=\frac{|v-\rho|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U(t+i\rho)\,dt}{(u-t)^2+(v-\rho)^2};\ w=u+iv\in G_\rho^{(-)}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Введем гармоническую в полуплоскости $G^{(-)}$ функцию

$$V(w)=U(w+i\rho);\ w\in G^{(-)}. \tag{2.17}$$

Очевидно, что $V(w)$ непрерывна в $\overline{G^{(-)}}=\{w;\ \mathrm{Im}\,w\leqslant 0\}$, кроме точек $\{g_m\}_1^q\equiv\{A_m-i\rho\}_1^q\subset(-\infty,+\infty)$, в окрестности каждой из которых допускает одно из представлений вида (2.13'). Далее, очевидно, что

$$\sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}|V(u+iv)|\,du<+\infty.$$

Поэтому справедливо представление

$$V(w)=\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(u-t)^2+v^2};\ w=u+iv\in G^{(-)}, \tag{2.18}$$

где $d\mu(t)$ — конечная мера Лебега, причем для любой непрерызной на оси $-\infty<u<+\infty$ функции $f(u)$ $(\lim\limits_{u\to\pm\infty}f(u)=0)$

$$\lim_{v\to-0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,V(u+iv)\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,d\mu(u)$$

(см., напр., [21], гл. 1, теоремы 5.3 и 3.1 (c)).

Убедимся, что в рассматриваемом нами случае мера $d\mu(t)$ абсолютно непрерывна и равняется $V(t)\,dt$. С этой целью для заданного промежутка $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ определим последовательность финитных, непрерывных функций $\{f_n(u)\}_1^\infty$ следующим образом: на $[a,b]$ положим $f_n(u)\equiv 1$, на промежутках $(-\infty, a-1/n]$ и $[b+1/n,+\infty)$ — $f_n(u)\equiv 0$, а на промежутки $[a-1/n, a]$ и $[b, b+1/n]$ $f_n(u)$ продолжим линейно. В силу свойств функции $V(w)$, как нетрудно убедиться, при любом $n\geqslant 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(u)\,V(u)\,du=\lim_{v\to-0}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(u)\,V(u+iv)\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(u)\,d\mu(u).$$

С другой стороны, нетрудно убедиться в том, что

$$\int_a^b V(u)\,du = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)\, V(u)\, du =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)\, d\mu(u) = \int_a^b d\mu(u).$$

Следовательно, $d\mu(t) \equiv V(t)\,dt$, и поэтому сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|\,dt \qquad (2.19)$$

и справедливо представление

$$V(w) = \frac{|v|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(t)\,dt}{(u-t)^2+v^2};\quad w = u+iv \in G^{(-)}.$$

В силу определения (2.17) функции $V(w)$ это представление эквивалентно формуле (2.16) леммы, а сходимость интеграла (2.19) — сходимости интеграла (2.15).

2.4. Перейдем к установлению формул типа Ф. и Р. Неванлинн.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в замкнутой полуплоскости $\overline{G^{(+)}} \setminus \{0\} = \{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ z \neq 0\}$ и при некотором R_0 $(0 < R_0 < +\infty)$ не имеет нулей и полюсов в полукруге $\overline{G^{(+)}}(R_0) \setminus \{0\} = \{z: \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ |z| \leqslant R_0,\ z \neq 0\}$. Далее, пусть $\alpha \in (-1, +\infty)$, $\varkappa \in (0, +\infty)$ и выполнено, соответственно, одно из условий*

1°. $\log|f(z)| \in \widetilde{K}_{\alpha+\varkappa}\{\pi/2, G^{(+)}\}$, *если* $\alpha \in [0, +\infty)$,

2°. $\partial/\partial(\operatorname{Im} 1/z) \log|f(z)| \in \widetilde{K}_{1+\alpha+\varkappa}\{\pi/2, G^{(+)}\}$, *если* $\alpha \in (-1, 0)$.

Тогда, каково бы ни было R $(0 < R < +\infty)$, для любого $z \in G^{(+)}(R)$, не являющегося нулем a_k или полюсом b_n функции $f(z)$, справедлива формула

$$\sum_{|a_k|<R} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G^{(+)}(R)} \widetilde{W}^{-\alpha} \log|\widetilde{b}_\alpha(\zeta, a_k)|\, \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n}\, ds - \widetilde{W}^{-\alpha} \log|\widetilde{b}_\alpha(z, a_k)| \right\} -$$

$$- \sum_{|b_n|<R} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G^{(+)}(R)} \widetilde{W}^{-\alpha} \log|\widetilde{b}_\alpha(\zeta, b_n)|\, \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n}\, ds - \widetilde{W}^{-\alpha} \log|\widetilde{b}_\alpha(z, b_n)| \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G^{(+)}(R)} \widetilde{W}^{-\alpha} |f(\zeta)|\, \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n}\, ds - \widetilde{W}^{-\alpha} \log|f(z)|;\ -1 < \alpha < +\infty, \qquad (2.20)$$

где $G(\zeta, z)$ — функция Грина полукруга $G^{(+)}(R)$.

Доказательство. Составим функцию

$$f_\alpha(z) = \frac{\prod\limits_{|b_k|<R} \tilde{b}_\alpha(z, b_k)}{\prod\limits_{|a_k|<R} \tilde{b}_\alpha(z, a_k)} f(z); \ -1<\alpha<+\infty. \tag{2.21}$$

Очевидно, что $f_\alpha(z)$ мероморфна в $G^{(+)}(R)\setminus\{0\}$ и может иметь там лишь конечное число нулей и полюсов $\{A_m\}_1^q \subset \partial G^{(+)}(R)$, являющихся нулями или полюсами функции $f(z)$. Поэтому, ввиду леммы 2.1, функция $\tilde{W}^{-\alpha}\log|f_\alpha(z)|$ гармонична в $\overline{G^{(+)}(R)}\setminus\{0\}$, кроме точек $\{A_m\}_1^q$ в окрестности каждой из которых допускает одно из представлений (2.13) (первое—при $\alpha=0$, второе, с $\gamma=|z|$— при $-1<\alpha<0$ и с $\gamma=0$— —при $0<\alpha<+\infty$). С другой стороны, в силу оценок (2.9) — (2.9′), при $s\in G^{(+)}$ имеем

$$\log|\tilde{b}_\alpha(z, s)|\in \tilde{K}_{1+\alpha}\{\pi/2, G^{(+)}\}, \text{ при } 0\leqslant\alpha<+\infty,$$

$$\partial/\partial(\operatorname{Im} 1/z)\log|\tilde{b}_\alpha(z, s)|\in \tilde{K}_{2+\alpha}\{\pi/2; G^{(+)}\}, \text{ при } -1<\alpha<0.$$

Отсюда, на основании леммы 1.9 и условий 1°, 2° теоремы получаем

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\overline{G^{(+)}}}} \tilde{W}^{-\alpha}\log|f_\alpha(z)|=0,$$

т. е. функция $W^{-\alpha}\log|f_\alpha(z)|$ непрерывна и в точке $z=0$. Поэтому она удовлетворяет условиям леммы 2.2 и, следовательно, для нее справедливо представление (2.14), которое очевидным образом переходит в формулу (2.20) теоремы.

Отметим, что в случае $\alpha=0$ формула (2.20) совпадает с формулой Ф. и Р. Неванлинн (см., напр., [20], гл. 1, теорему 2.1) для полукруга $G^{(+)}(R)$. Отметим, далее, что если $\alpha>0$, то формула (2.20) справедлива при любом $z\in G^{(+)}(R)$.

Доказанную теорему можно дополнить также следующим замечанием, которым мы воспользуемся в дальнейшем.

Замечание. Ввиду (2.6) функция $\tilde{W}^{-\alpha}\log|\tilde{b}_\alpha(z, s)|$ $(s\in G^{(+)})$ обращается в нуль на вещественной оси. Поэтому, очевидно, контур интегрирования интегралов левой части формулы (2.20) — это направленная по возрастанию параметра θ дуга

$$\Gamma_R=\{\zeta=Re^{i\theta}: 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}. \tag{2.22}$$

Далее, ввиду теоремы 2. В, функция $\tilde{W}^{-\alpha}\log|\tilde{b}_\alpha(z, s)|$ при неотрицательных α субгармонична в $G^{(+)}$. Поэтому при $\alpha\geqslant 0$ слагаемые сумм левой части формулы (2.20) неотрицательны.

Теорема 2.2. *Пусть функция $F(w)$ мероморфна в нижней полуплоскости $G^{(-)}$ и при некотором $\rho\in(-\infty, 0)$ в замкнутой полуплоскости $\overline{G_\rho^{(-)}}=\{w: \operatorname{Im} w\leqslant\rho\}$ имеет не более, чем конечное число нулей и полюсов. Далее, пусть $\alpha\in(-1, +\infty)$, и выполнено соответственно, одно из условий:*

1°. $\log |F(w)| \in M_\alpha\{G^{(-)}\}$, при $\alpha \in [0, +\infty)$,

2°. $\partial/\partial(\operatorname{Im} w)\log|F(w)| \in M_{1+\alpha}\{G^{(-)}\}$, при $\alpha \in (-1, 0)$.

Тогда, если

$$\sup_{v<\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|F(u+iv)||\,du < +\infty,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|F(u+i\rho)||\,du < +\infty \tag{2.23}$$

и для любого $w = u + iv \in G_\rho^{(-)}$, ***не являющегося нулем*** a_k ***или полюсом*** b_n ***функции*** $F(w)$ ***справедлива формула***

$$-\sum_{\operatorname{Im} a_k<\rho} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w-i\rho,\ a_k-i\rho)| +$$

$$+\sum_{\operatorname{Im} b_n<\rho} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w-i\rho,\ b_n-i\rho)| =$$

$$=\frac{|v-\rho|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{W^{-\alpha}\log|F(t+i\rho)|}{(u-t)^2+(v-\rho)^2}\,dt -$$

$$-W^{-\alpha}\log|F(w)|;\ -1<\alpha<+\infty. \tag{2.24}$$

Доказательство. Составим функцию

$$F_\alpha(w) = \frac{\prod\limits_{\operatorname{Im} b_n<\rho} b_\alpha(w-i\rho,\ b_n-i\rho)}{\prod\limits_{\operatorname{Im} a_k<\rho} b_\alpha(w-i\rho,\ a_k-i\rho)}\,F(w);\ -1<\alpha<+\infty. \tag{2.25}$$

Эта функция, в силу теоремы 2. A, мероморфна в $\overline{G_\rho^{(-)}}$, кроме точек множеств $\{\operatorname{Re} a_k + i\rho:\ \operatorname{Im} a_k < \rho\} \subset \partial G_\rho^{(-)}$ и $\{\operatorname{Re} b_n + i\rho:\ \operatorname{Im} b_n < \rho\} \subset \partial G_\rho^{(-)}$, и может иметь там лишь конечное число нулей и полюсов $\{q_m\}_1^N \subset \subset \partial G_\rho^{(-)} (q_m \neq \infty,\ 1 \leqslant m \leqslant N)$, являющихся нулями или полюсами функции $F(w)$. Поэтому, ввиду леммы 2.1 и теоремы 2. B, функция $W^{-\alpha}\log|F_\alpha(w)|$ гармонична в $\overline{G_\rho^{(-)}}$, кроме не более, чем конечного множества точек, принадлежащих $\partial G_\rho^{(-)}$, в окрестности каждой из которых допускает одно из представлений (2.13′). Далее, ввиду оценки (2.7)

$$\sup_{v<\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|F_\alpha(u+iv)||\,du < +\infty.$$

Таким образом, функция $W^{-\alpha}\log|F_\alpha(w)|$ удовлетворяет условиям леммы 2.3. Поэтому для нее сходится интеграл (2.15) и справедливо представление (2.16). Отсюда, как нетрудно заметить, вытекают сходимость интеграла (2.23) и формула (2.24).

Отметим, что в специальном случае, когда $\alpha = 0$, формула (2.24) переходит в формулу Ф. и Р. Неванлинн (см., напр., [20], гл. 1, теорему 2.1), записанную для полуплоскости $G_\rho^{(-)}$. Далее, как и в предыдущей теореме, если $\alpha > 0$, то формула (2.24) справедлива при любом $w \in G_\rho^{(-)}$.

Следует особо отметить, что как формула (2.20) теоремы 2.1, так и формула (2.24) теоремы 2.2 имеют эквивалентные переформулировки. Эти переформулировки получаются инверсией $w = z^{-1}$ и аналогичными заменами переменных интегрирования.

2.5. Докажем две леммы, необходимые для установления формул типа Карлемана.

Полагая, что $\alpha \in (-1, +\infty)$, $r \in (0, +\infty)$ и $w, \zeta \in G^{(-)}(r) = \{w: \operatorname{Im} w < 0, |w| > r\}$ любые, введем сначала обозначения

$$\gamma_r = \{s = re^{i\theta}: -\pi \leqslant \theta \leqslant 0\} \quad (\gamma_r \equiv [\Gamma_{r^{-1}}]^{-1}) \tag{2.22'}$$

(направление этой дуги будем считать по убыванию θ),

$$I_\alpha(w, \zeta, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(s, \zeta)| \left[\frac{1}{s-w} - \frac{1}{s-\bar{w}} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{w}{r^2 - sw} - \frac{\bar{w}}{r^2 - s\bar{w}}\right)\right] ds. \tag{2.26}$$

Лемма 2.4. *При любых $\alpha \in (-1, +\infty)$, $r \in (0, +\infty)$ и $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}(r)$ справедливы соотношения*

$$I_\alpha(\zeta, r) \equiv \frac{1}{2} \lim_{v \to -\infty} |v| \, I_\alpha(iv, \zeta, r) =$$

$$= \frac{r}{\pi} \int_0^{-\pi} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(re^{i\theta}, \zeta)| \sin\theta \, d\theta, \tag{2.27}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{v \to -\infty} |v| \, W^{-\alpha} \log|b_\alpha(iv, \zeta)| = -\frac{|\eta|^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}. \tag{2.28}$$

Доказательство. Так как функция $W^{-\alpha} \log|b_\alpha(s, \zeta)|$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ непрерывна по s в замкнутой полуплоскости $\overline{G^{(-)}}$ кроме, быть может, точки ζ (см. теорему 2. В), а $|\zeta| > r$, то воспользовавшись соотношением

$$\lim_{v \to -\infty} |v| \left[\frac{1}{s-iv} - \frac{1}{s+iv} - \left(\frac{iv}{r^2 - isv} - \frac{-iv}{r^2 + isv}\right)\right] = 2i\left(\frac{r^2}{s^2} - 1\right), \tag{2.29}$$

очевидным образом получим

$$I_\alpha(\zeta, r) = \frac{1}{2} \lim_{v \to -\infty} |v| \, I_\alpha(iv, \zeta, r) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} W^{-\alpha} \log|b_\alpha(s, \zeta)| \left(\frac{r^2}{s^2} - 1\right) ds =$$

$$= \frac{r}{\pi} \int_{0}^{-\pi} W^{-\alpha} \log b_\alpha (re^{i\theta}, \zeta) \sin\theta d\theta.$$

С другой стороны, ввиду формулы (2.2), имеем

$$\frac{1}{2} \lim_{v \to -\infty} |v| W^{-\alpha} \log |b_\alpha (iv, \zeta)| =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{v \to -\infty} \frac{|v|}{\Gamma(1+\alpha)} \mathrm{Re} \int_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - |t|)^\alpha dt}{t - |v| + i\xi} =$$

$$= -\frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta| - |t|)^\alpha dt = -\frac{|\eta|^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}.$$

Лемма 2.5. *При любых* $\alpha \in (-1, +\infty)$, $r \in (0, +\infty)$ *и* $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}(r)$, *справедливы представления*

$$I_\alpha (\zeta, r) = \frac{r^2}{\Gamma(1+\alpha)} \mathrm{Re} \int_{0}^{|\eta|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{(\tau - i\zeta)^2}, \text{ если } |\xi| \geqslant r; \tag{2.30}$$

$$I_\alpha (\zeta, r) = \frac{r^2}{\Gamma(1+\alpha)} \mathrm{Re} \int_{0}^{|\eta| - \sqrt{r^2 - \xi^2}} \frac{\tau^\alpha d\tau}{(\tau - i\zeta)^2} -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} [|\eta|^{1+\alpha} - (|\eta| - \sqrt{r^2 - \xi^2})^{1+\alpha}], \text{ если } |\xi| < r. \tag{2.30'}$$

Доказательство. Заметим сначала, что поскольку

$$W^{-\alpha} \log |b_\alpha (re^{i\theta}, \zeta)| = \mathrm{Re} \{W^{-\alpha} \log b_\alpha (re^{i\theta}, \zeta)\},$$

то интеграл (2.17) можно записать в виде

$$I_\alpha (\zeta, r) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \int_{\gamma_r} W^{-\alpha} \log b_\alpha (s, \zeta) \left(\frac{r^2}{s^2} - 1\right) ds. \tag{2.31}$$

Подставив сюда интеграл типа Коши (2.2), представляющий функцию $W^{-\alpha} \log b_\alpha (s, \zeta)$ и поменяв порядок интегрирования (относительно законности этой операции см., напр., [19], гл. 1, § 7), получим

$$I_\alpha (\zeta, r) = \frac{1}{2\pi\Gamma(1+\alpha)} \left(\int_{0}^{|\eta|} + \int_{-|\eta|}^{0} \right) \mathrm{Re} \left\{ \int_{\gamma_r} \left(\frac{r^2}{s^2} - 1\right) \frac{ds}{t - i(s - \xi)} \right\} (|\eta| - |t|)^\alpha dt.$$

Далее, произведем замены переменных $|\eta| - t = \tau$ в первом и $|\eta| + t = \tau$ — во втором из этих интегралов и придем к представлению

$$I_\alpha (\zeta, r) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{0}^{|\eta|} \mathrm{Re} \{J(\tau, \zeta)\} \tau^\alpha d\tau, \tag{2.32}$$

где

$$J(\tau, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|s|=1} \left(\frac{1}{s^2} - 1 \right) \frac{ds}{s - (\zeta + i\tau) r^{-1}} \cdot \tag{2.32'}$$

Разложим интеграл $J(\tau, \zeta)$ следующим образом:

$$J(\tau, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|s|=1} \frac{ds}{s^2 [s - (\zeta + i\tau) r^{-1}]} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|s|=1} \frac{ds}{s - (\zeta + i\tau) r^{-1}} =$$

$$= J_1(\tau, \zeta) + J_2(\tau, \zeta). \tag{2.33}$$

Теперь, полагая, что $\tau \in (0, |\eta|)$, вычислим интегралы J_1 и J_2, рассматривая отдельно два случая.

а) $|\xi| = |\mathrm{Re}\, \zeta| \geqslant r$. Заметим, что подынтегральные функции интегралов J_1 и J_2 имеют полюсы первого порядка в точке $s_0 = (\zeta + i\tau) r^{-1}$ и, кроме того, подынтегральная функция J_1 имеет полюс второго порядка в точке $s = 0$. Так как в рассматриваемом слууае $|s_0| > |\mathrm{Re}\, s_0| = |\xi r^{-1}| \geqslant 1$, то

$$J_1(\tau, \zeta) = \operatorname*{res}_{s=0} \frac{1}{s^2 [s - (\zeta + i\tau) r^{-1}]} = \frac{r^2}{(\tau - i\zeta)^2}, \quad J_2(\tau, \zeta) = 0.$$

Отсюда и из (2.33), (2.32) и (2.32′) вытекает формула (2.30).

б) $0 \leqslant |\xi| = |\mathrm{Re}\, \zeta| < r$. Очевидно, что в этом случаепри $0 < \tau < |\eta| - \sqrt{r^2 - \xi^2}$ полюс $s_0 = (\zeta + i\tau) r^{-1}$ подынтегральных функций J_1 и J_2 лежит вне единичного круга, а при $|\eta| - \sqrt{r^2 - \xi^2} < \tau < |\eta|$ — внутри него. Поэтому при $0 < \tau < |\eta| - \sqrt{r^2 - \xi^2}$, как и в случае а), имеем

$$J(\tau, \zeta) = \frac{r^2}{(\tau - i\zeta)^2}; \ 0 \leqslant |\xi| < r, \ 0 < \tau < |\eta| - \sqrt{r^2 - \xi^2}. \tag{2.34}$$

Если же $|\eta| - \sqrt{r^2 - \xi^2} < \tau < |\eta|$, то

$$J_1(\tau, \zeta) = \operatorname*{res}_{s=0} \frac{1}{s^2 [s - (\zeta + i\tau) r^{-1}]} +$$

$$+ \operatorname*{res}_{s=s_0} \frac{1}{s^2 [s - (\zeta + i\tau) r^{-1}]} = \frac{r^2}{(\tau - i\zeta)^2} - \frac{r^2}{(\tau - i\zeta)^2} = 0,$$

$$J_2(\tau, \zeta) = -\operatorname*{res}_{s=s_0} \frac{1}{s - (\zeta + i\tau) r^{-1}} = -1.$$

Таким образом, ввиду (2.33)

$$J(\tau, \zeta) = -1; \ 0 \leqslant |\xi| < r, \ |\eta| - \sqrt{r^2 - \xi^2} < \tau < |\eta|. \tag{2.34'}$$

Из формул (2.34), (2.34′), (2.32) и (2.32′) очевидным образом вытекает представление (2.30′).

Замечание. Как нетрудно убедиться, при $\alpha = 0$ представления (2.30) и (2.30′) совпадают и

$$I_0(\zeta, r) = -r^2 \frac{|\eta|}{\zeta^2} \cdot \tag{2.35}$$

Далее, если $|\xi| \geqslant r$, то при любом $\tau \in [0, |\eta|]$, очевидно, $|i\zeta - \tau| \geqslant r$. Если же $|\xi| < r$, то, как нетрудно убедиться, при любом $\tau \in [0, |\eta| - \sqrt{r^2 - \xi^2}]$ опять имеем $|i\zeta - \tau| > r$. Поэтому при любых $\alpha \in (-1, +\infty)$ и $\xi \in (-\infty, +\infty)$ из представлений (2.30) и (2.30′) вытекает оценка

$$|I_\alpha(\zeta, r)| \leqslant \frac{|\eta|^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}; \ \zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}, \ |\zeta| > r, \tag{2.36}$$

2.6. Перейдем к установлению формул типа Т. Карлемана и Б. Я. Левина.

Теорема 2.3. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в замкнутой полуплоскости $\overline{G^{(+)}} \setminus \{0\} = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0, z \neq 0\}$ и при некотором R_0 $(0 < R_0 < +\infty)$ не имеет нулей и полюсов в полукруге $\overline{G^{(+)}}(R_0) \setminus \{0\} = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \leqslant R_0, z \neq 0\}$. Далее, пусть $\alpha \in (-1, +\infty)$, $\varkappa \in (1, +\infty)$ и выполнено, соответственно, одно из условий*

1°. $\log |f(z)| \in \widetilde{K}_{\alpha+\varkappa} \{\pi/2, G^{(+)}\}$, *если* $\alpha \in [0, +\infty)$,

2°. $\partial/\partial (\operatorname{Im} 1/z) \log |f(z)| \in \widetilde{K}_{1+\alpha+\varkappa} \{\pi/2, G^{(+)}\}$, *если* $\alpha \in (-1, 0)$.

Тогда при любом R $(0 < R < +\infty)$ справедлива формула

$$\sum_{|a_k|<R} \left\{ \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_k} \right|^{1+\alpha} + I_\alpha\left(\frac{1}{a_k}, \frac{1}{R}\right) \right\} -$$

$$- \sum_{|b_n|<R} \left\{ \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{b_n} \right|^{1+\alpha} + I_\alpha\left(\frac{1}{b_n}, \frac{1}{R}\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \widetilde{W}^{-\alpha} \log |f(Re^{i\theta})| \sin \theta d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) \widetilde{W}^{-\alpha} \log |f(t) f(-t)| \, dt; \ -1 < \alpha < +\infty, \tag{2.37}$$

где a_k — нули, а b_n — полюсы функции $f(z)$. При этом, слагаемые сумм левой части этой формулы неотрицательны.

Доказательство. Функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 и поэтому справедлива формула (2.20). Взяв в этой формуле $z = iy$ $(0 < y < R)$ и умножив обе части полученного равенства на $(2y)^{-1}$, устремим $y \to +0$. Ввиду лемм 2.4 и 1.9 и соотношения (2.27), мы придем к формуле (2.37). Остается только заметить, что, в силу оценки (2.36), слагаемые сумм левой части установленной формулы неотрицательны.

Замечание. Учитывая тождественность оператора $\widetilde{W}^0$ и равенство (2.35), легко заметить, что формула (2.37) в случае $\alpha = 0$ совпадает с общеизвестной формулой Карлемана для полукруга (см., напр., [10], стр. 293 (5.02′), или [22], п. 1.2.2). Отметим, что теорема 2.3 была анонсирована в заметке автора [16], однако лишь для неотрицательных значений параметра α.

Теорема 2.4. *Пусть функция $F(w)$ мероморфна в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$ и при некотором $\rho \in (-\infty, 0)$ в замк-*

нутой полуплоскости $\overline{G_\rho^{(-)}} = \{w : \operatorname{Im} w \leqslant \rho\}$ *имеет не более, чем конечное число нулей и полюсов. Далее, пусть* $\alpha \in (-1, +\infty)$ *и выполнено, соответственно, одно из условий*

1°. $\log |F(w)| \in M_\alpha \{G^{(-)}\}$, *если* $\alpha \in [0, +\infty)$,

2°. $\partial/\partial(\operatorname{Im} w) \log |F(w)| \in M_{1+\alpha} \{G^{(-)}\}$, *если* $\alpha \in (-1, 0)$.

Тогда, если

$$\sup_{v<\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |F(u+iv)|| \, du < +\infty, \tag{2.38}$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |F(u+i\rho)|| \, du < +\infty, \tag{2.38'}$$

и справедлива формула

$$\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{\operatorname{Im} a_k < \rho} (|\operatorname{Im} a_k| + \rho)^{1+\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{\operatorname{Im} b_n < \rho} (|\operatorname{Im} b_n| + \rho)^{1+\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W^{-\alpha} \log |F(u+i\rho)| \, du -$$

$$- \frac{1}{2} \lim_{v \to -\infty} |v| \, W^{-\alpha} \log |F(iv)|; \quad -1 < \alpha < +\infty, \tag{2.39}$$

где a_k *— нули, а* b_n *— полюсы функции* $F(w)$, *а предел справа существует и конечен.*

Доказательство. Функция $F(w)$, как нетрудно заметить, удовлетворяет условиям теоремы 2.2. Тем самым, сходится интеграл (2.36′) и справедлива формула (2.24). Взяв в этой формуле $w = iv$ $(v < \rho)$, умножив обе части полученного равенства на $|v|/2$, устремим $v \to -\infty$. Ввиду соотношения (2.28) и сходимости интеграла (2.36′) придем к формуле (2.39) теоремы.

Отметим, что в специальном случае, когда $\alpha = 0$, формула (2.39) переходит после замены $w \to 1/iz$ в формулу Б. Я. Левина (см. [10], гл. IV, § 2), установленную, однако, при несколько иных условиях.

§ 3. Другие формулы типа Т. Карлемана и Б. Я. Левина, их применения

В этом параграфе семейства формул типа Т. Карлемана и Б. Я. Левина, в отличие от § 2, устанавливаются, соответственно, для полукольца и области вида $\{z : |z - iR/2| < R/2, |z| > R_0\}$ $(0 < R_0 < R < +\infty)$ (см., напр., [20], гл. 1, теоремы 3.1 и 3.4). Затем приводятся некоторые применения установленных формул. При этом, мы будем пользоваться приведенным в конце § 1 определением 2 классов $\overline{M}_\beta \{G^{(+)}\}$ и $\overline{K}_\gamma \{\delta_0,$

$G^{(+)}$}, органически связанных с оператором Вейля. Мы будем пользоваться также факторами типа Бляшке для полуплоскости, определения и основные свойства которых даны в начале § 2.

3.1. Докажем две предварительные леммы.

Лемма 3.1. *При любых* r, r_0 $(0 < r < r_0 < +\infty)$ *и* $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$, $r < |\zeta| < r_0$ *справедливо равенство*

$$Q^{(1)}(r, r_0, W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w, \zeta)|) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\{W^{-\alpha}\log|b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)|\left(r_0 + \frac{r^2}{r_0}\right) -$$

$$-(r_0^2 - r^2)\frac{\partial}{\partial r_0}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)|\}\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{|\eta|^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}; \ -1 < \alpha < +\infty. \tag{3.1}$$

Доказательство. Разложим интеграл $Q^{(1)}$ на слагаемые:

$$Q^{(1)}(r, r_0, W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w, \zeta)|) = I_\alpha^{(1)} + I_\alpha^{(2)}, \tag{3.2}$$

где

$$I_\alpha^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)|\left(r_0 + \frac{r^2}{r_0}\right)\sin\theta d\theta,$$

$$I_\alpha^{(2)} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(r_0^2 - r^2)\frac{\partial}{\partial r_0}W^{-\alpha}\log|b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)|\sin\theta d\theta. \tag{3.2'}$$

Приведем интегралы $I_\alpha^{(1)}$ и $I_\alpha^{(2)}$ к удобным для дальнейших вычислений видам. Для этого заметим, что, ввиду леммы 2. А, функция $W^{-\alpha}\log b_\alpha(w, \zeta)$ аналитична вне замкнутого отрезка $[\zeta, \bar{\zeta}]$, соединяющего точки ζ и $\bar{\zeta}$, а $|\zeta| < r_0$. Воспользовавшись уравнениями Коши-Римана, интегрированием по частям получим

$$I_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{Im}\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)\}\left(r_0 - \frac{r^2}{r_0}\right)\cos\theta d\theta.$$

Теперь очевидны представления

$$I_\alpha^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{Re}\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)\}\,\mathrm{Im}\left(r_0 e^{i\theta} - \frac{r^2}{r_0 e^{i\theta}}\right)d\theta,$$

$$I_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{Im}\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)\}\,\mathrm{Re}\left(r_0 e^{i\theta} - \frac{r^2}{r_0 e^{i\theta}}\right)d\theta. \tag{3.3}$$

Из формулы (2.2) следует, что для любого $\theta \in [-\pi, \pi]$ имеют место равенства

$$\operatorname{Re}\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)\} = -\operatorname{Re}\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{-i\theta}, \zeta)\},$$
$$\operatorname{Im}\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)\} = \operatorname{Im}\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{-i\theta}, \zeta)\}.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\operatorname{Im}\left(r_0 e^{i\theta} - \frac{r^2}{r_0 e^{i\theta}}\right) = -\operatorname{Im}\left(r_0 e^{-i\theta} - \frac{r^2}{r_0 e^{-i\theta}}\right),$$
$$\operatorname{Re}\left(r_0 e^{i\theta} - \frac{r^2}{r_0 e^{i\theta}}\right) = \operatorname{Re}\left(r_0 e^{-i\theta} - \frac{r^2}{r_0 e^{-i\theta}}\right).$$

Пользуясь полученными равенствами, представления (3.3) легко преобразовать к виду

$$I_\alpha^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)\}\operatorname{Im}\left(r_0 e^{i\theta} - \frac{r^2}{r_0 e^{i\theta}}\right)d\theta,$$

$$I_\alpha^{(2)} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Im}\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)\}\operatorname{Re}\left(r_0 e^{i\theta} - \frac{r^2}{r_0 e^{i\theta}}\right)d\theta.$$

Отсюда получим

$$I_\alpha^{(1)} + I_\alpha^{(2)} = \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(r_0 e^{i\theta} - \frac{r^2}{r_0 e^{i\theta}}\right)W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta}, \zeta)\,d\theta\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=r_0}\left(1 - \frac{r^2}{s^2}\right)W^{-\alpha}\log b_\alpha(s, \zeta)\,ds\right\}.$$

Далее, ввиду формулы (2.2), переменой порядка интегрирования будем иметь

$$I_\alpha^{(1)} + I_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|\eta|}^{|\eta|}(|\eta| - |t|)^\alpha \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=r_0}\frac{(s^2 - r^2)\,ds}{s^2[t - i(s-\xi)]}\right\}dt.$$

Однако

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=r_0}\frac{(s^2 - r^2)\,ds}{s^2[t - i(s-\xi)]} =$$
$$= \operatorname*{res}_{s=0}\frac{s^2 - r^2}{s^2[t - i(s-\xi)]} + i\operatorname*{res}_{s=\xi-it}\frac{s^2 - r^2}{s^2[s - (\xi - it)]} = i,$$

поэтому

$$I_\alpha^{(1)} + I_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)}\int_{-|\eta|}^{|\eta|}(|\eta| - |t|)^\alpha dt = \frac{|\eta|^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}.$$

Отсюда и из (3.2) вытекает равенство (3.1) леммы.

Лемма 3.2. *При любых* $\rho \in (-\infty, 0)$, $r_0 \in (|\rho|, +\infty)$ *и* $\zeta = \xi + i\eta \in G_\rho^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < \rho\}$, $|\zeta| < r_0$ *справедливо равенство*

$$Q^{(2)}(\rho, r_0, W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w - i\rho, \zeta - i\rho)|) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi+\arcsin(|\rho| r_0^{-1})}^{-\arcsin(|\rho| r_0^{-1})} \Big\{|W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta} - i\rho, \zeta - i\rho)|\sin\theta -$$

$$-(r_0\sin\theta - \rho)\frac{\partial}{\partial r_0} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(r_0 e^{i\theta} - i\rho, \zeta - i\rho)|\Big\} r_0 d\theta =$$

$$= \frac{(|\eta| + \rho)^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}; \ -1 < \alpha < +\infty. \tag{3.4}$$

Доказательство. Представим $Q^{(2)}$ в виде суммы

$$Q^{(2)}(\rho, r_0, W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w - i\rho, \zeta - i\rho)|) = J_\alpha^{(1)} + J_\alpha^{(2)}, \tag{3.5}$$

где

$$J_\alpha^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi+\arcsin(|\rho| r_0^{-1})}^{-\arcsin(|\rho| r_0^{-1})} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(r_0 e^{i\theta} - i\rho, \zeta - i\rho)|\, r_0\sin\theta d\theta,$$

$$J_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi+\arcsin(|\rho| r_0^{-1})}^{-\arcsin(|\rho| r_0^{-1})} (r_0\sin\theta - \rho)\frac{\partial}{\partial r_0} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(r_0 e^{i\theta} - i\rho, \zeta - i\rho)|\, r_0 d\theta.$$

Приведем теперь интегралы $J_\alpha^{(1)}$ и $J_\alpha^{(2)}$ к удобному для дальнейших вычислений виду. Так как функция $W^{-\alpha}\log b_\alpha(w - i\rho, \zeta - i\rho)$ по лемме 2. А аналитична вне замкнутого отрезка $[\zeta, \bar\zeta + 2i\rho]$, а окружность $|w| = r_0$ не пересекается с этим отрезком, то, воспользовавшись уравнениями Коши-Римана, интегрированием по частям получим

$$J_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi+\arcsin(|\rho| r_0^{-1})}^{-\arcsin(|\rho| r_0^{-1})} |W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta} - i\rho, \zeta - i\rho)|\, r_0\cos\theta d\theta.$$

Далее, справедливы представления

$$J_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta=-\pi+\arcsin(|\rho| r_0^{-1})}^{-\arcsin(|\rho| r_0^{-1})} \mathrm{Re}\,\{W^{-\alpha} b_\alpha(r_0 e^{i\theta} - i\rho, \zeta - i\rho)\}\,\mathrm{Re}\,\{d(r_0 e^{i\theta} - i\rho)\},$$

$$J_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta=-\pi+\arcsin(|\rho| r_0^{-1})}^{-\arcsin(|\rho| r_0^{-1})} \mathrm{Im}\,\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta} - i\rho, \zeta - i\rho)\}\,\mathrm{Im}\,\{d(r_0 e^{i\theta} - i\rho)\}.$$

$$\tag{3.6}$$

Из формулы (2.2) следует, что для любого $\theta \in [-\pi, \pi]$ имеют место равенства

$$\mathrm{Re}\,\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta} - i\rho, \zeta - i\rho)\} =$$
$$= -\mathrm{Re}\,\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{-i\theta} + i\rho, \zeta - i\rho)\}, \tag{3.7}$$
$$\mathrm{Im}\,\{W^{-\alpha}\log b_\alpha(r_0 e^{i\theta} - i\rho, \zeta - i\rho)\} =$$

$$= \operatorname{Im} \{ W^{-\alpha} \log b_\alpha (r_0 e^{-i\theta} + i\rho, \zeta - i\rho) \}.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\operatorname{Re} \{ d (r_0 e^{i\theta} - i\rho) \} = \operatorname{Re} \{ d (r_0 e^{-i\theta} + i\rho) \}, \tag{3.8}$$
$$\operatorname{Im} \{ d (r_0 e^{i\theta} - i\rho) \} = - \operatorname{Im} \{ d (r_0 e^{-i\theta} + i\rho) \}.$$

Обозначим теперь через $\gamma^+ (\rho, r_0)$ дугу окружности $|s - i\rho| = r_0$, лежащую в полуплоскости $\overline{G^{(+)}}$, а через $\gamma^- (\rho, r_0)$ — дугу окружности $|s + i\rho| = r_0$, лежащую в полуплоскости $\overline{G^{(-)}}$. При этом будем полагать, что эти дуги направлены в сторону возрастания $\arg s$. Далее, обозначим $\Gamma = \gamma^- (\rho, r_0) \cup \gamma^+ (\rho, r_0)$ (причем, Γ оказывается уже замкнутым контуром).

Пользуясь равенствами (3.7), (3.8) и введенными обозначениями, представления (3.6) легко привести к следующим видам:

$$J_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \operatorname{Re} \{ W^{-\alpha} \log b_\alpha (s, \zeta - i\rho) \} \operatorname{Re} \{ ds \},$$

$$J_\alpha^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \operatorname{Im} \{ W^{-\alpha} \log b_\alpha (s, \zeta - i\rho) \} \operatorname{Im} \{ ds \}.$$

Отсюда получим

$$J_\alpha^{(1)} + J_\alpha^{(2)} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \int_\Gamma W^{-\alpha} \log b_\alpha (s, \zeta - i\rho)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma (1+\alpha)} \int_{-|\eta-\rho|}^{|\eta-\rho|} (|\eta - \rho| - |t|)^\alpha \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{ds}{s - (\xi - it)} \right\} dt.$$

Однако

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{ds}{s - (\xi - it)} = \operatorname*{res}_{s = \xi - it} \frac{1}{s - (\xi - it)} = 1,$$

так что

$$J_\alpha^{(1)} + J_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2\Gamma (1+\alpha)} \int_{-|\eta-\rho|}^{|\eta-\rho|} (|\eta - \rho| - |t|)^\alpha\, dt = \frac{(|\eta| + \rho)^{1+\alpha}}{\Gamma (2+\alpha)},$$

и ввиду (3.5) лемма доказана.

3.2. Перейдем к установлению основных теорем параграфа.

Теорема 3.1. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в замкнутой полуплоскости $\overline{G^{(+)}} \setminus \{0\} = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ z \neq 0\}$ и при некотором R_0 $(0 < R_0 < +\infty)$ не имеет нулей и полюсов в полукруге $\{z : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| \leqslant R_0\} \cup \{-R_0, R_0\}$. Далее, пусть $\alpha \in (-1, +\infty)$ и выполнено, соответственно, одно из условий*

1°. $\log |f(z)| \in \widetilde{M}_\alpha \{G^{(+)}\}$, *если* $\alpha \in [0, +\infty)$,

2°. $\partial / \partial (\operatorname{Im} 1/z) \log |f(z)| \in \widetilde{M}_{1+\alpha} \{G^{(+)}\}$, *если* $\alpha \in (-1, 0)$.

Тогда при любом $R \in (R_0, +\infty)$ справедлива формула

$$\sum_{R_0<|a_k|<R}\left\{\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_k}\right|^{1+\alpha}+I_\alpha\left(\frac{1}{a_k},\ \frac{1}{R}\right)\right\}-$$

$$-\sum_{R_0<|b_n|<R}\left\{\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{b_n}\right|^{1+\alpha}+I_\alpha\left(\frac{1}{b_n},\ \frac{1}{R}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi R}\int_0^\pi \tilde{W}^{-\alpha}\log|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{R_0}^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\tilde{W}^{-\alpha}\log|f(t)f(-t)|\,dt+$$

$$+\tilde{Q}^{(1)}(R,\ R_0,\ \tilde{W}^{-\alpha}\log|f|);\ -1<\alpha<+\infty, \tag{3.9}$$

где $\{a_k\}$ — нули, а $\{b_n\}$ — полюсы функции $f(z)$, слагаемые сумм левой части неотрицательны, и при $R\to+\infty$

$$\tilde{Q}^{(1)}(R,\ R_0,\ \tilde{W}^{-\alpha}\log|f|)\equiv-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left\{\tilde{W}^{-\alpha}\log|f(R_0e^{i\theta})|\left(\frac{1}{R_0^2}+\frac{1}{R^2}\right)\sin\theta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{R_0}-\frac{R_0}{R^2}\right)\sin\theta\frac{\partial}{\partial R_0}\tilde{W}^{-\alpha}\log|f(R_0e^{i\theta})|\right\}R_0\,d\theta=O(1). \tag{3.10}$$

Доказательство. Составим функцию $f_\alpha(z)$ по формуле (2.21). Очевидно, что эта функция мероморфна в замкнутом полукруге $\overline{G^{(+)}}(R)\setminus\{0\}=\{z:\operatorname{Im} z\geq 0,\ |z|\leqslant R,\ z\neq 0\}$ и может иметь там не более, чем конечное число нулей и полюсов $\{A_m\}_1^q\subset\overline{\partial G^{(+)}(R)}\setminus\{0\}$. Далее, как нетрудно убедиться, функция $F_\alpha(w)\equiv f_\alpha(w^{-1})$ удовлетворяет условиям леммы 2.1, и поэтому функция $u(z)=\tilde{W}^{-\alpha}\log|f_\alpha(z)|$ гармонична в $\overline{G^{(+)}(R)}\setminus\{0\}$, кроме возможных точек $\{A_m\}_1^q$, в окрестности каждой из которых допускает одно из представлений (2.13). Повторяя ход доказательства теоремы 3.2 из гл. I [20], нетрудно убедиться в том, что для $u(z)$ справедлива формула (3.2) этой теоремы, то есть

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{R_0}^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)[u(t)+u(-t)]\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi R}\int_0^\pi u(Re^{i\theta})\sin\theta d\theta+\tilde{Q}^{(1)}(R,\ R_0,\ u),$$

где

$$\tilde{Q}^{(1)}(R,\ R_0,\ u)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left\{u(R_0e^{i\theta})\left(\frac{1}{R_0^2}+\frac{1}{R^2}\right)\sin\theta+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{R_0}-\frac{R_0}{R^2}\right)\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial R_0}u(R_0e^{i\theta})\Big\}R_0\,d\theta.$$

Однако, $u(z)=\widetilde{W}^{-\alpha}\log|f_*(z)|$. Подставив выражение этой функции в последнюю формулу и учитывая, что $\widetilde{Q}^{(1)}(R, R_0, \widetilde{W}^{-\alpha}\log|\widetilde{b}_\alpha(z,\zeta)|)=$ $=Q^{(1)}(R^{-1}, R_0^{-1}, W^{-\alpha}\log|b_\alpha(z^{-1},\zeta^{-1})|)$, ввиду равенств (2.25) и (3.1), мы придем к формуле (3.9) теоремы. Остается заметить, что в силу теоремы 2.3, слагаемые сумм левой части полученной формулы неотрицательны, и что выполнено соотношение (3.10).

Замечание. Легко видеть, что поскольку оператор $\widetilde{W}^0$ тождественный, из равенства (2.35) следует, что *формула* (3.9) *при* $\alpha=0$ *совпадает с формулой Карлемана для полукольца* (см., напр., [20], гл. I, формулу (3.1)).

Теорема 3.2. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$, а также при некотором R_0 $(0<R_0<+\infty)$ — в окрестностях точек $-R_0$ и R_0. Далее пусть $f(z)$ не имеет нулей и полюсов в полукруге $\{z:\operatorname{Im}z>0,\ |z|<R_0\}$, $\alpha\in(-1,+\infty)$, и выполнено, соответственно, одно из условий*

1°. $\log|f(z)|\in\widetilde{M}_\alpha\{G^{(+)}\}$, *если* $\alpha\in[0,+\infty)$,

2°. $\partial/\partial(\operatorname{Im}1/z)\log|f(z)|\in\widetilde{M}_{1+\alpha}\{G^{(+)}\}$ *если* $\alpha\in(-1,0)$.

Тогда при любом $R\in(R_0,+\infty)$ справедлива формула

$$\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\sum_{\left|a_k-i\frac{R}{2}\right|<\frac{R}{2}}\left(\left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_k}\right|-\frac{1}{R}\right)^{1+\alpha}-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\sum_{\left|b_n-i\frac{R}{2}\right|<\frac{R}{2}}\left(\left|\operatorname{Im}\frac{1}{b_n}\right|-\frac{1}{R}\right)^{1+\alpha}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\arcsin(R_0R^{-1})}^{\pi-\arcsin(R_0R^{-1})}\widetilde{W}^{-\alpha}\log|f(R\sin\theta\,e^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{R\sin^2\theta}+$$

$$+\widetilde{Q}^{(2)}(R, R_0, \widetilde{W}^{-\alpha}\log|f|);\quad -1<\alpha<+\infty, \tag{3.11}$$

где $\{a_k\}$ — нули, а $\{b_n\}$ — полюсы функции $f(z)$, и при $R\to+\infty$

$$\widetilde{Q}^{(2)}(R, R_0, \widetilde{W}^{-\alpha}\log|f|)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\arcsin(R_0R^{-1})}^{\pi-\arcsin(R_0R^{-1})}\Big\{\widetilde{W}^{-\alpha}\log|f(R_0e^{i\theta})|\left(-\frac{\sin\theta}{R_0^2}\right)-$$

$$-\left(\frac{\sin\theta}{R_0}-\frac{1}{R}\right)\frac{\partial}{\partial R_0}\widetilde{W}^{-\alpha}\log|f(R_0e^{i\theta})|\Big\}R_0d\theta=O(1). \tag{3.12}$$

Доказательство. Для мероморфной в нижней полуплоскости функции $F(w)\equiv f(w^{-1})$ образуем $F_\alpha(w)$ по формуле (2.25), считая, что $\rho = -R^{-1}$. Эта функция окажется мероморфной в замкнутой полуплоскости $G_\rho^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w \leqslant \rho\}$ и не будет иметь там нулей и полюсов, кроме, не более чем конечного множества точек $\{c_m\}_1^q \subset \{w = u + i\rho: |u| < \sqrt{r_0^2 - \rho^2}\}(r_0 = R_0^{-1})$. Далее, как нетрудно заметить, $F_\alpha(w)$ удовлетворяет условиям 2.1. Поэтому функция $u(z) = \widetilde{W}^{-\alpha} \log |F_\alpha(z^{-1})|$ гармонична в области $\{z: |z - i R/2| \leqslant R/2,\ z \neq 0\}$, кроме точек $\{A_m\}_1^q \equiv \{c_m^{-1}\}_1^q\ (|A_m| > R_0,\ 1 \leqslant m \leqslant q)$, лежащих на границе этой области. При этом, в окрестности каждой из точек A_m функция $u(z)$ допускает, очевидно, одно из представлений (2.13). Повторяя ход доказательства теоремы 3.5 из гл. I [20], нетрудно убедиться в том, что для функции $u(z)$ справедлива формула (3.4) указанной теоремы, то есть справедлива формула

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\arcsin (R_0 R^{-1})}^{\pi - \arcsin (R_0 R^{-1})} u(R \sin \theta\, e^{i\theta}) \frac{d\theta}{R \sin^2 \theta} + \widetilde{Q}^{(2)}(R,\ R_0\ u),$$

где

$$\widetilde{Q}^{(2)}(R,\ R_0,\ u) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\arcsin (R_0 R^{-1})}^{\pi - \arcsin (RR_0^{-1})} \left\{ u(R_0 e^{i\theta}) \left(-\frac{\sin\theta}{R_0^2} \right) - \left(\frac{\sin\theta}{R_0} - \frac{1}{R} \right) \frac{\partial}{\partial R_0} u(R_0 e^{i\theta}) \right\} R_0 d\theta.$$

Подставив выражение для функции $u(z)$ и воспользовавшись равенством (3.4), мы придем к формуле (3.11)—(3.12) теоремы. Остается только заметить, что величина $\widetilde{Q}^{(2)}(R,\ R_0,\ \widetilde{W}^{-\alpha} \log |f|)$ ограничена при $R \to +\infty$.

Замечание. В случае $\alpha = 0$ формула (3.11)—(3.12) *переходит в хорошо известную формулу Б. Я. Левина* (см., напр., [20], гл. I, теорему 3.4).

3.3. Один из основных аспектов применения формул Карлемана и Б. Я. Левина — вопросы распределения значений мероморфных в замкнутой полуплоскости функций (см., напр., [20], гл. I, § 5, гл. III, § 3). Обобщения этих формул, установленные в теоремах 2.3, 3.1 и 2.4, 3.2, соответственно, имеют место при дополнительных предположениях о поведении рассматриваемой мероморфной функции $f(z)$ вблизи начала координат. А именно, при предположениях, что $f(z)$ не имеет нулей и полюсов в полукруге $\{z: \operatorname{Im} z > 0,\ |z| \leqslant R_0\}(0 < R_0 < +\infty)$, и что при заданном $\alpha \in [0, +\infty)$, выполнено включение $\log |f(z)| \in \widetilde{M}_\alpha \{G^{(+)}\}$, либо же при заданном $\alpha \in (-1, 0)$ — включение $\partial/\partial (\operatorname{Im} 1/z) \log |f(z)| \in \widetilde{M}_{1+\alpha} \{G^{(+)}\}$. Эти условия дают возможность применять к функции $\log |f(z)|$ оператор $\widetilde{W}^{-\alpha}(-1 < \alpha < +\infty)$. В следующей лемме мы покажем, что этих дополнительных условий можно избежать, если предположить, что функция $f(z)$ мероморфна в окрестности начала координат.

Лемма 3.3. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна в окрестности $|z| \leqslant R_0$ начала координат. Тогда умножением $f(z)$ на вполне определенные рациональные функции $R(z) \equiv R_\beta(z, f)$ можно добиться выполнения любого из условий*

$$1^\circ.\ \log|R(z) f(z)| \in \widetilde{K}_\beta\,[\pi/2, G^{(+)}] \text{ при заданном } \beta \in [0, +\infty),$$

$$2^\circ.\ \partial/\partial(\operatorname{Im} 1/z) \log|R(z) f(z)| \in \widetilde{K}_\beta[\pi/2, G^{(+)}] \text{ при заданном } \beta \in (0, 1).$$

Доказательство, очевидно, достаточно провести для аналитической в круге $|z| \leqslant R_0$ функции $f(z)$ $(f(0) \neq 0)$.

1°. Пусть $\beta \in [0, +\infty)$, $n > \beta$ — любое натуральное число, а

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots;\ a_0 \neq 0,\ |z| < R_0 \tag{3.13}$$

— разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора. Нетрудно заметить, что умножив $f(z)$ на n-тую частичную сумму $P_n(z)$ тейлоровского разложения функции $1/f(z)$, можно добиться того, чтобы

$$P_n(z) f(z) = 1 + b_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \cdots;\ |z| < R_0.$$

Тогда при $z \to 0$, очевидно

$$\log|P_n(z) f(z)| \sim |b_{n_1}|\,|z|^{n_1}, \text{ где } n_1 > n.$$

Поэтому, ввиду определения 2 (§ 1) классов $\widetilde{K}_\beta$, выполнено условие 1°.

2°. Заметим, что если $f(z)$ допускает разложение вида (3.13), то при $z \to 0$

$$\frac{\partial \log|f(z)|}{\partial(\operatorname{Im} 1/z)} = -\operatorname{Re}\left\{ iz^2 \frac{a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots} \right\} = O(|z|^{n_1}),$$

где $n_1 \geqslant 2$. Таким образом, условие 2° выполняется автоматически при любом $\beta \in (0, 2)$.

Докажем еще одну лемму.

Лемма 3.4. *Пусть функция $F(w)$ аналитична в замкнутой полуплоскости $\overline{G^{(-)}} \setminus \{0\} = \{w\colon \operatorname{Im} w \leqslant 0,\ w \neq 0\}$ и при некотором r $(0 < r < +\infty)$ не имеет нулей в области $\{w\colon \operatorname{Im} w < 0,\ |w| > r\}$. Далее, пусть при некотором $\alpha \in (0, +\infty)$ выполнено включение*

$$\log|F(w)| \in M_\alpha\,\{\overline{G^{(-)}} \setminus \{0\}\},$$

а при некотором $R > 0$ — неравенство

$$|F(w)| \leqslant e^{\sigma |w|^{-(\alpha+\lambda)}};\ |w| < R,\ w \in \overline{G^{(-)}} \setminus \{0\}, \tag{3.14}$$

где σ и λ — положительные постоянные.

Тогда справедливо также неравенство

$$W^{-\alpha} \log|F(w)| \leqslant \sigma_1 |w|^{-\lambda};\ |w| < R_1,\ w \in \overline{G^{(-)}} \setminus \{0\}, \tag{3.15}$$

где σ_1 — положительная постоянная, а $R_1 = \min\{R/2,\ R_0 \operatorname{tg} \delta_0,\ R_0 + 1\}$ (R_0 и δ_0 взяты из определения 1 (§ 1) класса M_α).

Доказательство. Ввиду леммы 2.1 функция $W^{-\alpha}\log|F(w)|$ определена и непрерывна в области $\overline{G^{(-)}}\setminus\{0\}$. Для исследования поведения этой функции вблизи начала координат предположим, что $|w|<R_1$ и произведем следующее разложение:

$$W^{-\alpha}\log|F(w)|=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_{R_0+1}^{+\infty}+\int\limits_{R_1}^{R_0+1}+\int\limits_{0}^{R_1}\right)t^{\alpha-1}\log|F(w-it)|\,dt\equiv$$

$$\equiv I_1(w)+I_2(w)+I_3(w).$$

Оценим теперь по отдельности интегралы I_1, I_2 и I_3.

Так как компакт $\mathbf{K}(R_0,R_1)=\{\zeta=w-iR_0: w\in\overline{G^{(-)}},\ |w|\leqslant R_1\}$ содержится в угловом секторе $\Lambda(\delta_0,R_0)=\{\zeta:|\arg\zeta+\pi/2|\leqslant\delta_0,\ |\zeta|>R_0\}$, то по определению класса M_α будем иметь

$$|I_1(w)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{1}^{+\infty}(\tau+R_0)^{\alpha-1}\,|\log|F(w-iR_0-i\tau)||\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\max\{1,(1+R_0)^{\alpha-1}\}}{\Gamma(\alpha)}\sup_{\zeta\in\mathbf{K}(R_0,R_1)}\left\{\int\limits_{1}^{+\infty}\tau^{\alpha-1}\,|\log|F(\zeta-i\tau)||\,d\tau\right\}=N_1<+\infty.$$

Далее, очевидно. что

$$|I_2(w)|\leqslant\frac{\max\{R_1^{\alpha-1},(R_0+1)^{\alpha-1}\}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{R_1}^{R_0+1}|\log|F(w-it)||\,dt.$$

Однако, легко заметить, что последний интеграл является непрерывной функцией от w в области $\overline{G^{(-)}}\setminus\{0\}+iR_1=\{w:\operatorname{Im}w\leqslant R_1, w\neq iR_1\}$, и поэтому

$$|I_2(w)|\leqslant\frac{\max\{R_1^{\alpha-1},(R_0+1)^{\alpha-1}\}}{\Gamma(\alpha)}\times$$

$$\times\max_{\substack{\operatorname{Im}w<0\\|w|<R_1}}\left\{\int\limits_{R_1}^{R_0+1}|\log|F(w-it)||\,dt\right\}=N_2<+\infty.$$

Оценим теперь интеграл I_3. В силу неравенств (3.14) и (1.17) будем иметь

$$I_3(w)\leqslant\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{R_1}t^{\alpha-1}\,|w-it|^{-(\alpha+\lambda)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sigma C(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{R_1}\frac{t^{\alpha-1}\,dt}{|w|^{\alpha+\lambda}+t^{\alpha+\lambda}}=\frac{\sigma C(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)}\left[\int\limits_{0}^{R_1|w|^{-1}}\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1+x^{\alpha+\lambda}}\right]|w|^{-\lambda}<$$

$$<\frac{\sigma C(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)}\left[\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1+x^{\alpha+\lambda}}\right]|w|^{-\lambda}\equiv N_3\,|w|^{-\lambda}.$$

Полученные для интегралов I_1, I_2 и I_3 оценки приводят к искомой оценке (3.15) — при $w \in \overline{G^{(-)}} \setminus \{0\}$ и $|w| < R_1$

$$|w|^{-\alpha} \log |F(w)| \leqslant N_1 + N_2 + N_3 |w|^{-\lambda} \leqslant \sigma_1 |w|^{-\lambda},$$

где σ_1 — положительная постоянная.

3. 4. Формулы типа Карлемана и Б. Я. Левина, установленные в теоремах 2.3, 3.1 и 2.4, 3.2, соответственно, естественно рассматривать как соотношения равновесия между распределением нулей и полюсов и ростом мероморфной в полуплоскости функции. Они могут быть записаны как соотношения равновесия для характеристик типа Неванлинны и Цудзи для полуплоскости. В этом пункте мы остановимся только на такого рода соотношениях, вытекающих из формул типа Б. Я. Левина.

Пусть функция $f(z)$ мероморфна в полуплоскости $G^{(+)} = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, а также при некотором R_0 $(0 < R_0 < +\infty)$ — в окрестностях точек $-R_0$ и R_0. Далее, пусть $f(z)$ не имеет нулей и полюсов в полукруге $\{z: \operatorname{Im} z > 0, |z| \leqslant R_0\}$ и удовлетворяет остальным условиям теоремы 3.2 при данном $\alpha \in (-1, +\infty)$.

Обозначим через $\mathbf{n}(R, f)$ число полюсов (с учетом кратностей) функции $f(z)$, лежащих в области $\left\{ z: \left|z - i\frac{R}{2}\right| \leqslant \frac{R}{2}, |z| > R_0 \right\}$.

Далее, положим

$$\mathbf{N}_\alpha(R, f) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{R_0}^{R} \frac{\mathbf{n}(t, f)}{t^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{R}\right)^\alpha dt; \quad R_0 < R < +\infty.$$

Заметим теперь, что функция $\mathbf{n}(t, f)$ имеет скачки лишь в точках $t = \rho_n / \sin \psi_n$, и величины этих скачков равны числу полюсов $b_n = \rho_n e^{i\psi_n}$ функции $f(z)$, лежащих на дугах $\{z: |z - it/2| = t/2, |z| > R_0\}$. Поэтому

$$\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{\left|b_n - i\frac{R}{2}\right| < \frac{R}{2}} \left(\frac{\sin \psi_n}{\rho_n} - \frac{1}{R}\right)^{1+\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{R_0 < \rho_n < R \sin \psi_n} \left(\frac{\sin \psi_n}{\rho_n} - \frac{1}{R}\right)^{1+\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \int\limits_{R_0}^{R} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{R}\right)^{1+\alpha} d\mathbf{n}(t, f) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{R}\right)^{1+\alpha} \mathbf{n}(t, f) \Big|_{R_0}^{R} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{R_0}^{R} \frac{\mathbf{n}(t, f)}{t^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{R}\right)^\alpha dt =$$

$$= \mathbf{N}_\alpha(R, f).$$

Отсюда следует, что формула (3.11)—(3.12) теоремы 3.2 может быть записана в виде

$$\mathbf{N}_\alpha\left(R, \frac{1}{f}\right)-\mathbf{N}_\alpha(R, f)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varkappa(R)}^{\pi-\varkappa(R)} \bar{W}^{-\alpha} \log|f(R\sin\theta e^{i\theta})| \frac{d\theta}{R\sin^2\theta}+O(1), \qquad (3.16)$$

где $\varkappa(R)=\arcsin(R_0 R^{-1})$.

Положив, как принято, $a^+=\max\{a, 0\}$, $a^-=\max\{-a, 0\}$, введем обозначения

$$\mathbf{m}_\alpha(R, f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varkappa(R)}^{\pi-\varkappa(R)}\{\bar{W}^{-\alpha}\log|f(R\sin\theta e^{i\theta})|\}^+ \frac{d\theta}{R\sin^2\theta},$$

$$\mathbf{m}_\alpha\left(R, \frac{1}{f}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varkappa(R)}^{\pi-\varkappa(R)}\{\bar{W}^{-\alpha}\log|f(R\sin\theta e^{i\theta})|\}^- \frac{d\theta}{R\sin^2\theta},$$

$$\mathbf{L}_\alpha(R, f)=\mathbf{m}_\alpha(R, f)+\mathbf{N}_\alpha(R, f).$$

Тогда формула (3.16), очевидно, запишется в виде

$$\mathbf{m}_\alpha\left(R, \frac{1}{f}\right)+\mathbf{N}_\alpha\left(R, \frac{1}{f}\right)=\mathbf{m}_\alpha(R, f)+\mathbf{N}_\alpha(R, f)+O(1),$$

или, что то же самое, в виде соотношения равновесия

$$\mathbf{L}_\alpha\left(R, \frac{1}{f}\right)=\mathbf{L}_\alpha(R, f)+O(1).$$

3.5. Формулы типа Т. Карлемана и Б. Я. Левина, установленные в теоремах 2.3, 3.1 и 2.4, 3.2, соответственно, дают возможность условиями ограниченности порождаемых из них характеристик типа Неванлинны и Цудзи выявить общие классы мерморфных в полуплоскости функций и найти для них факторизационные формулы путем предельных переходов в формулах типа Ф. и Р. Неванлинн из §2. Однако, для установления факторизационных теорем в настоящей статье применен иной метод. В этом пункте найдены достаточные условия, порождаемые формулами типа Т. Карлемана и Б. Я. Левина, при выполнении которых нули $\{z_k\}\in G^{(+)}$ аналитической в верхней полуплоскости $G^{(+)}$ функции удовлетворяют условию

$$\sum_k\left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha}<+\infty \qquad (3.17)$$

при заданном $\alpha\in(-1, +\infty)$.

Как хорошо известно (см., напр., [10], гл. V), выполнением условия (3.17) с $\alpha=0$ для нулей $\{z_k\}\subset \mathbf{C}$ целой функции определяется класс A целых функций. По аналогии с этим, *классом* $A_\alpha\{G^{(+)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ *мы будем называть множество аналитических в верхней полуплоскости* $G^{(+)}$ *функций, нули* $\{z_k\}\subset G^{(+)}$ *которых подчинены условию* (3.17).

Отметим, что примерами функций, принадлежащих классам $A_\alpha\{G^{(+)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$, являются произведения типа Бляшке автора (2.10).

Общая схема доказательства следующей теоремы содержится в мало доступной статье Неванлинны [2] и в книге Боаса [22]. Однако, в указанной книге в изложении доказательства соответствующей теоремы Неванлинны имеются существенные опечатки. Поэтому автор счел уместным воспроизвести в доказательстве своей теоремы вышеуказанную схему полностью.

Теорема 3.3. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой полуплоскости $\overline{G^{(+)}}\setminus\{0\}=\{z:\operatorname{Im} z\geqslant 0,\ z\neq 0\}$ и при некотором R_0 $(0<R_0<+\infty)$ не имеет нулей в полукруге $\{z:\operatorname{Im} z>0,\ |z|\leqslant R_0\}\cup\cup[-R_0, R_0]$. Далее, пусть $\alpha\in(-1,+\infty)$ и выполнено, соответственно, одно из условий*

1) $\log|f(z)|\in\tilde{M}_\alpha\{G^{(+)}\}$, *если* $\alpha\in[0,+\infty)$,

2) $\partial/\partial\operatorname{Im}(1/z)\log|f(z)|\in\tilde{M}_{1+\alpha}\{G^{(+)}\}$, *если* $\alpha\in(-1,0)$.

Тогда, если

$$\varlimsup_{R\to+\infty}\frac{1}{\pi R}\int_0^\pi \tilde{W}^{-\alpha}\log|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta<+\infty \tag{3.18}$$

и

$$\left(\int_{-\infty}^{-R_0}+\int_{R_0}^{+\infty}\right)\{\tilde{W}^{-\alpha}\log|f(t)|\}^{+}\frac{dt}{t^2}<+\infty, \tag{3.19}$$

то

1°. $f(z)\in A_\alpha\{G^{(+)}\}$,

$$2°.\quad \left(\int_{-\infty}^{-R_0}+\int_{R_0}^{+\infty}\right)\tilde{W}^{-\alpha}\left|\log|f(t)|\right|\frac{dt}{t^2}<+\infty, \tag{3.20}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{R_0}^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\tilde{W}^{-\alpha}\log|f(t)f(-t)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{R_0}^{+\infty}\tilde{W}^{-\alpha}\log|f(t)f(-t)|\frac{dt}{t^2}. \tag{3.21}$$

3°. *Справедливы также соотношения*

$$\frac{2}{\pi}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^\pi\tilde{W}^{-\alpha}\log|f(Re^{i\theta})|\sin\theta d\theta=h\neq\infty, \tag{3.22}$$

$$\lim_{R\to\pm\infty}\sum_{|z_k|<R}\left\{\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha}+I_\alpha\left(\frac{1}{z},\frac{1}{R}\right)\right\}=$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_k \left|\operatorname{Im} \frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{3.23}$$

Доказательство. 2°. Пусть нижний предел (3.18) достигается на последовательности $\{R_n\}_1^{\infty}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} R_n = +\infty$). Тогда из формулы (3.9)—(3.10), учитывая неотрицательность ее левой суммы, приходим к неравенствам

$$\left(\int_{-R_n/2}^{-R_0} + \int_{R_0}^{R_n/2}\right)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R_n^2}\right)\{\tilde{W}^{-\alpha} \log|f(t)|\}^- \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-R_n}^{-R_0} + \int_{R_0}^{R_n}\right)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R_n^2}\right)\{\tilde{W}^{-\alpha} \log|f(t)|\}^- \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-R_n}^{-R_0} + \int_{R_0}^{R_n}\right)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R_n^2}\right)\{\tilde{W}^{-\alpha} \log|f(t)|\}^+ \, dt + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{-R_0} + \int_{R_0}^{+\infty}\right)\{\tilde{W}^{-\alpha} \log|f(t)|\}^+ \frac{dt}{t^2} + O(1) = O(1).$$

Заметим теперь, что при $R_0 \leqslant |t| \leqslant R_n/2$ имеем $4/3\,(1/t^2 - 1/R_n^2) > 1/t^2$. Поэтому справедливо неравенство

$$\left(\int_{-R_n/2}^{-R_0} + \int_{R_0}^{R_n/2}\right)\{\tilde{W}^{-\alpha} \log|f(t)|\}^- \frac{dt}{t^2} \leqslant$$

$$< \frac{4}{3}\left(\int_{-R_n/2}^{-R_0} + \int_{R_0}^{R_n/2}\right)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R_n^2}\right)\{\tilde{W}^{-\alpha} \log|f(t)|\}^- \, dt = O(1).$$

Отсюда вытекает сходимость интеграла

$$\left(\int_{-\infty}^{-R_0} + \int_{R_0}^{+\infty}\right)\{\tilde{W}^{-\alpha} \log|f(t)|\}^- \frac{dt}{t^2},$$

что, в свою очередь, вместе со сходимостью (3.19) дает сходимость интеграла (3.20).

Для доказательства соотношения (3.21) (где правый интеграл, как мы только что доказали, абсолютно сходится) введем в рассмотрение функцию

$$\psi(t) = \int_t^{+\infty} \tilde{W}^{-\alpha} \log|f(x) f(-x)| \frac{dx}{x^2}; \; R_0 \leqslant t < +\infty$$

и заметим, что

$$d\psi(t) = -\frac{1}{t^2}\bar{W}^{-\alpha}\log|f(t)f(-t)|\,dt;\; R_0 < t < +\infty.$$

Очевидно

$$\int_{R_0}^{R}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\bar{W}^{-\alpha}\log|f(t)f(-t)|\,dt - \int_{R_0}^{R}\bar{W}^{-\alpha}\log|f(t)f(-t)|\frac{dt}{t^2} =$$

$$= -\frac{1}{R^2}\int_{R_0}^{R}\tilde{W}^{-\alpha}\log|f(t)f(-t)|\,dt = \frac{1}{R^2}\int_{R_0}^{R}t^2\,d\psi(t) =$$

$$= \psi(R) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\psi(R_0) - \frac{2}{R^2}\int_{R_0}^{R}t\psi(t)\,dt.$$

Соотношение (3.21) следует в силу того, что при $R \to +\infty$ имеем $\psi(R) - \left(\frac{R_0}{R}\right)^2\psi(R_0) = o(1)$ и, одновременно, как нетрудно проверить,

$$\frac{1}{R^2}\int_{R_0}^{R}t\psi(t)\,dt = o(1).$$

1°. Если нижний предел (3.18) достигается на последовательности $\{R_n\}_1^\infty$, то ввиду формулы (3.9)—(3.10) и соотношений (3.18), (3.21) при $n \to \infty$

$$\sum_{|z_k|<R_n}\left\{\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha} + I_\alpha\left(\frac{1}{z_k}, \frac{1}{R_n}\right)\right\} = O(1). \tag{3.24}$$

Слагаемые этой суммы нестрицательны и, как нетрудно заметить (см. представления (2.30), (2.30′)),

$$\lim_{R\to+\infty} I_\alpha\left(\frac{1}{z_k}, \frac{1}{R}\right) = 0. \tag{3.24′}$$

Возьмем какое-либо $R \in (R_0, +\infty)$. При достаточно больших $n > 1$ имеем $R_n > R$, и справедливы неравенства

$$0 \leqslant \sum_{|z_k|<R}\left\{\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha} + I_\alpha\left(\frac{1}{z_k}, \frac{1}{R_n}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|z_k|<R_n}\left\{\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha} + I_\alpha\left(\frac{1}{z_k}, \frac{1}{R_n}\right)\right\} = O(1).$$

Устремив $n \to \infty$, получим

$$\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\sum_{|z_k|<R}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha} \leqslant N < +\infty.$$

Ввиду произвольности числа $R > R_0$, отсюда вытекает, что выполнено условие (3.17), т. е. $f(z) \in A_\alpha\{G^{(+)}\}$.

3°. Заметим, что для доказательства соотношения (3.23) достаточно показать, что

$$\lim_{R\to+\infty} \sum_{|z_k|<R} I_\alpha\left(\frac{1}{z_k}, \frac{1}{R}\right) = 0.$$

С этой целью для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $R_\varepsilon > R_0$ настолько большим, чтобы имели

$$\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{|z_k|>R_\varepsilon} \left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_k}\right|^{1+\alpha} < \varepsilon.$$

Тогда, в силу оценки (2.36), при любом $R > R_\varepsilon$ будем иметь

$$\left|\sum_{|z_k|<R} I_\alpha\left(\frac{1}{z_k}, \frac{1}{R}\right)\right| \leqslant \sum_{|z_k|<R_\varepsilon}\left| I_\alpha\left(\frac{1}{z_k}, \frac{1}{R}\right)\right| + \varepsilon$$

Следовательно, по (3.24′)

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}} \left|\sum_{|z_k|<R} I_\alpha\left(\frac{1}{z_k}, \frac{1}{R}\right)\right| \leqslant \varepsilon,$$

и соотношение (3.23) следует из произвольности $\varepsilon > 0$.

Для доказательства соотношения (3.22) заметим, что

$$\lim_{R\to+\infty} \tilde{Q}^{(1)}(R, R_0, \tilde{W}^{-\alpha}\log|f|) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left\{ \tilde{W}^{-\alpha}\log|f(R_0 e^{i\theta})|\, R_0^{-1} + \frac{\partial}{\partial R_0}\tilde{W}^{-\alpha}\log|f(R_0 e^{i\theta})|\right\}\sin\theta d\theta,$$

где правый интеграл абсолютно сходится. Ввиду формулы (3.9), отсюда и из существования конечных пределов (3.21), (3.23) вытекает соотношение (3.22).

Аналогичным способом доказывается следующая

Теорема 3.4. *Пусть функция $F(w)$ аналитична в полуплоскости $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$, при любом $\rho \in (-\infty, 0)$ имеет конечное число нулей и полюсов в полуплоскости $G_\rho^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < \rho\}$. Далее, пусть $\alpha \in (-1, +\infty)$, и выполнено, соответственно, одной из условий*

1) $\log|F(w)| \in M_\alpha\{G^{(-)}\}$, *при* $\alpha \in [0, +\infty)$,

2) $\partial/\partial(\operatorname{Im} w)\log|F(w)| \in M_{1+\alpha}\{G^{(-)}\}$, *при* $\alpha \in (-1, 0)$.

Тогда, если

$$\sup_{\rho<0}\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha}\log|F(u+i\rho)|\,|\,du < +\infty, \tag{3.25}$$

то

1°. *Нули $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ функции $F(w)$ удовлетворяют условию*

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{3.26}$$

2°. *Справедливы соотношения*

$$\lim_{\rho\to 0}\sum_{\operatorname{Im} w_k<\rho}(|\operatorname{Im} w_k|+\rho)^{1+\alpha}=\sum_k|\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha},$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|F(u+i\rho)||\,du=H\neq\infty.$$

§ 4. Факторизационные теоремы для некоторых классов аналитических в полуплоскости функций

Теоремы 4.1 и 4.2, 4.3, установленные в этом параграфе, являются, соответственно, решениями задач 2 и 3, сформулированных во введении, для широких классов аналитических в полуплоскости функций.

4.1. Мы будем опираться на следующую теорему о представлении гармонической в полуплоскости $G^{(+)}=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$ функции, по существу, принадлежащую Р. Неванлинне. Эту теорему нетрудно установить путем предельного перехода $R\to+\infty$ в представлении Пуассона гармонической в $G^{(+)}$ функции в полукруге $G^{(+)}(R)=\{z:\operatorname{Im} z>0,\ |z|<R\}$ (см., напр., [2], или [22], пункт 6.5, где это сделано для логарифма модуля аналитической в полуплоскости функции).

Теорема 4. А. *Пусть функция $u(z)$ гармонична в полуплоскости $G^{(+)}$ и непрерывна в ее замыкании $\overline{G^{(+)}}=\{z:\operatorname{Im} z\geqslant 0\}$, кроме не более, чем счетного множества точек $\{c_m\}_1^N$. При этом, если $N=+\infty$, то $\lim_{m\to\infty}|c_m|=+\infty$, эти точки лежат на вещественной оси, и в достаточно малой окрестности каждой из них имеет место одно из представлений* (2.13).

Далее, пусть

$$\varliminf_{R\to+\infty} R^{-1}\int_0^{\pi} u(Re^{i\theta})\sin\theta d\theta<+\infty$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[u(t)]^+}{1+t^2}\,dt<+\infty.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|u(t)|}{1+t^2}\,dt<+\infty, \tag{4.1}$$

и справедливо представление

$$u(z)=hy+\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)\,dt}{(x-t)^2+y^2};\quad z=x+iy\in G^{(+)}, \tag{4.2}$$

где $h \in (-\infty, +\infty)$ — *постоянная и*

$$h = \frac{2}{\pi} \lim_{R \to +\infty} \cdot R^{-1} \int_0^{\pi} u(R e^{i\theta}) \sin \theta d\theta. \tag{4.3}$$

Для дальнейшего изложения нам нужна также следующая

Лемма 4.1. *Пусть* $\mu(t)$ — *функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке оси* $-\infty < t < +\infty$ *и*

$$\varphi(w) \equiv \frac{h}{iw} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{w - t}; \quad w \in G^{(-)},$$

где $h \in (-\infty, +\infty)$ — *постоянная.*

Тогда:

1°. *Если для некоторого* $\alpha \in [0, +\infty)$ *и целого* $p \geqslant 0$ $(p-1<\alpha\leqslant p)$ *имеем*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+|t|^{1+\alpha-p}} < +\infty, \tag{4.4}$$

то при любом $w = u + iv \in G^{(-)}$

$$\frac{\partial^p}{\partial v^p} W^{-(p-\alpha)} \varphi(w) = \Gamma(1+\alpha) e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)} \left\{ \frac{h}{w^{1+\alpha}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(w-t)^{1+\alpha}} \right\}. \tag{4.5}$$

2°. *Если при некотором* $\alpha \in (-1, 0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+|t|^{1+\alpha}} < +\infty, \tag{4.4'}$$

то для любого $w \in G^{(-)}$

$$W^{\alpha} \varphi(w) = \Gamma(1+\alpha) e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)} \left\{ \frac{h}{w^{1+\alpha}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(w-t)^{1+\alpha}} \right\}. \tag{4.5'}$$

Доказательство. Мы воспользуемся следующей формулой, легко проверяемой методами теории вычетов

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\gamma-1} d\sigma}{\sigma + iz} = \Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)(iz)^{\gamma-1}; \quad \gamma \in (0, 1), \quad z \in G^{(-)}, \tag{4.6}$$

а также тем, что для любого компакта $\mathbf{K} \subset G^{(-)}$ и любого $\lambda \in [-1, +\infty)$

$$\sup_{\substack{-\infty < t < \infty \\ w \in \mathbf{K}}} \left\{ \frac{1+|t|^{1+\lambda}}{|w-t|^{1+\lambda}} \right\} = C_\lambda(\mathbf{K}) < +\infty. \tag{4.7}$$

1°. Пусть сначала $\alpha = p \geqslant 0$ — целое. Тогда, ввиду тождественности оператора $W^{-(p-\alpha)} \equiv W^0$ и условия (4.4), формула (4.5) очевидна.

Если же $\alpha \in (0, +\infty)$ не целое (в этом случае $0 < p - \alpha < 1$), то достаточно лишь показать, что

$$W^{-(p-\alpha)}\varphi(w) = \Gamma(1+\alpha-p)\left\{\frac{h}{(iw)^{1+\alpha-p}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha-p}}\right\}. \quad (4.8)$$

С этой целью убедимся, во-первых, в том, что повторный интеграл $W^{-(p-\alpha)}\varphi(w)$ абсолютно сходится. Действительно, в силу неравенства (1.17) и (4.7)

$$W^{-(p-\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\mu(t)|}{|w-t|} = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)}\int_0^{+\infty}\sigma^{p-\alpha-1}d\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\mu(t)|}{|w-t-i\sigma|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(p-\alpha)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-\alpha-1}\,dx}{1+x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\mu(t)|}{|w-t|^{1+\alpha-p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}\,C_{\alpha-p}(w)}{\Gamma(p-\alpha)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-\alpha-1}\,dx}{1+x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\mu(t)|}{1+|t|^{1+\alpha-p}} < +\infty.$$

Ввиду этого и формулы (4.6), переменой порядка интегрирования приходим к (4.8). Утверждение 2° доказывается аналогично.

4.2. В этом пункте, как и во всем дальнейшем изложении, мы вновь будем пользоваться определениями 1, 2 классов M_β, K_γ и $\widetilde{M}_\beta$, $\widetilde{K}_\gamma$, приведенными в § 1. Мы будем также пользоваться произведениями типа Бляшке для полуплоскости, определения и ряд основных свойств которых были приведены в начале § 2.

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой полуплоскости $\overline{G^{(+)}}\setminus\{0\} = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ z \neq 0\}$ и при некотором R_0 $(0 < R_0 < +\infty)$ не имеет нулей в полукруге $\overline{G^{(+)}(R_0)}\setminus\{0\} = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ |z| \leqslant R_0,\ z \neq 0\}$. Далее, пусть выполнено одно из условий:*

1°. $\log|f(z)| \in \widetilde{K}_{\alpha+\varkappa}\left\{\frac{\pi}{2}, G^{(+)}\right\}$ *при некоторых* $\alpha \in [0, +\infty)$ *и* $\varkappa \in [1-\alpha+p, +\infty)$,

2°. $\partial/\partial(\operatorname{Im} 1/z)\log|f(z)| \in \widetilde{K}_{1+\alpha+\varkappa}\left\{\frac{\pi}{2}, G^{(+)}\right\}$ *при некоторых* $\alpha \in (-1, 0)$ *и* $\varkappa \in [1-\alpha, +\infty)$.

Тогда, если

$$\varliminf_{R\to+\infty} R^{-1}\int_0^{\pi}\widetilde{W}^{-\alpha}\log|f(Re^{i\theta})|\sin\theta\, d\theta < +\infty \quad (4.9)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[\widetilde{W}^{-\alpha}\log|f(t)|]^{+}}{1+t^2}\,dt < +\infty, \quad (4.10)$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{W}^{-\alpha} \log|f(t)||}{|t|^{\alpha}(1+|t|^{2-\alpha})}\, dt < +\infty, \tag{4.11}$$

нули $\{z_k\} \subset G^{(+)}$ *функции* $f(z)$ *подчинены условию*

$$\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_k} \right|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{4.12}$$

Одновременно, справедливо представление

$$f(z) = \tilde{B}_\alpha(z, \{z_k\}) \exp\left\{\Gamma(1+\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)} \left[hz^{1+\alpha} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{W}^{-\alpha} \log|f(t)|}{t^2(1/z - 1/t)^{1+\alpha}}\, dt \right] + iC \right\};\ z \in G^{(+)}, \tag{4.13}$$

где C, $h \in (-\infty, +\infty)$ — *постоянные, причем*

$$h = \frac{2}{\pi} \lim_{R \to +\infty} R^{-1} \int\limits_0^{\pi} \tilde{W}^{-\alpha} \log|f(Re^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta. \tag{4.14}$$

Доказательство. Заметим, во-первых, что, в силу леммы 1.9, при $z \to 0$ $(z \in \overline{G^{(+)}})$

$$|\tilde{W}^{-\alpha} \log|f(z)|| < O(|z|^{\alpha}). \tag{4.15}$$

Ввиду включения (1.28), функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теорем 3.1 и 3.3. Следовательно, по теореме 3.3, $f(z) \in A_\alpha[G^{(+)}]$, т. е. ее нули $\{z_k\} \subset G^{(+)}$ подчинены условию (4.12). Поэтому по теореме 2. Б, сходится произведение типа Бляшке $\tilde{B}_\alpha(z, \{z_k\})$, и функция

$$f_\alpha(z) = \frac{f(z)}{\tilde{B}_\alpha(z, \{z_k\})}\quad (\neq 0,\ z \in G^{(+)}) \tag{4.16}$$

аналитична в $\overline{G^{(+)}} \setminus \{0\}$, кроме точек $\{(\operatorname{Re} 1/z_k)^{-1}\}$ (см. замечание к теореме 2. Б). С другой стороны, из неравенств (2.9), (2.9′) и условий 1°, 2° теоремы следует, что если $\alpha \in [0, +\infty)$ то $\log|f_\alpha(z)| \in \tilde{K}_{\alpha+\gamma}\{\pi/2, G^{(+)}\}$, а если $\alpha \in (-1, 0)$, то $\partial/\partial(\operatorname{Im} 1/z) \log|f_\alpha(z)| \in$ $\in \tilde{K}_{1+\alpha+\gamma}\{\pi/2, G^{(+)}\}$ $(\gamma = \min\{\alpha, 1\})$. Поэтому, в силу леммы 2.1 и теоремы 2.B, функция

$$u(z) = \tilde{W}^{-\alpha} \log|f_\alpha(z)| = \tilde{W}^{-\alpha} \log|f(z)| - \tilde{W}^{-\alpha} \log|\tilde{B}_\alpha(z, \{z_k\})| \tag{4.17}$$

гармонична в $\overline{G^{(+)}} \setminus \{0\}$, кроме точек $\{c_m\}_1^N \equiv \{(\operatorname{Re} 1/z_m)^{-1}\}_1^N$ $(N \leqslant \infty$, $\{z_m\}_1^N \subset \overline{G^{(+)}} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Re} z_m \neq 0)$, находимых и по нулям функции $f(z)$, лежащим на вещественной оси. Одновременно, в достаточно малой окрестности каждой из этих точек функция $u(z)$ допускает одно из представлений (2.13). Следует также отметить, что в силу леммы 1.9 эта функция непрерывна в начале координат, причем $u(0) = 0$.

Как нетрудно убедиться, ввиду (2.27), (2.30)—(2.30′) и замечания к теореме 2.B, имеем

$$\lim_{R\to+\infty} R^{-1} \int_0^{\pi} \widetilde{W}^{-\alpha} \log|\widetilde{B}_\alpha(Re^{i\theta}, |z_k|)| \sin\theta d\theta = 0. \tag{4.18}$$

Отсюда и из равенства (2.6) вытекает, что функция $u(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.A, и тем самым допускает представление вида (4.1)—(4.3). Одновременно, из (4.18) следует, что в этом представлении число h определяется из соотношения (4.14). Далее, так как в (4.17) последнее слагаемое исчезает на вещественной оси, то ввиду (4.15) очевидна сходимость интеграла (4.11).

Итак, при любом $z = x + iy \in G^{(+)}$

$$\widetilde{W}^{-\alpha} \log|f_\alpha(z)| = hy + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{W}^{-\alpha} \log|f(t)|}{(x-t)^2 + y^2} dt. \tag{4.19}$$

Остается лишь доказать справедливость представления (4.13). С этой целью введем гармоническую в полуплоскости $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$ функцию

$$U(w) \equiv \log|f_\alpha(w^{-1})|. \tag{4.20}$$

Тогда, в силу тождества (1.26), будем иметь

$$W^{-\alpha} U(w) \equiv \widetilde{W}^{-\alpha} \log|f_\alpha(w^{-1})|,$$

и представление (4.19) легко преобразуется к виду

$$W^{-\alpha} U(w) = \operatorname{Re}\left\{ \frac{h}{iw} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{W}^{-\alpha} \log|f(t^{-1})|}{w - t} dt \right\}; \; w \in G^{(-)}.$$

С другой стороны, из (4.11) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widetilde{W}^{-\alpha} \log|f(t^{-1})||}{1 + |t|^{2-\varkappa}} dt < +\infty,$$

причем, $2 - \varkappa \leqslant 1 + \alpha - p$, если $\alpha \in [0, +\infty)$, и $2 - \varkappa \leqslant 1 + \alpha$, если $\alpha \in (-1, 0)$. Воспользовавшись теперь леммами 1.10 и 4.1 и учитывая, что

$$\lim_{\substack{w\to\infty \\ w \in \overline{G^{(-)}}}} U(w) = \lim_{\substack{z\to 0 \\ z \in \overline{G^{(+)}}}} \log|f_\alpha(z)| = 0$$

(см. оценку (2.9)), приходим к представлению

$$U(w) = \Gamma(1+\alpha) \operatorname{Re}\left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)} \left[\frac{h}{w^{1+\alpha}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{W}^{-\alpha} \log|f(t^{-1})|}{(w-t)^{1+\alpha}} dt \right] \right\}.$$

Отсюда и из (4.20), (4.16) следует представление (4.13).

Замечание 1. *Число $h \in (-\infty, +\infty)$ в факторизационной формуле (4.13) по аналогии с классическим случаем естественно называть обобщенным средним типом функции $f(z)$. Помимо (4.14) имеет место другое соотношение для определения обобщенного среднего типа:*

$$h = \lim_{y \to +\infty} y^{-1} \tilde{W}^{-\alpha} \log |f(iy)|. \tag{4.14'}$$

На доказательстве этого соотношения мы останавливаться не будем.

Замечание 2. *Пусть $f(z)$ — аналитическая в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{G^{(+)}} = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ функция конечного порядка $\rho\ (0 \leqslant \rho < +\infty)$:*

$$\rho = \overline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{\log \log (\max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} |f(R e^{i\theta})|)}{\log R}.$$

Тогда при любом $\alpha > \max\{\rho - 1, 0\}$ по коэффициентам разложения Тейлора функции $f(z)$ в окрестности начала координат можно построить полином $P_n(z)$ степени $n = [\alpha] + 3$, такой, чтобы для функции $f(z) P_n(z)$ была бы справедлива факторизация вида (4.11)—(4.14).

Докажем справедливость этого замечания.

Обозначим $\rho' = \max\{\rho, 1\}$. Тогда, если $\alpha > \max\{\rho - 1, 0\}$, то $\alpha = \rho' + \varepsilon - 1$, где $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Ввиду утверждения 1° леммы 3.3, умножив $f(z)$ на вполне определенный полином $P_n(z)$ степени $n = [\alpha] + 3$, добьемся выполнения условия 1° теоремы 4.1 для функции $f(z) P_n(z)$. С другой стороны, очевидно, что каково бы ни было число $\gamma \in (\max\{\varepsilon - 1, 0\}, \varepsilon)$, при достаточно большом $R_0\ (0 < R_0 < +\infty)$ имеет место неравенство

$$|f(R e^{i\theta}) P_n(R e^{i\theta})| < e^{R^{\rho' + \gamma}}; \ R > R_0, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Отсюда, в силу леммы 3.4 следует, что

$$\tilde{W}^{-\alpha} \log |f(R e^{i\theta}) P_n(R e^{i\theta})| < \sigma_1 R^{\gamma - \varepsilon + 1}; \ R > R_0, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

где σ_1 — положительная постоянная, и $\gamma - \varepsilon + 1 \in (0, 1)$.

Ввиду свойств последней функции, вытекающих из лемм 1.9 и 2.1, для $f(z) P_n(z)$ выполнены все условия теоремы 4.1, и, тем самым, эта функция допускает факторизацию вида (4.11)—(4.14).

Замечание 3. Качественно иные факторизации для аналитических, или мероморфных в полуплоскости $\overline{G^{(+)}} = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ функций любого конечного порядка, впервые были установлены Р. Неванлинной [2], а затем Н. В. Говоровым [23].

4.3. Введем в рассмотрение два класса функций, гармонических в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$.

Определение 1. Классы $\mathbf{U}^+$ и $\mathbf{U}^\infty$ — множества гармонических в $G^{(-)}$ функций $U(w)$, подчиненных соответственно условиям

$$\sup_{v<0} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(u + iv)]^+ \, du < +\infty, \tag{4.21}$$

$$\sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}|U(u+iv)|\,du<+\infty. \tag{4.22}$$

Очевидно, включение $\mathrm{U}^m\subset\mathrm{U}^+$. С другой стороны, с вводом в рассмотрение аналитической в верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ функции

$$f(z)\equiv\exp\,[U(-z)+V(z)]$$

(где $U(w)\in\mathrm{U}^+$, или $U(w)\in\mathrm{U}^m$, а $V(z)$ — сопряженная к гармонической в $G^{(+)}$ функции $\varphi(z)\equiv U(-z)$), из теорем XVII и XX работы В. И. Крылова [9] следуют теоремы о параметрических представлениях классов U^+ и U^m.

Теорема 4. Б. *Класс* U^+ *совпадает с множеством гармонических в* $G^{(-)}$ *функций, представимых в виде*

$$U(w)=a\,|v|+\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(u-t)^2+v^2};\quad w=u+iv\in G^{(-)}, \tag{4.23}$$

где $a\in(-\infty,\,0]$ — *постоянная, а фунция* $\mu(t)$ *представима в виде* $\mu(t)=\mu_1(t)-\mu_2(t)$, *где* $\mu_1(t)$ *и* $\mu_2(t)$ — *неубывающие функции, подчиненные условиям*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d\mu_1(t)<+\infty,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_2(t)}{1+t^2}<+\infty. \tag{4.23'}$$

Теорема 4. В. *Класс* U^m *совпадает с множеством гармонических в* $G^{(-)}$ *функций, представимых в виде* (4.23), *где* $a=0$, *а* $\mu(t)$ — *функция ограниченной вариации на оси* $-\infty<t<+\infty$.

Введем теперь в рассмотрение еще один класс гармонических в полуплоскости $G^{(-)}$ функций и найдем его параметрическое представление.

Определение 2. Класс $\mathrm{U}^+_\varkappa$ $(-1<\varkappa<1)$ — множество гармонических в $G^{(-)}$ функций $U(w)\in\mathrm{U}^+$, для которых

$$\int_1^{+\infty}\frac{[U(-it)]^-}{t^{1+\varkappa}}\,dt<+\infty. \tag{4.24}$$

Можно доказать, что если $U(w)\in\mathrm{U}^m$, то по результатам работы И. С. Каца [24] для любого $\varkappa\in(-1,\,1)$

$$\int_1^{+\infty}\frac{|U(-it)|}{t^{1+\varkappa}}\,dt<+\infty.$$

Тем самым, $\mathrm{U}^m\subset\bigcap_{\varkappa\in(-1,\,1)}\mathrm{U}^+_\varkappa$.

Справедлива следующая

Лемма 4.2. *При любом* $\varkappa\in(-1,\,1)$ *класс* $\mathrm{U}^+_\varkappa$ *совпадает с множеством гармонических* $BG^{(-)}$ *функций, представимых в виде* (4.23), *где $a=0$, а функция $\mu(t)$ допускает представление $\mu(t)=\mu_1(t)-\mu_2(t)$, где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — неубывающие функции, подчиненные условиям*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu_1(t)<+\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_2(t)}{1+|t|^{1+\varkappa}}<+\infty. \tag{4.23''}$$

Доказательство. Пусть $U(w)\in \mathbf{U}_\varkappa^+$ при некотором $\varkappa\in(-1,1)$. Так как $\mathbf{U}_\varkappa^+\subset\mathbf{U}^+$, то для функции $U(w)$ справедливо представление вида (4.23)—(4.23′). Докажем, что в этом представлении $a=0$, а функция $\mu_2(t)$ удовлетворяет второму из условий (4.23″). С этой целью введем гармонические в $G^{(-)}$ функции

$$U_1(w)=\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_1(t)}{(u-t)^2+v^2},$$

$$w=u+iv\in G^{(-)}.$$

$$U_2(w)=-a|v|+\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_2(t)}{(u-t)^2+v^2},$$

Очевидно, что $U_j(w)\geqslant 0$ $(j=1,\ 2)$ при $w\in G^{(-)}$ и

$$U(w)=U_1(w)-U_2(w);\quad w\in G^{(-)}.$$

Одновременно

$$U(w)=[U(w)]^+-[U(w)]^-;\quad w\in G^{(-)},$$

при этом понятно, что $U_1(w)\geqslant[U(w)]^+$ и $U_2(w)\geqslant[U(w)]^-$.

Обозначив

$$\Phi(w)=U_1(w)-[U(w)]^+;\quad w\in G^{(-)},$$

будем иметь

$$[U(w)]^-+\Phi(w)=U_2(w);\quad w\in G^{(-)}. \tag{4.25}$$

Однако, $0\leqslant\Phi(w)\leqslant U_1(w)$, а по теореме 1 работы [24] для U_1 сходится интеграл (4.24). Поэтому этот интеграл сходится также для функции Φ. Ввиду (4.25) интеграл (4.24) сходится и для функции U_2, а отсюда, в силу той же теоремы 1, следует, что $a=0$, а $\mu_2(t)$ удовлетворяет второму из условий (4.23″).

Обратная часть леммы очевидна, ввиду неравенств

$$0\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{[U(-it)]^-}{t^{1+\varkappa}}\,dt\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{U_2(-it)}{t^{1+\varkappa}}\,dt<+\infty.$$

4.4. Докажем еще две леммы, необходимые для дальнейшего изложения.

Лемма 4.3. *Пусть $\beta\in[0,+\infty)$ — любое ненатуральное число, и целое $p\geqslant 0$ определено из неравенств $p-1<\beta\leqslant p$. Далее, пусть $U(w)$ — гармоническая в $G^{(-)}$ функция, такая, что $U(w)\in M_p\{G^{(-)}\}$.*

Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{W^{-\beta}|U(-it)|}{t^{1+\beta-p}}\,dt < +\infty. \tag{4.26}$$

Доказательство. Пусть сначала $\beta=0$. Тогда $p=\beta=0$, и $W^{-\beta}$ — тождественный оператор. Так как $U(w)\in M_0\{G^{(-)}\}$, то

$$\int_1^{+\infty} t^{-1}\,|U(-it)|\,dt<+\infty.$$

Пусть теперь $\beta>0$ и не целое (тогда $p-1<\beta<p$). Переменой порядка интегрирования опять получим

$$\int_1^{+\infty}\frac{W^{-\beta}|U(-it)|}{t^{1+\beta-p}}\,dt=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{1+\beta-p}}\int_t^{+\infty}(\tau-t)^{\beta-1}|U(-i\tau)|\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^{+\infty}|U(-i\tau)|\,d\tau\int_1^{\tau}\frac{(\tau-t)^{\beta-1}}{t^{1+\beta-p}}\,dt<$$

$$<\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1\frac{(1-x)^{\beta-1}}{x^{1+\beta-p}}\,dx\int_1^{+\infty}\tau^{\beta-1}|U(-i\tau)|\,d\tau<+\infty.$$

Лемма 4.4. *Пусть $\mu(t)$ — функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке оси $-\infty<t<+\infty$, и*

$$\Psi(w)\equiv e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(w-t)^{1+\alpha}};\ w\in G^{(-)},\ -1<\alpha<+\infty.$$

Тогда:

1°. *Если $\alpha\in[0,+\infty)$, $p\geqslant 0$ — целое число, определенное из неравенств $p-1<\alpha\leqslant p$, а $\mu(t)$ удовлетворяет условию* (4.4), *то* $\operatorname{Re}\Psi(w)\in M_p\{G^{(-)}\}$.

2°. *Если $\alpha\in(-1,0)$, а $\mu(t)$ удовлетворяет условию* (4.4′), *то* $\partial/\partial(\operatorname{Im} w)\operatorname{Re}\Psi(w)\in M_1\{G^{(-)}\}$.

Доказательство. Пусть $\alpha=0$ (тогда $p=0$). Предположим, что $\mathbf{K}\in G^{(-)}$ — любой компакт, $\rho=\max\limits_{w\in K}|\operatorname{Im} w|$ (очевидно, $\rho<+\infty$), и $w\in\mathbf{K}$ — любая точка. Воспользовавшись оценками (1.17) и (4.7), переменой порядка интегрирования придем к неравенствам

$$\int_1^{+\infty}\sigma^{-1}|\operatorname{Re}\Psi(w-i\sigma)|\,d\sigma\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{\sigma+|\operatorname{Im} w|}{\sigma}\,d\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\mu(t)|}{|w-t|^2+\sigma^2}\leqslant$$

$$\leqslant(1+\rho)\int_{-\infty}^{+\infty}|d\mu(t)|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{|w-t|^2+\sigma^2}\leqslant(1+\rho)\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\mu(t)|}{|w-t|}\leqslant$$

$$\leqslant(1+\rho)\frac{\pi}{2}C_1(\mathbf{K})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\mu(t)|}{1+|t|}<+\infty.$$

Таким образом, выполнено условие (1.14) и, очевидно, $\operatorname{Re}\Psi(w)\in M_0\{G^{(-)}\}$. Вполне аналогичными неравенствами нетрудно показать, что при $0<\alpha<+\infty$ имеем $\Psi(w)\in M_p\{G^{(-)}\}$, а при $-1<\alpha<0$ $-\Psi'(w)\in M_1\{G^{(-)}\}$.

4.5. Введем теперь в рассмотрение классы аналитических функций $\mathbf{N}_\alpha$ и $\mathbf{N}_\alpha^m$ $(-1<\alpha<+\infty)$.

Определение 3. Класс $\mathbf{N}_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$ — множество аналитических в нижней полуплоскости $G^{(-)}$ функций $F(w)$, подчиненных следующим условиям;

(а) Нули $F(w)$ лежат в некотором полукруге $\{w\in G^{(-)}:\ |w|<R_0\}$ $(0<R_0<+\infty)$.

б) Если $0\leqslant\alpha<+\infty$, то $\log|F(w)|\in M_p\{G^{(-)}\}$, где $p\geqslant 0$ — целое число, такое, что $p-1<\alpha\leqslant p$. Если же $-1<\alpha<0$, то $\partial/\partial(\operatorname{Im} w)\times\log|F(w)|\in M_1\{G^{(-)}\}$.

(в)
$$\sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}[\,|W^{-\alpha}\log|F(u+iv)|]^+\,du<+\infty. \tag{4.27}$$

(г) Если $\alpha=p\geqslant 1$ — натуральное число, то, дополнительно,
$$\int_{1}^{+\infty}[\,W^{-\alpha}\log|F(-it)|]^-\,\frac{d}{dt}<+\infty. \tag{4.28}$$

Определение 4. Класс $\mathbf{N}_\alpha^m$ $(-1<\alpha<+\infty)$ — множество аналитических в нижней полуплоскости $G^{(-)}$ функций $F(w)$, подчиненных следующим условиям:

(а) Для любого $\rho<0$ в полуплоскости $G_\rho^{(-)}=\{w:\operatorname{Im} w<\rho\}$ лежит не более, чем конечное число нулей функции $F(w)$.

(б) Если $0\leqslant\alpha<+\infty$, то $\log|F(w)|\in M_p\{G^{(-)}\}$, где $p\geqslant 0$ — целое число, такое, что $p-1<\alpha\leqslant p$, а если $-1<\alpha<0$, то $\partial/\partial(\operatorname{Im} w)\times\log|F(w)|\in M_1\{G^{(-)}\}$.

(в)
$$\sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|F(u+iv)||\,du<+\infty. \tag{4.29}$$

Для дальнейшего изложения важна следующая

Лемма 4.5. *Пусть функция $F(w)$ аналитична в полуплоскости $G^{(-)}$ и $\{w_k\}\equiv\{u_k+iv_k\}\subset G^{(-)}$ — ее нули, пронумерованные с учетом кратностей. Тогда, если при некотором α $(-1<\alpha<+\infty)$ имеем $F(w)\in\mathbf{N}_\alpha$, или $F(w)\in\mathbf{N}_\alpha^m$, то*
$$\sum_k|\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}\equiv\sum|v_k|^{1+\alpha}<+\infty. \tag{4.30}$$

Доказательство. Как нетрудно заметить, в случае, когда $F(w) \in N_\alpha^m$, утверждение (4.30) непосредственно следует из теоремы 3.4. Рассмотрим случай, когда $F(w) \in N_\alpha$.

Аналогично доказательству теоремы 2.2 введем в рассмотрение функцию

$$F_\alpha(w) \equiv \frac{F(w)}{\prod\limits_{v_k<\rho} b_\alpha(w-i\rho,\ w_k-i\rho)}\ ;\ -\infty<\rho<0.$$

Эта функция, очевидно, аналитична в полуплоскости $G_\rho^{(-)}$. С другой стороны, как и в доказательстве теоремы 2.2, функция

$$U(w) = W^{-\alpha}\log|F_\alpha(w)|$$

гармонична в замкнутой полуплоскости $\overline{G_\rho^{(-)}} = \{w : \operatorname{Im} w \leqslant \rho\}$, кроме не более, чем конечного числа точек, принадлежащих $\partial G_\rho^{(-)}$, в окрестности каждой из которых она допускает одно из представлений (2.13'). Далее, в силу оценки (2.7) и (4.27)

$$\sup_{v<\rho}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[U(u+iv)]^+\,du \leqslant \sup_{v<\rho}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[W^{-\alpha}\log|F(u+iv)|]^+\,du +$$

$$+\sum_{v_k<\rho}\sup_{v<0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|b_\alpha(u+iv,\ w_k-i\rho)||\,du < +\infty.$$

Поэтому $V(w) \equiv U(w+i\rho) \in U^+$, и, тем самым, для этой функции справедливо представление (4.23)—(4.23'), где, как нетрудно заметить, $d\mu(t) = W^{-\alpha}\log|F(t+i\rho)|\,dt$. Отсюда получим, что для любого $w \in G_\rho^{(-)}$

$$-\sum_{v_k<\rho} W^{-\alpha}\log|b_\alpha(w-i\rho,\ w_k-i\rho)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|v-\rho|}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[W^{-\alpha}\log|F(t+i\rho)|]^+}{(u-t)^2+(v-\rho)^2}\,dt - W^{-\alpha}\log|F(w)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi|v-\rho|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[W^{-\alpha}\log|F(t+i\rho)|]^+\,dt - W^{-\alpha}\log|F(w)|.$$

Пусть $w = -i(R_0+1)$ (см. пункт (а) определения 3 класса N_α), и $\rho \in (-1, 0)$. Тогда в силу формулы (2.2') и условия (4.27), будем иметь

$$\frac{2(R_0+1+\rho)}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{v_k<\rho}A_k^{(\alpha)}(\rho) \leqslant C < +\infty,$$

где

$$A_k^{(\alpha)}(\rho) = \int\limits_0^{|v_k|+\rho}\frac{(R_0+1+\rho)^2+u_k^2-t^2}{|t^2+[i(R_0+1+\rho)+u_k]^2|^2}(|v_k|+\rho-t)^\alpha\,dt > 0.$$

Однако

$$\lim_{\rho\to-0} A_k^{(\alpha)}(\rho)=\int_0^{|v_k|}\frac{(R_0+1)^2+u_k^2-t^2}{|t^2+[i(R_0+1)+u_k]^2|^2}(|v_k|-t)^\alpha\,dt>$$

$$>\frac{2R_0+1}{13(R_0+1)^4}\int_0^{|v_k|}(|v_k|-t)^\alpha\,dt=\frac{2R_0+1}{13(R_0+1)^4}\,\frac{|v_k|^{1+\alpha}}{1+\alpha}>0.$$

Поэтому при любом $\rho_0<0$

$$\frac{2(2R_0+1)}{13(R_0+1)^3}\,\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{v_k<\rho_0}|v_k|^{1+\alpha}<\frac{2(R_0+1)}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{v_k<\rho_0}\lim_{\rho\to-0}A_k^{(\alpha)}(\rho)\leqslant C,$$

и, тем самым, ввиду произвольности $\rho_0<0$, лемма доказана.

4.6. Перейдем к доказательству двух основных теорем о параметрических представлениях классов $\mathbf{N}_\alpha$ и $\mathbf{N}_\alpha^m$ $(-1<\alpha<+\infty)$.

Теорема 4.2. *Классы* $\mathbf{N}_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$ *совпадают с множествами аналитических в полуплоскости* $G^{(-)}$ *функций, допускающих факторизации*

$$F(w)=B_\alpha(w)\exp\left\{\Gamma(1+\alpha)\,\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(w-t)^{1+\alpha}}+iC\right\};\tag{4.31}$$

$$w\in G^{(-)},\ 0\leqslant\alpha<+\infty,$$

$$F(w)=B_\alpha(w)\exp\left\{a_1w+a_0+\right.$$

$$\left.+\Gamma(1+\alpha)\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(w-t)^{1+\alpha}}+iC\right\};\ w\in G^{(-)},\ -1<\alpha<0,\tag{4.32}$$

где $B_\alpha(w)$ — *сходящиеся произведения типа Бляшке* (2.5), *с нулями, лежащими в окрестностях начала координат и подчиненными условию* (4.30), a_0, a_1 *и* C — *вещественные постоянные, а функция* $\mu(t)$ *такова, что* $\mu(t)=\mu_1(t)-\mu_2(t)$, *где* $\mu_1(t)$ *и* $\mu_2(t)$ — *неубывающие функции, подчиненные, соответственно, условиям*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d\mu_1(t)<+\infty,\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_2(t)}{1+|t|^{1+\alpha-p}}<+\infty\ (0\leqslant\alpha<+\infty)\tag{4.31'}$$

(*где, как всегда,* $p\geqslant0$ *целое, и* $p-1<\alpha\leqslant p$),

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d\mu_1(t)<+\infty,\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu_2(t)}{1+|t|^{1+\alpha}}<+\infty\ (-1<\alpha<0).\tag{4.32'}$$

Если имеет место представление (4.32)—(4.32′), *то*

$$\lim_{t\to+\infty} \log|F(u-it)| = a_1 u + a_0;\ -\infty < u < +\infty. \tag{4.32″}$$

Доказательство. Заметим сначала, что если $F(w) \in N_\alpha(-1 < \alpha < +\infty)$, то в силу предыдущей леммы 4.5, для ее нулей $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ выполнено соотношение (4.30). Тем самым, по теореме 2. Б произведение типа Бляшке $B_\alpha(w)$, составленное по нулям функции $F(w)$, сходится, и функция

$$F_\alpha(w) = \frac{F(w)}{B_\alpha(w)}\ (\neq 0,\ w \in G^{(-)});\ -1 < \alpha < +\infty$$

аналитична в $G^{(-)}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha \geqslant 0$. Так как $\log|F(w)|$ и $\log|B_\alpha(w)|$ принадлежат классу $M_\rho\{G^{(-)}\}$, то этому классу принадлежит также гармоническая в $G^{(-)}$ функция $\log|F_\alpha(w)|$. Поэтому, ввиду леммы 1.10, функция

$$U(w) = W^{-\alpha}\log|F_\alpha(w)| = W^{-\alpha}|F(w)| - W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)| \tag{4.33}$$

также гармонична в $G^{(-)}$.

В силу (4.27) и оценки (2.7)

$$\sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}[U(u+iv)]^+\,du \leqslant \sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}[W^{-\alpha}\log|F(u+iv)|]^+\,du +$$

$$+\sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|B_\alpha(u+iv)||\,du < +\infty.$$

Кроме того, если $\alpha = p \geqslant 1$ — натуральное число, то из (4.28) и неположительности функции $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|$ в $G^{(-)}$ (см. теорему 2.B, утв. 1°) следует, что

$$\int_1^{+\infty}[U(-it)]^-\frac{dt}{t} \leqslant \int_1^{+\infty}[W^{-\alpha}\log|F(-it)|]^-\frac{dt}{t} < +\infty.$$

Если же $\alpha \geqslant 0$ — ненатуральное число, то по лемме 4.3

$$\int_1^{+\infty}\frac{[U(-it)]^-}{t^{1+\alpha-p}}\,dt \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{W^{-\alpha}\,|\log|F(-it)||_-}{t^{1+\alpha-p}}\,dt < +\infty.$$

Таким образом, $U(w) \in U^+_{\alpha-p}$, так как выполнены все условия принадлежности к этому классу (см. определение 2). Тем самым, для $U(w)$ справедливо представление (4.23), (4.23″), где $a=0$. То есть

$$W^{-\alpha}\log|F_\alpha(w)| = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{w-t}\right\};\ w \in G^{(-)},$$

где функция $p(t)$ такая, как в искомом представлении (4.31)—(4.31′). Применив к обеим частям последнего равенства оператор $\partial^p/\partial v^p \times \times W^{-(p-\alpha)}$, в силу лемм 1.10 и 4.1, мы приходим к представлению (4.31).

Вполне аналогичным образом доказываются представление (4.32)—(4.32′) и соотношение (4.32″) для функций классов $\mathbf{N}_\alpha$ $(-1<\alpha<0)$. При этом, вместо неположительности функции $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|$ надо воспользоваться тем, что она непрерывна в $G^{(-)}\setminus\{w_k\}$, а в точках $\{w_k\}$ (нулях функции $F(w)$) имеет интегрируемые особенности. Необходимо также воспользоваться включением $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|\in K_1\{\pi/2,\ G^{(-)}\}$, вытекающим из оценки (2.9) и леммы 1.9.

Перейдем к доказательству обратных частей теоремы. Пусть $0\leqslant\alpha< <+\infty$, и справедливо представление (4.31)—(4.31′). Тогда, в силу леммы 4.4, $\log|F(w)|\in M_p\{G^{(-)}\}$. Далее гармоническая в $G^{(-)}$ функция $U(w)$, определяемая по формуле (4.33), как нетрудно заметить, допускает представление вида (4.23), (4.23″), и, по лемме 4.2, $U(w)\in \in \mathbf{U}^{+}_{\alpha-p}$. В силу оценки (2.7) и последнего включения

$$\sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}[W^{-\alpha}\log|F(u+iv)|]^{+}\,du\leqslant\sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}[U(u+iv)]^{+}\,du+$$

$$+\sup_{v<0}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|B_\alpha(u+iv)||\,du<+\infty.$$

Одновременно, в силу оценки (2.9) и леммы 1.9

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{[W^{-\alpha}\log|F(-it)|]^{-}}{t^{1+\alpha-p}}\,dt\leqslant\int_{1}^{+\infty}\frac{[U(-it)]^{-}}{t^{1+\alpha-p}}\,dt+$$

$$+\int_{1}^{+\infty}\frac{|W^{-\alpha}\log|B_\alpha(-it)||}{t^{1+\alpha-p}}\,dt<+\infty.$$

Таким образом, выполнены все условия определения 3, и $F(w)\in\mathbf{N}_\alpha$ $(0\leqslant\alpha<+\infty)$. Обратное утверждение теоремы в случае $-1<\alpha<0$ доказывается аналогично.

Замечание. Пусть функция $F(w)$ аналитична в $G^{(-)}$, а также в окрестности бесконечно удаленной точки и удовлетворяет при некоторых $\rho\in(0,+\infty)$ и $c_0\in(0,+\infty)$ условию

$$|F(w)|\leqslant\exp\left\{\frac{c_0}{|\mathrm{Im}\ w|^\rho}\right\}\ (w\in G^{(-)},\ |\mathrm{Im}\ w|<r_0). \tag{4.34}$$

Тогда при любом $\alpha\in(\rho,+\infty)$ и вполне определенной рациональной функции $R(w)$ имеем $F_1(w)\equiv R(w)F(w)\in\mathbf{N}_\alpha$, и, тем самым, функция $F_1(w)$ допускает факторизацию вида (4.31), (4.31′).

Докажем это утверждение.

В силу леммы 3.3, при вполне определенной (по коэффициентам разложения $F(w)$ в окрестности ∞) рациональной функции $R(w)$ для

$F_1(w) \equiv R(w)F(w)$ справедлива оценка $|\log|F_1(w)|| \leqslant c_1 |w|^{-3-[\alpha]}$ $(|w| > R_0)$. Поэтому, в силу леммы 1.9

$$|W^{-\alpha} \log|F_1(w)|| \leqslant \frac{c_2}{|w|^2} \ (w \in G^{(-)},\ |w| > R_0). \tag{4.35}$$

Одновременно, очевидно, что

$$|F_1(w)| \leqslant \exp\left\{\frac{c_3}{|\mathrm{Im}\, w|^{\rho}}\right\} (w \in G^{(-)},\ |\mathrm{Im}\, w| < r_0).$$

Пусть $v < 0$ любое. Запишем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{W^{-\alpha} \log|F_1(u+iv)|\}^{+} du =$$

$$= \left(\int_{|u|>R_0} + \int_{-R_0}^{R_0}\right) \{W^{-\alpha} \log|F(u+iv)|\}^{+} du \equiv I_1(v) + I_2(v). \tag{4.36}$$

Ясно, что в силу (4.35) $I_1(v) \leqslant c_4 \equiv 2c_2/R_0$ $(-\infty < v < 0)$, одновременно, $I_2(v)$ — непрерывная по v $(-\infty \leqslant v < 0)$ функция, причем $I_2(-\infty) = 0$. Для оценки этой функции при $v \to -0$ заметим, что, как нетрудно, убедиться, при $-r_0/2 < v < 0$ имеем

$$I_2(v) \leqslant \frac{2R_0}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{c_1}{3+[\alpha]-\alpha} R_0^{-(3+[\alpha]-\alpha)} + \frac{c_0}{\alpha-\rho}\left(\frac{2}{r_0}\right)^{\alpha-\rho}\right\} + \varphi(v),$$

где

$$\varphi(v) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-R_0}^{R_0} du \int_{r_0/2}^{R_0} |\log|F_1(u+i(v-\sigma))|| \, d\sigma$$

— непрерывна по v уже на интервале $(-\infty, r_0/2)$. Поэтому $I_2(v) \leqslant c_5$ $(-r_0 < v < 0)$, и, тем самым, $I_1(v) + I_2(v) \leqslant c_4 + c_5 \equiv c_6$ $(-\infty < v < 0)$. Отсюда и из (4.36) следует условие (4.27) для функции $F_1(w)$. Так как для этой функции очевидно удовлетворяются и остальные условия определения 3 класса N_α, то $F_1(w) \in \mathrm{N}_\alpha$.

Теорема 4.3. *Классы* N_*^m $(-1 < \alpha < +\infty)$ *совпадают с множествами аналитических в полуплоскости* $G^{(-)}$ *функций, допускающих представления видов* (4.31) *и* (4.32) (*соответственно, при* $0 \leqslant \alpha < +\infty$ *и* $-1 < \alpha < 0$), *где* $B_\alpha(w)$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ — *сходящиеся произведения типа Бляшке* (2.5), *с нулями, подчиненными условию* (4.30), a_0, a_1 *и* C — *вещественные постоянные, а функция* $\mu(t)$ — *ограниченной вариации на оси* $-\infty < t < +\infty$. *Справедливо также соотношение* (4.32″)

Доказательство этой теоремы не отличается существенно от доказательства предыдущей. Поэтому мы лишь проследим основные его этапы.

Как и в доказательстве теоремы 4.2, составим функции $F_\alpha(w)$ и $U(w) = W^{-\alpha} \log|F_\alpha(w)|$. Можно убедиться в том, что $U(w) \in \mathrm{U}^m$, и т. о. для этой функции справедливо представление (4.23), где $a=0$, а $\mu(t)$ — функция ограниченной вариации на оси $-\infty < t < +\infty$. Применив к обеим частям этого представления оператор $\partial^p/\partial v^p\, W^{-(p-\alpha)}$ (если $0 < \alpha < +\infty$), или оператор W^α (если $-1 < \alpha < 0$), в силу лемм 1.10 и 4.1 придем к искомым представлениям.

Для доказательства обратных частей теоремы надо убедиться в том, что функция $U(w)$, определяемая по формуле (4.33), принадлежит классу U^m. Отсюда, ввиду свойств произведения типа Бляшке, приведенных в начале § 2, будет следовать, что $F(w) \in \mathrm{N}_\alpha^m$ $(-1 < \alpha < +\infty)$.

Замечание. В силу тождественности оператора W^0 и леммы 4.4, в специальном случае, когда $\alpha = 0$, классы N_α и N_α^m по существу совпадают с классами В. И. Крылова N и N_m, соответственно (для N_0^m это совпадение точное, а N_0 совпадает с подмножеством тех функций из N, нули которых лежат в окрестностях начала координат). Это несовпадение связано с тем, что автору без условия (a) определения 3 классов N_α $(-1 < \alpha < +\infty)$ не удалось пока доказать лемму 4.5 о плотности расположения нулей функций этих классов.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22. I. 1985

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Հավասարակշռության առնչություններ և ֆակտորիզացիոն թեորեմներ կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում Վեյլի ինտեգրոդիֆերենցիալ օպերատորի կիրառմամբ կիսահարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների համար ստացված են $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ *անընդհատ պարամետրից կախված Կառլեմանի և Բ. Յա. Լևինի տիպի բանաձևերի ընտանիքներ։ Ստացված բանաձևերից ծնվում են կիսահարթության համար Նևանլիննի և Ցուձիի տիպի բնութագրիչների ընտանիքներ։ Ներմուծված բնութագրիչների սահմանափակության պայմանը ի հայտ է բերում կիսահարթությունում անալիտիկ, ընդհանրացված սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների նոր, լայն դասեր, որոնց համար ստացված են ֆակտորիզացիոն և պարամետրական ներկայացումներ։ Մասնավորապես ստացված են ֆակտորիզացիոն ներկայացումներ փակ կիսահարթությունում անալիտիկ կամայական վերջավոր կարգի ֆունկցիաների համար։*

Կառուցված տեսության մեջ հիմնարար դեր են խաղում հեղինակի կողմից վաղօրոք հետազոտված [12, 13] կիսահարթության Բլյաշկեի տիպի արտադրյալները, որոնց զուգամիտության պայմանն է՝

$$\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_k} \right|^{1+\alpha} < +\infty, \quad -1 < \alpha < +\infty \quad (\operatorname{Im} z_k > 0;\ k = 1, 2, \cdots).$$

Պարամետրի հատուկ $\alpha=0$ *արժեքի դեպքում հոդվածի հիմնական արդյունքները ըստ էության վերածվում են Կառլեմանի, Բ. Յա. Լևինի, Ֆ. և Ռ. Նևանլինների բանաձևերին, ինչպես նաև կիսահարթությունում անալիտիկ ֆունկցիաների համար Ռ. Նևանլիննի և Վ. Ի. Կռիլովի ֆակտորիզացիոն թեորեմներին։*

A. M. JERBASHIAN *Equilibrium relations and factorization theorems for functions meromorphic in the half-plane* (summary)

In the present paper families of Carleman and B. Ya. Levin type formulas for functions meromorphic in the half-plane, depending on a continuous parameter α $(-1 < \alpha < +\infty)$ are obtained. These formulas give rise to Nevanlinna and Tsuji-

type families of characteristics. The condition of boundedness of these characteristics leads to new classes of generalized bounded type functions analytic in the half-plane, for which factorizations and parametrical representations are obtained. In particular, factorization representations are obtained for functions of any finite order which are analytic in the closed half-plane.

An essential part play the Blaschke-type products for the half-plane, with convergence condition

$$\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_k} \right|^{1+\alpha} < +\infty, \ -1 < \alpha < +\infty \ (\operatorname{Im} z_k > 0; \ k = 1, 2, \cdots).$$

For the special value of the parameter $\alpha = 0$, the results of the paper reduce to well-known Carleman's, B. Ya, Lovin's, F. and R. Nevanlinna's formulas and also the R. Nevanlinna's and V. I. Krilov's factorization theorems for functions analytic in the half-plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Nevanlinna*. Über eine Klasse von meromorphen Funktionen., Math. Ann., 1924, v. 92.
2. *R. Nevanlinna*. Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum, Acta Soc. Sci. Fennicae, 1925, v. 50, № 12, 3—45.
3. *T. Carleman*. Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen, Arkiv. för Math. Astr. och Fysik, 1922, v. 17, № 9, 1—30.
4. *F. Nevanlinna and R. Nevanlinna*. Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. Sci. Fennicae, 1922, v. 50, № 5.
5. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
6. *М. М. Джрбашян*. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб., 1969, 79 (121), № 4 (8), 517—615.
7. *М. М. Джрбашян*. Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1075—1111.
8. *E. Hill and J. D. Tamarkin*. On the absolute integrability of Fourier transforms Fund. Math., 1935, v. 25, 329—352.
9. *И. В. Крылов*. О функциях, регулярных в полуплоскости, Мат. сб., 1939, 6 (48), № 1, 95—138.
10. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
11. *H. Weyl*. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung, Vierteljahrschrift der Naturforschenden Geselschaft in Zurich, 1917, v. 62, 296—302.
12. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 1979, 246, № 6, 1295—1298.
13. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН АрмССР, «Математика», 1983, XVIII, № 6, 409—440.
14. *M. Tsuji*. On Borel's directions of meromorphic functions of finite order, Tohoku Math. J., 1950, v. 2, № 2, 97—112.
15. *А. М. Джрбашян*. Факторизация некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, ДАН СССР, 1981, 257, № 1, 21—25.
16. *А. М. Джрбашян*. Факторизация аналитических функций любого конечного порядка в полуплоскости, ДАН СССР, 1981, 257, № 3, 530—533.
17. *J. D. Tamarkin*. On integrable solutions of Abel's integral equation, Ann. of Math., Sec. Series, 1930, v. 31, 219—229.
18. *М. Брело*. Основы классической теории потенциала, М., «Мир», 1964.
19. *Ф. Д. Гахов*. Краевые задачи, М., «Наука», 1977.

20. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.

21. *Дж. Гарнетт.* Ограниченные аналитические функции, М., «Мир», 1984.

22. *R. P. Boas.* Entire functions, Ac. Press, New York, 1954.

23. *Н. В. Говоров.* Об индикаторе функций нецелого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости, ДАН СССР, 1965, 162, № 3, 495—498.

24. *И. С. Кац.* Об интегральных представлениях аналитических функций, отображающих верхнюю полуплоскость в ее часть, УМН, 1956, XI, вып. 3 (69), 139—144.