ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 2, 1986 Математика

УДК 517.53

С. Л. БЕРБЕРЯН

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ U_α

Хорошо известны введенные академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном классы мероморфных в единичном круге функций обобщенно-ограниченного вида N_α $(-1<\alpha<+\infty)$. Эти классы монотонно расширяются с возрастанием параметра α, причем N_0 совпадает с классом N функций ограниченного вида Р. Неванлинны. В совместных работах ([3], [4]) М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна было установлено, что классы N_α $(-1<\alpha<0)$—подклассы класса Неванлинны N—обладают более тонкими по сравнению с функциями класса N граничными свойствами. Оказалось, что угловые граничные значения функций этих классов существуют всюду на границе круга, кроме, быть может, множества нулевой $1+\alpha$-емкости. М. М. Джрбашяном [2] в свое время были введены также классы субгармонических в единичном круге функций U_α $(-1<\alpha<+\infty)$, по своей природе и по существу аналогичные классам N_α. Были найдены параметрические представления этих классов.

В свете вышеизложенного представляется естественной и актуальной задача, решению которой посвящена статья — исследовать граничные свойства субгармонических функций классов U_α при $-1<\alpha<0$.

При решении указанной задачи автор существенно опирается на результаты В. С. Захаряна ([5], [6]) о граничных свойствах потенциалов типа Грина, участвующих в представлениях функций классов U_α.

В основной теореме статьи (теорема 2) доказано, что угловые граничные значения нормальных субгармонических функций из классов U_α $(-1<\alpha<0)$ существуют всюду на границе круга, кроме, быть может, множества нулевой $1+\alpha$-емкости.

Предварительно приведем некоторые определения и результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

1°. Как известно, оператор Римана—Лиувилля $D^{-\alpha}\varphi(x)$ $(-1< <\alpha<+\infty)$ определяется следующим образом:
в случае $0<\alpha<+\infty$

$$D^{-\alpha}\varphi(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt,\ x\in(0,\ 1),$$

причем для $\varphi(x)\in L(0,\ 1)$ правая часть существует почти всюду и вновь принадлежит $L(0,\ 1)$; в случае $-1<\alpha<0$

$$D^{-\alpha}\varphi(x)\equiv\frac{d}{dx}D^{-(1+\alpha)}\varphi(x),\quad x\in(0,1),$$

в предположении, что правая часть существует почти всюду, в случае $\alpha=0$ полагают, что

$$D^{0}\varphi(x)=\varphi(x),\quad x\in(0,1).$$

Обозначим $D_{+}^{-\alpha}\varphi(x)=\max\{D^{-\alpha}\varphi(x),0\}$.

Следуя М. М. Джрбашяну ([2], стр. 126), обозначим через U_α $(-1<\alpha<+\infty)$ класс субгармонических в круге $|z|<1$ функций $U(z)$, для которых конечна величина

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}U_\alpha^{(+)}(re^{i\theta})d\theta\right\}<+\infty,$$

где $U_\alpha^{+}(re^{i\theta})=r_{+}^{-\alpha}D^{-\alpha}u(re^{i\theta})$. При любом $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ рассмотрим функции

$$V_\alpha(\rho e^{i\theta};\zeta)=\rho^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|,$$

$$W_\alpha(z;\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_\alpha(e^{-i\theta}z)\cdot V_\alpha(e^{i\theta};\zeta)\,d\theta.$$

Для классов U_α М. М. Джрбашяном установлено параметрическое представление.

Теорема А. Класс U_α совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$u(z)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\alpha(z;\zeta)|\,d\mu(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}S_\alpha(re^{i(\varphi-\theta)})\,d\psi(\theta). \qquad (1)$$

где $S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\}$, $A_\alpha(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-W_\alpha(z;\zeta)}$; $\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция с конечным изменением на $[-\pi,\pi]$, а $\mu(\zeta)$ — произвольное положительное распределение масс в круге $|\zeta|<1$, подчиненных лишь условию

$$\int_0^1(1-t)^\alpha n(t;\mu)\,dt<+\infty,$$

где $n(t;\mu)$ — масса функции $u(z)$, заключенная в круге $0<|z|\leqslant t<1$, т. е.

$$n(t;\mu)=\iint\limits_{0<|\zeta|<t}d\mu(\zeta).$$

2°. Нам необходимо будет понятие емкости. Говорят, что измеримое по Борелю множество E имеет положительную α-емкость, $0<\alpha<1$, если существует такая мера $\mu \prec E$, $\mu(E)=1$, для которой интеграл

$$V(z)=\int\limits_E \frac{1}{|z-\zeta|^\alpha}\, d\mu(\zeta)$$

удовлетворяет условию

$$\sup_{|z|<1} V(z) \leqslant V_0 < \infty.$$

В случае отсутствия такой меры считают α-емкость множества E равной нулю. Аналогично определяется положительность и равенство нулю логарифмической емкости, если вместо ядра $\frac{1}{|z-\zeta|^\alpha}$ рассматривать ядро $\ln\left|\frac{1}{z-\zeta}\right|$. Обозначим α-емкость и логарифмическую емкость множества E, соответственно, через $\operatorname{cap}_\alpha E$ и $\operatorname{cap}_0 E$.

Введем следующее обозначение:

$$h(\theta, \varphi)=\{\tau=e^{i\theta}(1-re^{i\varphi}): -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}, r>0\}.$$

Подобласть круга D, заключенную между хордами $h(\theta, \varphi_1)$, $h(\theta, \varphi_2)$ и внутри окружности C_θ: $\left|z-\frac{1}{2}e^{i\theta}\right|=\frac{1}{2}$ обозначим через $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. Эту подобласть круга называют углом Штольца с вершиной в точке $\zeta=e^{i\theta}$. Если существует $\lim u(z)$. при $z\to\zeta=e^{i\theta}$, $z\in\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ и предел не зависит от выбора угла $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$, то обозначим угловой предел через $u(\theta)$.

Для дальнейшего нам необходимо будет следующее утверждение, вытекающее при $\omega(x)=(1-x)^\alpha$, $-1<\alpha<0$ из общего утверждения, принадлежащего М. М. Джрбашяну и В. С. Захаряну (см. [4]).

Теорема Б. Функция

$$F_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\{\operatorname{Re} S_\alpha(ze^{-i\theta})\}\, d\psi(\theta),$$

где $-1<\alpha<0$, а $\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция с конечным изменением на $[-\pi, \pi]$, всюду на $[-\pi, \pi]$ обладает конечными угловыми граничными значениями

$$F_\alpha(e^{i\theta})=\lim_{z\to e^{i\theta}} F_\alpha(z)$$

кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E\subset[-\pi, \pi]$, для которого $\operatorname{cap}_{1+\alpha} E=0$.

3°. Интерпретируя единичный круг D, как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1, z_2)$ неевклидовое расстояние между точками z_1 и z_2 из круга D:

$$\sigma(z_1, z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u},\quad \text{где } u=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|.$$

Через T обозначим группу конформных автоморфизмов единичного круга, т. е. T: $\{S(z)=e^{i\alpha}(z+a)\cdot(1+az)^{-1},\ a\in D$ и $\alpha\in(-\infty,+\infty)\}$. Говорят (см., например, [13]), что субгармоническая в D функция $u(z)$ нормальна, если порождаемое ею семейство $\Phi:\{u(S(z));\ S(z)\in T\}$, нормально в D в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности семейства Φ можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся или равномерно расходящуюся к $+\infty$ или $-\infty$ на любом компакте в D.

§ 1. О поведении вдоль хорд субгармонических функций классов $U_\alpha\ (-1<\alpha<0)$

В первом параграфе основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть субгармоническая в D функция $u(z)$ принадлежит классу $U_\alpha\ (-1<\alpha<0)$. Тогда на Γ: $|z|=1$ можно указать такое множество E, $\mathrm{cap}_{1+\alpha}E=0$, что в каждой точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E$, для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi=0$, существуют конечные и равные между собой пределы $u(\theta,\varphi)$, где*

$$u(\theta,\varphi)=\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in h(\theta,\varphi)}}u(z)=\lim_{r\to+0}u(e^{i\theta}(1-re^{i\varphi})).$$

Вычислительную часть доказательства этой теоремы мы выделим в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть $\mu(\zeta)$—положительное распределение масс в круге $|z|<1$, подчиненное условию*

$$\int_0^1 n(t;\mu)\cdot\frac{(1-t)^\alpha}{t}\,dt<+\infty, \tag{1.1}$$

где $-1<\alpha<0$. Тогда на Γ можно указать такое множество E, $\mathrm{cap}_{1+\alpha}E=0$, что в каждой точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E$ для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi=0$, у потенциала типа Грина

$$Q_\alpha(z)=\iint_D G_\alpha(z;\zeta)\,d\mu(\zeta), \tag{1.2}$$

где $G_\alpha(z,\zeta)=-\log|A_\alpha(z;\zeta)|$ при $|z|<1$ и $|\zeta|<1$, существуют конечные и равные между собой пределы $Q_\alpha(\theta,\varphi)$.

Доказательство. Покажем, что из условия (1.1) следует конечность следующего интеграла:

$$\iint_{|\zeta|<1}(1-|\zeta|)^{1+\alpha}\,d\mu(\zeta)<+\infty. \tag{1.3}$$

При любом r, $0<r<1$ имеем

$$\iint\limits_{|\zeta|<r} (1-|\zeta|)^{1+\alpha} d\mu(\zeta) = \int\limits_0^r (1-t)^{1+\alpha} dn(t;\mu) = n(t;\mu)\cdot(1-t)^{1+\alpha}\Big|_0^r +$$

$$+(1+\alpha)\int\limits_0^r (1-t)^{\alpha}\cdot n(t;\mu)\,dt. \tag{1.4}$$

Из условия (1.1) непосредственно вытекает, что

$$\int\limits_r^1 (1-t)^{\alpha} n(t;\mu)\,dt = o(1),$$

(т. е. бесконечно малая величина при $r\to 1$) и значит $n(r;\mu) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1+\alpha}}\right)$. Поэтому и правая часть равенства (1.4) ограничена при $r\to 1$ и, тем самым, доказана конечность интеграла (1.3). Мы утверждаем, что из соотношения (1.3) для всех $\zeta = e^{i\theta}$, кроме, быть может, некоторого множества E_1, $\mathrm{cap}_{1+\alpha} E_1 = 0$, следует конечность интеграла

$$\Lambda(\theta) = \iint\limits_{|\zeta|<1} \left[\frac{1-|\zeta|}{|e^{i\theta}-\zeta|}\right]^{1+\alpha} d\mu(\zeta) < +\infty.$$

Предполагая противное, будем иметь, что $\Lambda(\theta)$ бесконечна на множестве E_1 положительной $1+\alpha$-емкости. Тогда на E_1 существует распределение $\mu_1(\theta)$ единичной массы такое, что интеграл $V(r,x) = \int \frac{d\mu_1(\theta)}{|e^{i\theta}-re^{ix}|^{1+\alpha}}$ равномерно ограничен по x, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, при $r\to 1$. Из сделанного предположения $\mathrm{cap}_{1+\alpha} E_1 > 0$ следует, что

$$S = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\theta)\,d\mu_1(\theta) = \int\limits_{E_1} \Lambda(\theta)\,d\mu_1(\theta) = +\infty.$$

С другой стороны, в силу того же предположения, применяя теорему Фубини, получим

$$S = \int\limits_{E_1}\left\{\iint\limits_{|a|<1}\left|\frac{1-|a|}{|e^{i\theta}-a|}\right|^{1+\alpha} d\mu(a)\right\} d\mu_1(\theta) = \iint\limits_{|a|<1}(1-|a|)^{1+\alpha}\left\{\int\limits_{E_1}\frac{d\mu_1(\theta)}{|e^{i\theta}-a|^{1+\alpha}}\right\}\times$$

$$\times\, d\mu(a) \leqslant C\iint\limits_{|a|<1}(1-|a|)^{1+\alpha} d\mu(a) < \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathrm{cap}_{1+\alpha} E_1 = 0$. Рассмотрим произвольную точку $\zeta = e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E_1$ и последовательность дуг $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ окружностей в D с центром в точке $\zeta = e^{i\theta}$, стягивающихся к ζ. Не нарушая общности можно предположить, что $\zeta = 1$. В силу теоремы 3 работы [5] при любом фиксированном n для всех точек a на L_n, кроме, быть может, некоторого множества l_n на L_n, для которого

$\operatorname{cap}_0 l_n = 0$, потенциал типа Грина [см. (1.2)] имеет конечное изменение на сегментах, соединяющих точки $a \in L_n$ с точкой ζ. Поэтому для всех $a \in L_n \setminus l_n$ на сегментах, соединяющих точки a с $\zeta = 1$, существуют конечные хордальные пределы потенциала типа Грина. Так как при любом фиксированном n множество l_n имеет линейную меру нуль, то и соответствующее ей множество E'_n значений φ имеет меру нуль, т. е. $\operatorname{mes} E'_n = 0$. Отсюда следует, что и множество $E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n$ имеет меру нуль. Таким образом, в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E_1$, $\operatorname{cap}_{1+\alpha} E_1 = 0$, для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ существуют конечные хордальные пределы у потенциала типа Грина. Применяя теорему 2 работы [6] о радиальных пределах потенциала типа Грина $Q_\alpha(z)$ $(-1 < \alpha < 0)$, получим, что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E_1$, $\operatorname{cap}_{1+\alpha} E_1 = 0$, для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$, существуют конечные хордальные пределы у потенциала типа Грина. Теперь рассмотрим функцию $F_\alpha(z) = Q_\alpha(z) + iL(z)$, где $L(z)$ — некоторая действительнозначная функция, имеющая всюду на Γ, за исключением множества E_2, $\operatorname{cap}_{1+\alpha} E_2 = 0$, конечные угловые пределы. Такие функции заведомо существуют. В качестве примера можно рассмотреть $|B(z)|$, где $B(z)$ — произведение Бляшке, нули которой $\{z_k\}$ удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < \infty$, где $-1 < \alpha < 0$. Очевидно, что $F_\alpha(z)$ имеет конечные хордальные пределы $F_\alpha(\theta, \varphi)$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$, всюду на Γ, за исключением множества $E_3 = E_1 \cup E_2$, $\operatorname{cap}_{1+\alpha} E_3 = 0$. Рассмотрим точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E_3$, в которой $F_\alpha(\theta, \varphi_1) \neq F_\alpha(\theta, \varphi_2)$ хотя бы для двух значений $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Такая точка $\zeta = e^{i\theta}$ является точкой неопределенности для $F_\alpha(z)$ (см. [10]). В силу теоремы Багемила множество точек неопределенности M для произвольной комплекснозначной функции F_α не более чем счетно, и поэтому $\operatorname{cap}_{1+\alpha} M = 0$.

Рассматривая $E = E_3 \cup M$, получим, что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$, у функции $F_\alpha(z)$, а следовательно и $Q_\alpha(z) = \operatorname{Re} F_\alpha(z)$, существуют конечные и равные между собой пределы. Утверждение леммы 1 доказано. Теперь утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из параметрического представления (1) субгармонических функций классов U_α, теоремы Б и утверждения леммы 1.

Замечание 1. Отметим, что при $\alpha = 0$ граничное поведение субгармонических функций класса U_0 вдоль хорд исследовано американским математиком Толстедом (см. [14]), который охарактеризовал исключительное множество E в терминах меры и показал, что $\operatorname{mes} E = 0$.

§ 2. Об угловых граничных значениях нормальных субгармонических функций классов U_α $(-1<\alpha<0)$

Основным результатом второго параграфа является следующая

Теорема 2. *Пусть нормальная субгармоническая в D функция $u(z)$ принадлежит классу U_α $(-1<\alpha<0)$. Тогда на Γ можно указать такое множество E,* $\mathrm{cap}_{1+\alpha} E=0$, *что в каждой точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E$ существует конечный угловой предел $u(\theta)$.*

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 2. *Пусть $u(z)$—нормальная субгармоническая в D функция, и для некоторой последовательности $\{z_n\}_1^\infty\subset D$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} u(z_n)=C\,(-\infty\leqslant C\leqslant+\infty).$$

Тогда для любой последовательности $\{z_n'\}\subset D$ такой, что $\sigma(z_n, z_n')\to 0$ при $n\to\infty$, справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} u(z_n')=C.$$

Доказательство. Пусть

$$g_n(t)=u\left(\frac{t+z_n}{1+\bar z_n t}\right)\ (n=1, 2,\cdots).$$

Очевидно, что $g_n(t)$— субгармонические функции в $|t|<1$ и

$$g_n(0)=u(z_n). \tag{2.1}$$

Рассмотрим при любом фиксированном n дробно-линейное преобразование

$$z=\frac{t+z_n}{1+\bar z_n t},$$

переводящее точки $t=0$ и $t=t_n$, соответственно, в точки $z=z_n$ и $z=z_n'$. По условию леммы $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(z_n, z_n')=0$, и так как $\sigma(0, t_n)=\sigma(z_n, z_n')$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=0$. В силу компактности семейства $\{g_n(t)\}$ существует подпоследовательность $\{g_{n_k}(t)\}$, равномерно сходящаяся к субгармонической функции $G(t)$, или равномерно расходящаяся к $+\infty$ или $-\infty$ на любом компакте $K\subset D$, содержащем точку $t=0$. Если $C=+\infty$ (или $-\infty$), то очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(t_{n_k})=+\infty$ (или $-\infty$).

Пусть C—конечное число. Тогда на любом компакте K, содержащем точку $t=0$, в силу соотношения (2.1) имеет место равномерная сходимость последовательности $\{g_{n_k}(t)\}$ к субгармонической функции $G(t)\not\equiv\infty$. При любом $\varepsilon>0$ из соотношений

$$|g_{n_k}(t_{n_k})-G(t_{n_k})|<\varepsilon \text{ и } G(t_{n_k})-G(0)<\varepsilon,$$

справедливых при $k>N(\varepsilon)$, получим, что последовательности $\{g_{n_k}(t_{n_k})\}_1^\infty$ и $\{G(t_{n_k})\}_1^\infty$, либо их некоторые подпоследовательности, которым для простоты дадим то же самое обозначение, будут иметь пределы, причем

$$\lim_{k\to\infty} u(z'_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(t_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} G(t_{n_k}) = \alpha \leqslant C, \tag{2.2}$$

где $C = G(0)$. Покажем, что $\alpha = C$.

Рассмотрим при любом $k = 1, 2, \ldots$ отображения $S'_k(z)$, где

$$S'_k(z) = \frac{z + z'_{n_k}}{1 + \bar{z}'_{n_k} z}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Для этих отображений при любом k имеют место равенства

$$S'_k(0) = z'_{n_k} \text{ и } S'_k(q_k) = z_{n_k},$$

откуда, в силу инвариантности метрики σ, следует справедливость соотношения

$$\lim_{k\to\infty} q_k = 0 \quad (q_k \in D). \tag{2.3}$$

Отсюда $\lim\limits_{k\to\infty} u(z'_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} u(S'_k(0)) = \alpha$, и, следовательно, последовательность $\{u(S'_k(z))\}$, или некоторая ее подпоследовательность, которой дадим то же самое обозначение $\{u(S'_k(z))\}$, равномерно сходится на компакте $K_1 \subset D$, содержащем точку $z = 0$, к субгармонической функции $U(z)$, причем $U(0) = \alpha$. С другой стороны, учитывая, что

$$\lim_{k\to\infty} u(z'_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} u(S'_k(q_k)) = \lim_{k\to\infty} U(q_k) = C$$

и соотношение (2.3), будем иметь, что

$$C = \lim_{k\to\infty} U(q_k) \leqslant U(0) = \alpha.$$

Сравнивая с (2.2) последнюю оценку, заключаем, что $\alpha = C$. Отсюда и из (2.2) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(t_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} u(z'_{n_k})$ и значит

$$\lim_{k\to\infty} u(z'_{n_k}) = C. \tag{2.4}$$

В силу того, что произвольно взятая последовательность содержит подпоследовательность $\{u(z'_{n_k})\}$, для которой справедливо соотношение (2.4), то и

$$\lim_{n\to\infty} u(z'_n) = C.$$

Лемма 2 полностью доказана.

Замечание 2. Отметим, что, как следует из доказательства леммы 2, утверждение леммы остается справедливым для нормальных полунепрерывных сверху функций.

Для доказательства теоремы 2 нам необходима также следующая

Лемма 3. *Пусть нормальная субгармоническая в $D: \{|z| < 1\}$ функция $u(z)$ имеет в некоторой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ конечные и равные между собой пределы $u(\theta, \varphi)$. Тогда в точке $\zeta = e^{i\theta}$ функция $u(z)$ имеет конечный угловой пр ел $u(\theta)$.*

е

Доказательство. Покажем, что в точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ при условии леммы существуют конечные равные между собой пределы по всем хордам. Для этого рассмотрим произвольную хорду $h(\theta, \varphi)$ и произвольную последовательность $\{z_n\}$ на ней. Возьмем такую последовательность углов Штольца $\{V_m\}_{m=1}^{\infty}$, $V_1\supset V_2\supset\cdots$, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} V_m=h(\theta, \varphi)$, чтобы сторонами углов V_m были хорды, по которым предел $u(\theta, \varphi)$ существует. Проведем через точки z_n дуги $E_n\subset D\,(n=1, 2,\cdots)$ окружностей с центром в точке $\zeta=e^{i\theta}$ и сжимающихся к точке ζ. Эти дуги будут пересекать стороны углов V_m в точках $\{p_n^m\}_{n=1}^{\infty}$. Составим теперь последовательность $p_1^1, p_2^1,\cdots, p_n^1,\cdots,$ $p_1^2, p_2^2,\cdots,p_n^2,\cdots;\ p_1^m, p_2^m,\cdots, p_n^m,\cdots;\cdots$. Из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{p_{n_m}^m\}_{m=1}^{\infty}$ такую, что $u(p_{n_m}^m)\to u(\theta,\varphi)$ при $\sigma(p_{n_m}^m, z_{n_m})\to 0$. Согласно лемме 2, $\lim\limits_{m\to\infty} u(z_{n_m}) = u(\theta, \varphi)$. Отсюда, ввиду произвольности хорды $h(\theta, \varphi)$ $\left(-\frac{\pi}{2}< \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ и последовательности $\{z_n\}_1^{\infty}\subset h(\theta, \varphi)$ $(\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\zeta)$ следует, что существуют и равны $u(\theta, \varphi)$ все хордальные пределы функции $u(z)$ в точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$. Рассмотрим теперь произвольную последовательность точек $\{a_n\}\equiv\{e^{i\theta}(1-r_n e^{i\varphi_n})\}$ $(r_n\to+0$ при $n\to\infty)$, лежащую в некотором угле Штольца с вершиной в точке ζ. Докажем существование предела $u(\theta, \varphi)$ по этой последовательности, и, тем самым, существование углового предела $u(\theta)=u(\theta, \varphi)$ у функции $u(z)$ в точке ζ. Для этого выберем хорду $h(\theta, \varphi)$ такую, что неевклидовое расстояние от некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ до этой хорды стремится к нулю (т. е. $|\varphi-\varphi_{n_k}|\to 0$ при $k\to\infty$), и, следовательно, в силу леммы 2, $u(a_{n_k})\to u(\theta, \varphi)=u(\theta)$. Поэтому и $u(a_n)\to u(\theta)$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Как показывает доказательство леммы 3, утверждение леммы остается справедливым при значительно более общих предположениях. Для справедливости утверждения леммы достаточно, чтобы множество значений φ, для которых существуют конечные и равные между собой пределы $u(\theta,\varphi)$, было бы всюду плотно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, множество значений φ, для которых существуют конечные и равные между собой пределы $u(\theta, \varphi)$, может иметь также линейную меру нуль.

Теперь доказательство теоремы 2 очевидно ввиду утверждений теоремы 1 и леммы 3.

Замечание 4. Отметим, что при $\alpha=0$ угловые граничные значения нормальных субгармонических функций исследованы в работах американского математика Мика (см. [12] и [13]), который охарактеризовал исключительное множество E в терминах меры и показал, что mes $E=0$.

Приведем одно применение леммы 2. Для этого обозначим через $C_{h(\theta,\varphi)}(u, \zeta)$ и $C_V(u, \zeta)$ предельные множества функции $u(z)$, соответственно, по хорде $h(\theta, \varphi)$ и по углу Штольца V с вершиной в точке $\zeta=e^{i\theta}$. Через $E_{VV}(u)$ обозначим (см. [10], стр. 248) множество всех точек $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$, для каждой из которых имеется пара углов Штольца V_1, V_2 таких, что $C_{V_1}(u, \zeta)=C_{V_2}(u, \zeta)$. Дополнение к множеству $E_{VV}(u)$ на Γ обозначим через $\Phi E_{VV}(u)$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $u(z)$—нормальная субгармоническая функция, определенная в D. Если $\zeta=e^{i\theta}\in\Phi E_{VV}(u)$, то для любого значения $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и любого угла Штольца V с вершиной в точке ζ справедливо соотношение*

$$C^{h}_{(\theta,\varphi)}(u, \zeta)=C_V(u, \zeta). \tag{2.5}$$

Аналогичное утверждение для нормальных мероморфных функций доказано Рангом (см. [16]). Доказательство теоремы 3, с учетом леммы 2, полностью проводится по той же схеме и поэтому его не приводим.

Армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 29. IV. 1984

Ս. Լ. ԲԵՐԲԵՐՅԱՆ. U_α դասերի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային վարքի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում են պրոֆեսոր Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ներմուծված U_α դասերի $u(z)$ սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային հատկությունները: Ցույց է տրված, ամենուրեք միավոր շրջանագծի վրա, բացի E բազմությունից, $\mathrm{cap}_{1+\alpha}E=0$, գոյություն ունեն համարյա բոլոր $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ արժեքների համար վերջավոր և իրար հավասար սահմաններ $u(\theta, \varphi)$: Եթե $u(z)$-ը U_α դասի նորմալ սուբհարմոնիկ ֆունկցիա է, ապա ամենուրեք $\Gamma: |z|=1$ վրա, բացի E բազմությունից, $\mathrm{cap}_{1+\alpha}E=0$, գոյություն ունեն վերջավոր անկյունային եզրային արժեքներ:

S. L. BERBERIAN. *On the boundary behaviour of subharmonic functions of U_α class* (summary)

The boundary properties of $u(z)$ subharmonic functions from U_α clases introduced by professor M. M. Djrbashian is studied. It is shown that everywhere on the unit circumference finite and equal limits of $u(\theta, \varphi)$ exist for almost all $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ except a set E, $\mathrm{cap}_{1+\alpha}E=0$. If $u(z)$ is a normal subharmonic function of U_α class, then everywhere on Γ: $|z|=1$ except E set, $\mathrm{cap}_{1+\alpha}E=0$, finite angular boundary values exist.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
2. *М. М. Джрбашян*. Классы функций и их параметрическое представление. Современные проблемы теории аналитических функций, Международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965, Изд. «Наука», М., 1966, 118—137.

3. *М. М. Джрбашян и В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, 1970, 1262—1339.
4. *М. М. Джрбашян и В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», VI, №№ 2—3, 1971, 182—194.
5. *В. С. Захарян.* Сегментные изменения потенциала типа Грина, ДАН Арм.ССР, 66, № 4, 1978, 212—215.
6. *В. С. Захарян, А. Г. Унанян.* Изменение на отрезке потенциала типа Грина, ДАН Арм.СССР, 73, № 1, 1981, 3—8.
7. *Е. Д. Соломенцев.* Гармонические и субгармонические функции и их обобщения, В сб. Мат. анализ. Теория вероятностей. Регулирование, 1962, (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР), М., 1964, 83—100.
8. *С. Л. Берберян.* О граничных свойствах субгармонических функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 15, № 4, 1980, 395—402.
9. *С. Л. Берберян.* Об исключительных множествах субгармонических функций, ДАН Арм.ССР, 68, № 2, 1979, 79—87.
10. *Э. Коллингвуд и А. Ловатер.* Теория предельных множеств, М., 1971.
11. *А. Ловатер.* Граничное поведение аналитических функций. В сб. Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, 99—260.
12. *J. Meek.* Subharmonic versions of Fatous theorem, Proc. Amer. Math Soc., vol. 30, № 2, 1971, 313—317.
13. *J. Meek.* Of Fatous points of normal subharmonic functions, Mathematica Japonica, vol. 22, № 3, 1977, 309—314.
14. *E. Tolsted.* Non-tangential limits of subharmonic functions, Proc. London Math. Soc., 7, № 27, 1957, 321—333.
15. *F. Bagemihl, W. Seidel.* Sequential and continuous limits of meromorphic functions, Annal. Acad. Scien; Fennicae, Ser. A, № 280, 1960, 1—17.
16. *D. Rung.* Boundary behaviour of normal functions defined in the unit disk, Mich. Math. J., 10, № 1, 1963, 43—51.