ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 2, 1986 Математика

УДК 51.01:517

С. Н. МАНУКЯН

О СВОЙСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ КОНСТРУКТИВНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этой статье рассматриваются свойства единственности для некоторых типов аналитических функций в конструктивном анализе (1). В работах (2), (3) установлено свойство единственности для достаточно широкого класса конструктивных аналитических функций, однако вопрос о наличии этого свойства у всевозможных конструктивных аналитических функций в смысле определений из (2), (3) остается открытым. Ниже будет показано, что для несколько иного конструктивного аналога понятия аналитической функции—а именно, для конструктивных почти аналитических функций—свойство единственности, вообще говоря, не имеет места.

Формулировка основной теоремы этой статьи была опубликована в (4).

О п р е д е л е н и е. 1. Будем говорить, что функция f, определенная на $\alpha\Delta\beta$, является аналитической (соответственно, почти аналитической) на $\alpha\Delta\beta$, если для всякого FR-числа $x\in\alpha\Delta\beta$ осуществима конструктивная последовательность A FR-чисел и осуществимо (соответственно, квазиосуществимо) положительное FR-число ρ, такие что

$$\forall x_1 \left(x_1\in\alpha\Delta\beta \,\&\, |x-x_1|<\rho \supset \sum_{k=0}^{\infty} A(k)(x-x_1)^k = f(x_1)\right).$$

Т е о р е м а. *Существует конструктивная почти аналитическая функция H, такая, что H определена на сегменте $0\Delta1$, в точке 0 принимает значение, отличное от нуля, и в некоторой окрестности точки 1 принимает значение нуль.*

Для доказательства теоремы нам потребуются некоторые вспомогательные понятия и утверждения.

О п р е д е л е н и е 2. Назовем первичной замкнутой (соответственно, открытой) областью с исходной точкой $a\sigma b$ и с шириной полосы $2d$, где $0<d\leqslant b$, множество точек $x\sigma y$ таких, что

$$x\geqslant a\,\&\,(|y|\leqslant \max(a+b-x,\ d))$$

(соответственно, $x>a\,\&\,(|y|<\max(a+b-x,\ d))$).

О п р е д е л е н и е 3. Первичную замкнутую область с исходной точкой $a\sigma b$, с шириной полосы $2d$, где $0<d\leqslant b$ назовем вторичной, если $d\leqslant\frac{b}{2}$.

О п р е д е л е н и е 4. Контуром вторичной области $Д$ с исходной точкой $a\sigma b$, с шириной полосы $2d$, назовем конструктивное множество точек $x\sigma y$ таких, что

$$\neg\,\bar{}\,((x = a \& |y| \leqslant b) \vee (x > a \& |y| = \max(a + b - x,\ d))).$$

Определение 5. Стандартным краевым условием для вторичной области Д с исходной точкой $a\sigma b$, с шириной полосы $2d$, назовем функцию $W(x, y)$, определенную на контуре Д и такую, что

$$W(a, y) = b \text{ при } |y| \leqslant b,\ x=a,$$

$$W(x, y) = \max(a + b - x,\ d) \text{ при } x > a,$$

$$y = \max(a + b - x,\ d) \text{ или } y = -\max(a + b - x,\ d).$$

Определение 6. Стандартной гармонической функцией во вторичной области Д с исходной точкой $a\sigma b$, с шириной полосы $2d$ назовем конструктивную функцию W, являющуюся решением задачи Дирихле для области Д при стандартных краевых условиях.

Замечание. В соответствии с основной теоремой статьи (6) мы можем утверждать, что для всякой вторичной области Д существует стандартная гармоническая функция в Д; хотя вторичные (как и любые первичные) области не относятся к классу областей, рассматриваемых в (6), однако указанное утверждение легко устанавливается, например, посредством инверсии заданной вторичной области Д относительно любой окружности, не пересекающейся с Д, с последующим применением основной теоремы из (6).

Определение 7. Подъемом вторичной области Д с исходной точкой $a\sigma b$ и с шириной полосы $2d$, назовем конструктивную точную верхнюю грань значений стандартной гармонической функции в Д на линейном образе отрезка

$$(a + b - d)\,\sigma d \Delta\,(a + b - d)\,\sigma(-d).$$

Очевидно, что подъем указанной вторичной области Д меньше b, но не меньше d.

Лемма 1. *Пусть имеем вторичную замкнутую область Д с исходной точкой $0\sigma 1$, с шириной полосы $2d$, где $d \leqslant \frac{1}{2}$. Пусть W является стандартной гармонической функцией в области Д. Пусть W_1 является стандартной гармонической функцией во вторичной замкнутой области $Д_1$ с исходной точкой $0\sigma 1$ и с шириной полосы $2d_1$, где $d_1 < d$. Тогда $W_1(x, y) < W(x, y)$ при всех $x\sigma y \in Д_1$.*

Доказательство. Обозначим границу области Д через Γ, а границу области $Д_1$ через Γ_1.

По определению $W(x, y) > d$ при всех $x\sigma y \in \Gamma$, следовательно, согласно конструктивному аналогу принципа максимума, сформулированному в (6), получим: $W(x, y) > d$ при всех $x\sigma y \in Д$, значит $W(x, y) \geqslant d$ при всех $x\sigma y \in \Gamma_1$, но по определению краевых условий для W_1 имеем $W_1(x, y) \leqslant d$ при всех $x\sigma y$ таких, что $x\sigma y \in \Gamma_1 \& x > 1-d$. С другой стороны, $W(x, y) = W_1(x, y)$ при всех $x\sigma y$, таких, что $x\sigma y \in \Gamma_1 \& x \leqslant 1 - d$. Следовательно, $W_1(x, y) \leqslant W(x, y)$ при всех $x\sigma y \in \Gamma_1$, а тогда $W_1(x, y) \leqslant W(x, y)$ при всех $x\sigma y \in Д_1$.

Лемма 2. *Пусть имеем вторичную замкнутую область $Д_0$ с исходной точкой $0\sigma 1$ и с шириной полосы $2d$, где $d=1/2$. Через α_0 обозначим* *подъем области $Д_0$. Пусть $Д_1$—вторичная замкнутая область с исходной точкой $0 \sigma 1$ и с шириной полосы $2d_1$, где $d_1 < \frac{1}{2}\cdot$ Обозначим подъем области $Д_1$ через α_1. Тогда $\alpha_1 \leqslant d_0$.*

Доказательство. Согласно лемме 1, $W_1(x, y) \leqslant W_0(x, y)$ при всех $x \sigma y \in \Gamma_1$, где $W_0(x, y)$ — стандартная гармоническая функция в области $Д_0$, $W_1(x, y)$ — стандартная гармоническая функция в области $Д_1$, Γ_1 — граница области $Д_1$. Следовательно имеем: $W_1(x, y) \leqslant \leqslant W_0(x, y) \leqslant \alpha_0$ на линейном образе отрезка $\frac{1}{2} \sigma \frac{1}{2} \Delta \frac{1}{2} \sigma \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot$ Обозначим через $Д'$ первичную область с исходной точкой $\frac{1}{2} \sigma \frac{1}{2}$ и с шириной полосы $2d_1$. Ясно, что $W_0(x, y) \leqslant \alpha_0$ на контуре области $Д'$, а тогда $W_0(x, y) \leqslant \alpha_0$ во всей области $Д'$, следовательно, подъем α_1 области $Д_1$ не превосходит α_0.

Лемма 3. *Подъем всякой вторичной области $Д_2$ с шириной полосы $2d$ и с исходной точкой $a \sigma b$ не превосходит $\alpha_0 \cdot b$, где α_0—подъем области $Д_0$, определенной в лемме 2.*

Доказательство. Пусть W_2 есть стандартная гармоническая функция в области $Д_2$. Пусть $Д$—вторичная область с исходной точкой $0 \sigma 1$ и с шириной полосы $\frac{d}{b} < \frac{1}{2}$ и W — стандартная гармоническая функция в $Д$. Имея в виду то обстоятельство, что точка $x \sigma y$ лежит на контуре области $Д_2$ в том и только в том случае, когда точка $\frac{x-a}{b} \sigma \frac{y}{b}$ лежит на контуре области $Д$, согласно определению стандартных краевых условий, для вторичных областей $Д$ и $Д_2$ получаем:

$$W_2(x, y) = b \cdot W\left(\frac{x-a}{b}, \frac{y}{b}\right) \tag{A}$$

для любой точки $x \sigma y$, лежащей на контуре $Д_2$. Следовательно, это же соотношение выполняется для всякой точки $x \sigma y \in Д_2$. В самом деле, построим функцию, определенную в $Д_2$ и для каждой точки $x \sigma y \in Д_2$ принимающую значение $b \cdot W\left(\frac{x-a}{b}, \frac{y}{b}\right)$; тогда непосредственным вычислением устанавливаем, что эта функция — гармоническая и, согласно (А), она удовлетворяет стандартным краевым условиям для $Д_2$; в силу единственности решения задачи Дирихле (см. (6)) она совпадет с W_2.

Так как, согласно лемме 2, подъем области $Д$ не превосходит α_0, следовательно, имея в виду (А), получим, что подъем области $Д_2$ не превосходит $\alpha_0 \cdot b$.

Доказательство теоремы. Согласно теореме 2.3 из (5) построим алгорифм Φ, являющийся $1/2$-ограниченным точным дизъюнктным сегментным покрытием промежутка $0 \Delta 1$. Построим алгорифм В типа $(н \to н)$ такой, что

$$\forall n\,(\mathcal{Э}_n(\Phi_n) \neq 1 \supset \mathcal{Э}_n(\Phi_n) = \mathcal{Э}_n(\Phi_{B(n)})).$$

Построим такое число n_0, что $0 \in \Phi_{n_0}$. Построим алгорифм G такой, что

$$G(0) = n_0,$$
$$G(n+1) = B(G(n)),$$

алгорифм A такой, что

$$A(0) = 0,$$
$$A(n) = \mathcal{Э}_n(\Phi_{G(n)}),$$

алгорифм D такой, что

$$D(0) = \frac{A(1)}{2},$$

$$D(k) = \min\left(\frac{D(k-1)}{2}, \frac{A(k+1)-A(k)}{2}\right) \text{ при } k>0,$$

и, наконец, последовательность функций f_n таким образом, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$f_0(x) = \max(D(0)-x,\ D(1)),$$
$$f_n(x) = \min(f_{n-1}(x),\ \max(A(n)+D(n)-x,\ D(n+1)))$$
$$\text{при } n>0.$$

Индукцией по n легко устанавливается, что всегда

$$f_n(A(n)) = D(n),\ f_n(x) = D(n+1) \text{ при } x \geqslant A(n+1),\ f_{n+1}(x) = f_n(x)$$
$$\text{при } x < A(n+1).$$

Далее, построим последовательность замкнутых областей T_n таких, что для любого n

$$(x \geqslant 0\ \&\ |y| \leqslant f_n(x)) \equiv (x \sigma y \in T_n).$$

Через T обозначим конструктивное множество точек такое, что $x\sigma y \in T$ в том и только в том случае, когда $\forall n\,(x\sigma y \in T_n)$. Построим функцию f, заданную на $0\Delta 1$ следующим образом:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

(Легко показать, что для всякого фиксированного $x \in 0\Delta 1$ последовательность FR-чисел $f_n(x)$ конструктивно сходится в себе). Через T^0 обозначим конструктивное множество точек $x\sigma y$ таких, что

$$x \in 0 \triangledown 1\ \&\ |y| < f(x).$$

Очевидно, что всякая точка, принадлежащая T^0, принадлежит множеству T, и что множество T^0 конструктивно открыто.

Согласно основной теореме из (6) (примененной тем же способом, который был указан выше в замечании к определению 6), для каждой области T_n существует гармоническая функция U_n, удовлетворяющая условиям

$$U_n(0, y) = \frac{A(1)}{2} \text{ при } |y| \leqslant \frac{A(1)}{2},$$

$$U_n(x, f_n(x)) = U_n(x, -f_n(x)) = f_n(x) \text{ при } x \geqslant 0.$$

Докажем, что последовательность U_n равномерно сходится в себе на T.

Для этого сначала определим некоторые дополнительные понятия.

Высотой функции U_n назовем конструктивную точную верхнюю границу значений $U_n(x, y)$ при $x = A(n) + D(n) - D(n+1)$, $|y| \leqslant f_n(x)$. Докажем, что

$$\forall x \forall y (x \ni y \in T_{n+1} \supset U_{n+1}(x, y) \leqslant U_n(x, y)). \tag{B}$$

Для этого достаточно показать, что $U_{n+1}(x, y) \leqslant U_n(x, y)$ имеет место на контуре области T_{n+1}. Если $x \ni y$ лежит на контуре области T_{n+1} и $x \leqslant A(n+1)$, то, как легко видеть, $U_{n+1}(x, y) = U_n(x, y)$. Если же $x \ni y$ лежит на контуре области T_{n+1} и $x > A(n+1)$, то тогда $U_{n+1}(x, y) = f_{n+1}(x) < D(n+1)$. С другой стороны, на контуре области T_n имеет место неравенство

$$U_n(x, y) = f_n(x) > D(n+1),$$

а тогда это же неравенство имеет место для всех $x \sigma y \in T_n$, в частности, для точек $x \sigma y$, лежащих на контуре T_{n+1} и таких, что $x > A(n+1)$; поэтому для точек указанного типа также имеем $U_{n+1}(x, y) \leqslant U_n(x, y)$. Тем самым (B) доказано.

Теперь докажем, что высота функции U_n не превосходит $\alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2}$, где α_0 — подъем области $Д_0$, определенной в лемме 2. Доказательство проведем при помощи индукции по n. Пусть $n=0$. Ясно, что T_0 есть вторичная область с исходной точкой $0 \ni \frac{A(1)}{2}$ и шириной полосы $D(1)$, а U_0 есть стандартная гармоническая функция в T_0. Согласно лемме 3, высота U_0 не превосходит $\alpha_0 \cdot \frac{A(1)}{2}$. Теперь проведем индукционный шаг. Пусть, согласно индукционному предположению, высота U_n не превосходит $\alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2}$. Тогда $\alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2} \geqslant D(n+1)$ (в самом деле, $\alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2}$ не меньше конструктивной точной верхней грани значений функции U_n на отрезке

$$(A(n) + D(n) - D(n+1)) \ni D(n+1) \,\Delta\, (A(n) + D(n) - \\ - D(n+1)) \,\sigma\, (-D(n+1)),$$

а $D(n+1)$ есть значение U_n на концах этого отрезка). Рассмотрим замкнутую область Ξ, такую, что $x \sigma y \in \Xi$ в том и только в том случае, когда $x \geqslant A(n) + D(n) - D(n+1) \,\&\, |y| \leqslant D(n+1)$. Для всякой точки $x \sigma y \in \Xi$ будет: $U_n(x, y) \leqslant \alpha_0^{n+1} \cdot \frac{A(1)}{2}$. В самом деле, на линейном образе отрезка

$$(A(n)+D(n)-D(n+1))\circ D(n+1)\,\Delta\,(A(n)+D(n)-$$
$$-D(n+1))\circ(-D(n+1))$$

это неравенство выполнено в силу индукционного предположения, а на лучах

$$x\geqslant A(n)+D(n)-D(n+1)\ \&\ y=D(n+1)$$

и

$$x>A(n)+D(n)-D(n+1)\ \&\ y=-D(n+1)$$

это неравенство выполнено, в силу определения краевых условий для U_n и соотношения $\alpha_0^{n+1}\cdot\dfrac{A(1)}{2}\geqslant D(n+1)$; таким образом, рассматриваемое неравенство справедливо на границах области Ξ, а тогда оно справедливо и всюду в этой области, в силу конструктивного аналога принципа максимума, сформулированного в (6).

Рассмотрим теперь вторичную область Д с исходной точкой $A(n+1)\circ D(n+1)$ и шириной полосы $D(n+2)$. Ясно, что область Д содержится в Ξ и T_{n+1}, а потому для всякой точки $x\circ y\in$ Д

$$U_{n+1}(x,y)\leqslant U_n(x,y)\leqslant\alpha_0^{n+1}\cdot\frac{A(1)}{2}.$$

Пусть W есть стандартная гармоническая функция в Д. Ясно, что краевые значения функций W и U_{n+1} совпадают при $x\geqslant A(n+1)$ & $|y|=f_{n+1}(x)$. На отрезке $A(n+1)\circ D(n+1)\,\Delta A(n+1)\circ(-D(n+1))$ имеем $W(x,y)=D(n+1)$, а потому на том же отрезке

$$U_{n+1}(x,y)\leqslant\alpha_0^{n+1}\cdot\frac{A(1)}{2}\cdot\frac{W(x,y)}{D(n+1)}.$$

Следовательно, на всем контуре области Д, а потому и во всей области Д, имеем $U_{n+1}(x,y)\leqslant\alpha_0^{n+1}\cdot\dfrac{A(1)\cdot W(x,y)}{2\cdot D(n+1)}$. Поэтому высота функции U_{n+1} не превосходит $\alpha_0\cdot\dfrac{A(1)\cdot V}{2\cdot D(n+1)}$, где V есть подъем области Д. Вместе с тем, в силу леммы 3

$$V\leqslant D(n+1)\cdot\alpha_0,$$

а потому высота функции U_{n+1} не превосходит $\alpha_0^{n+2}\cdot\dfrac{A(1)}{2}$. Тем самым доказано, что высота любой функции U_n не превосходит $\dfrac{\alpha_0^{n+1}\cdot A(1)}{2}$.

Пусть ε — произвольное положительное рациональное число. Построим такое натуральное число N, что $\alpha_0^{N+1}\cdot\dfrac{A(1)}{2}<\varepsilon$.

Пусть натуральное число n таково, что $n>N$. Тогда высота функции U_n меньше ε. Рассмотрим замкнутую область Σ такую, что $x\circ y\in\Sigma$ в том и только в том случае, когда

$$x > A(n)+D(n)-D(n+1) \ \& \ |y| \leqslant D(n+1).$$

Тогда на контуре области Ξ будет:

$$0 < U_n(x, y) < \varepsilon,$$

и, тем самым, указанное неравенство выполняется также во всей области Ξ. Пусть теперь k—произвольное натуральное число. Рассмотрим область T_{n+k} и ее контур Γ. Если точка $x \circ y$ лежит на Γ, и $x \leqslant A(n)+ D(n)-D(n+1)$, то очевидно, что

$$U_n(x, y) = U_{n+k}(x, y).$$

Если же точка $x \circ y$ лежит на Γ и $x \geqslant A(n)+D(n)-D(n+1)$, то очевидно, $x \circ y \in \Xi$, а потому $0 < U_{n+k}(x, y) \leqslant U_n(x, y) < \varepsilon$. Таким образом, для всякой точки $x \circ y$, лежащей на Γ, оказывается

$$0 < U_{n+k}(x, y) - U_n(x, y) < \varepsilon.$$

Это неравенство, будучи выполненным на контуре T_{n+k}, оказывается справедливым также и во всей области T_{n+k}, и оно заведомо справедливо для всякой точки $x \circ y \in T$. Таким образом, мы показали, что для всякого положительного рационального ε осуществимо такое натуральное N, что

$$\forall n \forall k \forall x \forall y \, (n > N \ \& \ x \circ y \in T \supset |U_{n+k}(x, y) - U_n(x, y)| < \varepsilon),$$

а это и значит, что последовательность функций U_n равномерно сходится на T. Следовательно, осуществима конструктивная функция U, такая, что для всякой точки $x \circ y \in T$

$$U_n(x, y) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} U(x, y).$$

Так как последовательность U_n равномерно сходится на T, то она равномерно сходится и на T^0, а тогда функция U является гармонической на T^0. Так как каждая из функций U_n равномерно непрерывна на T и U_n равномерно сходится к U на T, то функция U равномерно непрерывна на T.

Так как $0 < U_n(x, y) \leqslant a_0^{n+1} \cdot \dfrac{A(1)}{2}$ при

$$x > A(n)+D(n)-D(n+1) \ \& \ |y| \leqslant D(n+1),$$

и тем более это неравенство выполнено при $x > A(n+1) \& y = 0$, то $U(x, 0) = 0$ при всяком x, принадлежащем $0 \Delta 1$ и таком, что $\forall n (x > A(n))$. Таким образом, заведомо $U(x, 0) = 0$ при $Э_x(\Phi_{n_1}) \leqslant x \leqslant 1$, где n_1 таково, что $1 \in \Phi_{n_1}$.

Построим функции V_1 и V_2 такие, что при всяком $x \circ y \in T^0$

$$V_1(x, y) = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x \circ y}, \quad V_2(x, y) = \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{x \circ y}.$$

Построим функцию V, определенную в T^0 и такую, что для любой точки $x \circ y \in T^0$

$$V(x, y)=\int_0^x(-V_2(x, 0))\,dx+\int_0^y V_1(x, y)\,dy.$$

(Нетрудно показать, что обе подынтегральные функции конструктивно интегрируемы по Риману). Легко видеть, что функция V является гармонической функцией, сопряженной для U. Легко проверить что $V(x, y)=-V(x, -y)$ для всякой точки $xoy \in T^0$. Следовательно, $V(x, 0)=0$, если $\exists n\,(x<A(n))$.

Ясно, что $U+iV$ является конструктивной комплексной функцией, аналитической на T^0.

Построим функцию H, определенную на $0\Delta 1$ и такую, что для всякого FR-числа $x \in 0\Delta 1$

$$H(x)=U(x, 0).$$

Из только что доказанного вытекает, что H является аналитической во всякой точке $x \in 0\Delta 1$ такой, что $\exists n\,(x<A(n))$. С другой стороны функция H является аналитической для всякого $x \in 0\Delta 1$, удовлетворяющего условию

$$\forall n\,(x \geqslant A(n)).$$

В самом деле, в этом случае $H(x_1)\equiv 0$ для всякого $x_1 \in a\Delta b$, где

$$a=\min\,(\mathcal{Э}_л(\Phi_{K(x)}),\ \mathcal{Э}_л(\Phi_{L(x)})),$$
$$b=\max\,(\mathcal{Э}_п(\Phi_{K(x)}),\ \mathcal{Э}_п(\Phi_{L(x)})),$$
$$a<x<b,$$

где K, L — характеристические алгорифмы для покрытия Φ.

Таким образом, функция H является аналитической во всякой точке $x \in 0\Delta 1$ такой, что $\exists n\,(x<A(n)) \vee \forall n\,(x>A(n))$. Следовательно, она является почти аналитической. Согласно доказанному выше, H удовлетворяет всем требуемым условиям.

Теорема доказана.

Вычислительный центр
АН Армянской ССР и ЕГУ

Поступила 25.X.1984

Ս. Ն. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ. Կոնստրուկտիվ անալիտիկ ֆունկցիաների համար միակության հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Սեգմենտի վրա սահմանված կոնստրուկտիվ իրական փոփոխականի f ֆունկցիան կոչվում է համարյա անալիտիկ, եթե այդ սեգմենտի կամայական կետի համար բավարարված է այդ կետի շրջակայքում f ֆունկցիայի Թեյլորի շարքի գոյության և այդ շարքի զուգամիտության շառավղի կրկնակի բացասումով գոյության պայմանը։ Ապացուցվում է, որ գոյություն ունի սեգմենտում համարյա անալիտիկ կոնստրուկտիվ ֆունկցիա, որը նույնաբար զերո չէ այդ սեգմենտում, բայց նրա ինչ-որ ենթահատվածում ամենուրեք զերո է։ Այսպիսով, միակության հատկությունը խախտվում է կոնստրուկտիվ համարյա անալիտիկ ֆունկցիաների համար։

S. N. MANUKIAN. *On uniqueness properties for constructive analytic functions* (summary)

A constructive real function f defined on a segment is said to be almost analytic on it, if for every constructive point of the segment the Taylor expansion

for f in a neighbourhood of this point, exists if the and existence of convergence radius for this expansion follows under double negation. It is proved that there exists a constructive function which is almost analytic on some segment, is not everywhere equal to zero on this segment, and yet is equal to zero everywhere on some of its subsegments. So the uniqueness theorem does not hold for almost analytic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. А. Кушнер*. Лекции по конструктивному математическому анализу, М., «Наука», 1973.
2. *В. А. Лифшиц*. Об исследовании конструктивных функций методом заполнений. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 20, 1971, 67—79.
3. *В. П. Оревков*. Новое доказательство теоремы единственности для конструктивных дифференцируемых функций комплексной переменной, Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 40, 1974, 119—126.
4. *С. Н. Манукян*. О почти аналитических конструктивных функциях, Шестая Всесоюзная конференция по математической логике, Тбилиси, 1982, с. 105.
5. *И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин*. О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, Труды мат. института им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 458—502.
6. *С. Н. Манукян*. Задача Дирихле в конструктивном анализе, ДАН АрмССР, LXXIX, № 2, 1984, 58—62.