ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 2, 1986 Математика

УДК 517.53

В. Х. МУСОЯН

СУММИРОВАНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО НЕПОЛНЫМ СИСТЕМАМ ЭКСПОНЕНТ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Изучая последовательности полиномов из экспонент, сходящихся в области, где образующая эти полиномы система экспонент не является полной, А. Ф. Леонтьев установил следующий результат (см. [1], стр. 111).

Пусть последовательность обобщённых полиномов

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} z^s e^{\lambda_k z}$$

сходится к функции $P(z)$ равномерно в некоторой области, где образующая эти полиномы система функций

$$\{e^{\lambda_k z}, ze^{\lambda_k z}, \dots, z^{m_k-1} e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$$

не является полной.

Тогда

$$P(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks} \frac{d^s}{d\lambda^s} [e^{\lambda z} L_n^{(\lambda)}]_{\lambda=\lambda_k},$$

где

$$a_{ks} = \lim_{n\to\infty} a_{ks}^{(n)}, \quad L_n^{(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)^{m_k}.$$

В настоящей работе предложен аналогичный метод суммирования для биортогональных разложений М. М. Джрбашяна ([3]—[6]) по неполным системам экспонент в пространстве $L^2(0, \infty)$ и по неполным системам рациональных функций в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$. Сначала приведена одна теорема общего характера.

§ 1. Порожденные биортогональные системы

Пусть $\{e_k\}_1^{\infty}$ —линейно независимая система в гильбертовом пространстве H и $E \subset H$—замкнутая линейная оболочка системы $\{e_k\}$. Мы будем предполагать, что система $\{e_k\}$ неполна в пространстве H, т. е. E не совпадает с H.

Известно, что для существования биортогональной системы

$$(e_k, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m \end{cases}$$

необходимо и достаточно, чтобы система $\{e_k\}$ была минимальной, т. е. отбрасывание хотя бы одного элемента e_k вызывает уменьшение множества E.

В случае неполноты минимальной системы $\{e_k\}$ биортогональная система $\{\varphi_k\}$ неединственна. Если требовать дополнительно, чтобы $\varphi_k \in E$, $k=1, 2, \ldots$, то будет иметь место единственность. При выполнении этого условия биортогональную систему $\{\varphi_k\}$ будем называть порожденной минимальной системой $\{e_k\}$.

Конечные порожденные биортогональные системы были введены в работе [2], где указана связь конечных порожденных биортогональных систем с аппроксимационными задачами.

Пусть $\{e_k\}$—произвольная неполная в H минимальная система, а $\{\varphi_k\}$—биортогональная система. Каждому элементу $x \in H$ ставим в соответствие биортогональное разложение

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) e_k. \tag{1}$$

Ряд может сходиться или расходиться. Следующая теорема устанавливает связь между порожденными биортогональными системами и аппроксимационными задачами.

Теорема 1. *Пусть существует бесконечная матрица комплексных чисел $\{a_{nk}\}$; $n, k = 1, 2, \cdots$; $a_{nk} \underset{n \to \infty}{\to} 1$ такая, что для любого $x \in H$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) e_k$ суммируем линейным процессом суммирования $\{a_{nk}\}$, т. е. при любом n ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (x, \varphi_k) e_k$ сходится и существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (x, \varphi_k) e_k$.*

Для того чтобы при любом $x \in H$ имело место равенство

$$P_E x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (x, \varphi_k) e_k, \tag{2}$$

где $P_E x$—проекция элемента x на подпространство E, необходимо и достаточно, чтобы биортогональные системы $\{e_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ порождали друг друга.

Необходимость. Обозначим через M ортогональное дополнение подпространства E в пространстве H. Тогда элементы φ_k можно представить в виде $\varphi_k = h_k + g_k$, $k = 1, 2, \cdots$, где $h_k \in E$, $g_k \in M$.

В равенстве (2) в качестве элемента x подставив элемент g_p, получим

$$0 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (g_p, \varphi_k) e_k.$$

В силу непрерывности скалярного произведения получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (g_p, \varphi_k) e_k, \ \varphi_m \right) \underset{n \to \infty}{\to} 0, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

Так как системы $\{e_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ биортогональны, то опять, в силу непрерывности скалярного произведения, получим

$$a_{nm}(g_p,\ \varphi_m) \underset{n \to \infty}{\to} 0, \quad m=1,\ 2, \cdots.$$

Учитывая условие $a_{nm} \underset{n \to \infty}{\to} 1$, имеем $(g_p,\ \varphi_m)=0$. Принимая $m=p$, получим $(g_p,\ \varphi_p)=0$. Отсюда следует, что $(g_p,\ g_p)=0$, т. е. $g_p=0$, $p=1,\ 2, \cdots$, или, что то же самое, $\varphi_k=h_k$; $k=1,\ 2, \cdots$, т. е. $\varphi_k \in E$. Тем самым мы доказали, что система $\{\varphi_k\}$ порождается системой $\{e_k\}$. Чтобы доказать, что система $\{e_k\}$ порождается системой $\{\varphi_k\}$, достаточно доказать, что система $\{\varphi_k\}$ полна в подпространстве E, т. е. из того, что $x \in E$ и $(x,\ \varphi_k)=0$; $k=1,\ 2, \cdots$ следует, что $x=0$, а это вытекает из равенства (2).

Достаточность. По условию теоремы системы $\{e_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ порождают друг друга, т. е. $\varphi_k \in E$; $k=1,\ 2,\ldots$ и система $\{\varphi_k\}$ полна в подпространстве E. Поэтому для доказательства равенства (2) достаточно показать, что

$$\left(P_E\, x-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(x,\ \varphi_k)\, e_k, \varphi_m\right)=0;\ m=1,\ 2, \cdots. \tag{3}$$

В силу непрерывности скалярного произведения равенство (3) равносильно равенству

$$(P_E\, x,\ \varphi_m)-\lim_{n\to\infty} a_{nm}(x,\ \varphi_m)=0.$$

Поскольку $(P_E\, x,\ \varphi_m)=(x,\ \varphi_m)$, $m=1,\ 2, \cdots$; $a_{nm} \underset{n \to m}{\to} 1$, то теорема доказана.

§ 2. Неполная система экспонент

Рассмотрим неполную в пространстве $L^2(0,\ \infty)$ систему экспонент

$$\{e^{-\lambda_k x}\}_1^{\infty}, \tag{2.1}$$

где $\{\lambda_k\}$—последовательность различных между собой комплексных чисел, лежащих в правой полуплоскости. Или, более обще, пусть $\{\lambda_k\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих в правой полуплоскости, s_k—кратность появления числа λ_k на отрезке $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\ \lambda_k$. Рассмотрим обобщенную систему Мюнца-Саса

$$\{x^{s_k-1}\, e^{-\lambda_k x}\}_1^{\infty} \tag{2.2}$$

в пространстве $L^2(0,\ \infty)$. Относительно этой системы известно из работы М. М. Джрбашяна [3], что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}<\infty \tag{2.3}$$

необходимо и достаточно для ее неполноты в пространстве $L^2(0,\ \infty)$.

В указанной и последующих работах М. М. Джрбашяна (см. [4], где имеется подробный литературный обзор) была построена и систематически изучена порожденная системой (2.2) биортогональная система

В настоящей заметке мы будем использовать порожденную системой (2.2) биортогональную систему, записанную в удобной для нашей цели форме.

Из условия (2.3) следует, что каждое число λ_k в последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ имеет конечную кратность, обозначим ее через m_k и систему (2.2) запишем в виде

$$\{e^{-\lambda_k x},\ xe^{-\lambda_k x},\cdots,\ x^{m_k-1}e^{-\lambda_k x}\}, \tag{2.4}$$

где $\{\lambda_k\}$ — последовательность различных между собой комплексных чисел, лежащих в правой полуплоскости. Тогда условие (2.3) примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}<\infty. \tag{2.3'}$$

Кроме того, условие (2.3′) необходимо и достаточно для сходимости произведения Бляшке

$$W(\lambda)=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda+\bar\lambda_k}\cdot\frac{|1-\lambda_k^2|}{1-\lambda_k^2}\right\}^{m_k}$$

к аналитической в правой полуплоскости функции, обращающейся в нуль в точках последовательности $\{\lambda_k\}$.

Как известно, почти для всех $\lambda\in(-i\infty,\ i\infty)$ существуют ее угловые граничные значения $w(i\tau)=\lim\limits_{\lambda\to i\tau} W(\lambda)$, причем почти везде $|w(i\tau)|=1$, $\tau\in(-\infty,\ \infty)$.

Более того (см. [8], стр. 152)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|W_n(i\tau)-W(i\tau)|^2\frac{d\tau}{1+\tau^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

где W_n—частичное произведение Бляшке. Следовательно, если $f(\tau)\in L(-\infty,\ \infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}|W_n(i\tau)-W(i\tau)|^2|f(\tau)|\,d\tau\underset{n\to\infty}{\to}0. \tag{2.5}$$

Для построения порожденной системой (2.4) биортогональной системы мы воспользуемся соответствующей конструкцией для конечных систем, построенной в работе [2]. В указанной работе установлено, что порожденная системой

$$\{e^{-\lambda_k x},\ xe^{-\lambda_k x},\cdots,\ x^{m_k-1}e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^{n} \tag{2.4'}$$

биортогональная система $\varphi_{ksn}(t)$ имеет представление

$$\varphi_{ksn}(t)=\frac{(-1)^s}{s!}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{-\zeta t}\,d\zeta}{W_n(\zeta)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)(\lambda+\bar\zeta)}\right\}}, \tag{2.6}$$

где $k=1,2,\cdots,n$; $s=0,1,\cdots,m_k-1$; Γ — произвольный замкнутый контур, лежащий в правой полуплоскости и охватывающий внутри себя точки $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$; c_k — окружность с центром в точке λ_k, целиком лежащая в открытой правой полуплоскости и не охватывающая других точек последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, кроме λ_k, а $w_n(\lambda)$ — конечное произведение Бляшке

$$W_n(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda+\bar{\lambda}_k}\right)^{m_k}\left(\frac{|1-\lambda_k^2|}{1-\lambda_k^2}\right)^{m_k}.$$

Функцию $\varphi_{ksn}(t)$ можно представить и как преобразование Фурье рациональной функции. Действительно, функция

$$\frac{1}{W_n(\zeta)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)(\lambda+\bar{\zeta})}\right\}}$$

представляет собой рациональную функцию, которая на мнимой оси не имеет полюсов и стремится к нулю при $\zeta\to\infty$. Поэтому в (2.6) в качестве контура Γ мы можем взять контур, состоящий из отрезка мнимой оси $[-i\sigma, i\sigma]$ и полуокружности $|\xi|=\sigma$, $\mathrm{Re}\,\zeta\geqslant 0$, обходящийся в положительном направлении, и затем применить лемму Жордана при $\sigma\to\infty$.

В результате получим

$$\varphi_{ksn}(t)=\frac{(-1)^s}{s!}\,V\cdot p\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\tau t}\,d\tau}{W_n(i\tau)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau-\lambda)}\right\}},\ t>0. \tag{2.7}$$

Так как функция

$$f_n(\tau)=\frac{1}{W_n(i\tau)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau-\lambda)}\right\}}$$

принадлежит классу $L^2(-\infty,\infty)$, то в формуле (2.7) главное значение интеграла совпадает с преобразованием Фурье, поэтому

$$\varphi_{ksn}(t)=\frac{(-1)^s}{s!}\,\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\frac{e^{-i\tau t}\,d\tau}{W_n(i\tau)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau-\lambda)}\right\}}, \tag{2.8}$$

где l.i.m. означает предел в пространстве $L^2(0,\infty)$.

Убедимся, что при фиксированных k и s последовательность $\varphi_{ksn}(t)$ в пространстве $L^2(0,\infty)$ сходится к функции

$$\varphi_{ks}(t)=\frac{(-1)^s}{s!}\,\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\frac{e^{-i\tau t}\,d\tau}{W(i\tau)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W(\lambda)(i\tau-\lambda)}\right\}}. \tag{2.9}$$

Так как преобразование Фурье непрерывно в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$, то достаточно доказать, что последовательность $f_n(\tau)$ в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ сходится к функции

$$f(\tau)=\frac{1}{W(i\tau)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W(\lambda)(i\tau-\lambda)}\right\}}.$$

Для этого оценим разность этих функций

$$f_n(\tau)-f(\tau)=\frac{1}{W_n(i\tau)}\left\{\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau-\lambda)}}-\right.$$

$$-\frac{1}{W(i\tau)}\left\{\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau-\lambda)}}\right\}+\frac{1}{W(i\tau)}\left\{\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau-\lambda)}}\right\}-$$

$$-\frac{1}{W(i\tau)}\left\{\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W(\lambda)(i\tau-\lambda)}}\right\}=\frac{W(i\tau)-W_n(i\tau)}{W_n(i\tau)\,W(i\tau)}\times$$

$$\times\left\{\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)(i\tau-\lambda)}}\right\}+$$

$$+\frac{1}{W(i\tau)}\left\{\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\left[\frac{1}{W_n(\lambda)}-\frac{1}{W(\lambda)}\right]\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{i\tau-\lambda}}\right\}.$$

Отсюда получим оценку, справедливую почти везде

$$|f_n(\tau)-f(\tau)|\leqslant|W(i\tau)-W_n(i\tau)|\cdot\max_{\lambda\in c_k}\frac{1}{|i\tau-\lambda|}\cdot\int\limits_{c_k}\left|\frac{(\lambda-\lambda_k)^s}{W_n(\lambda)}\right||d\lambda|+$$

$$+\max_{\lambda\in c_k}\left|\frac{1}{W_n(\lambda)}-\frac{1}{W(\lambda)}\right|\cdot\max_{\lambda\in c_k}\frac{1}{|i\tau-\lambda|}\cdot\int\limits_{c_k}|\lambda-\lambda_k|^s\,|d\lambda|. \tag{2.10}$$

Так как при фиксированной окружности c_k имеет место оценка

$$\max_{\lambda\in c_k}\frac{1}{|i\tau-\lambda|}<\frac{M}{1+|\tau|},\quad \tau\in(-\infty,\infty), \tag{2.10'}$$

где M—некоторая постоянная, не зависящая от λ, то благодаря (2.5) первое слагаемое справа в (2.10) стремится к нулю по норме пространства $L^2(-\infty,\infty)$, а второе слагаемое в (2.10) по той же норме стремится к нулю благодаря тому, что на окружности c_k функция $\frac{1}{W_n(\lambda)}$ равномерно сходится к функции $\frac{1}{W(\lambda)}$. Таким образом, доказано, что при фиксированных k, s в пространстве $L^2(0,\infty)$ имеет место предельное соотношение

$$\varphi_{ks}(t)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m\cdot}}\ \varphi_{ksn}(t), \tag{2.11}$$

где l.i.m. означает предел в пространстве $L^2(0,\infty)$. С другой стороны, системы (2.4) и (2.6) биортогональны, поэтому имеем

$$\int\limits_0^\infty t^p e^{-\lambda_q t}\,\overline{\varphi_{ksn}(t)}\,dt=\begin{cases}0, & q\neq k\\ 0, & q=k,\ p\neq s\\ 1, & q=k,\ p=s,\end{cases} \tag{2.12}$$

где $q, k=1, 2,\cdots, n$; $p=0, 1,\cdots, m_q-1$; $s=0, 1,\cdots, m_k-1$. Переходя к пределу в (2.12) при фиксированных p, q, k и s получим биортогональность систем (2.4) и (2.9). Кроме того, из (2.11) следует что система (2.9) порождается системой (2.4).

В частности, когда вместо системы (2.4) берем систему (2.1), порожденной биортогональной системой будет

$$\varphi_k(t) = -\frac{1}{W'(\lambda_k)} \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \frac{e^{-i\tau t}\,d\tau}{W(i\tau)(i\tau+\bar\lambda_k)}.$$

Каждой функции $f\in L^2(0, \infty)$ ставим в соответствие биортогональное разложение

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\, x^s e^{-\lambda_k x}, \tag{2.13}$$

где

$$a_{ks}(f) = \int\limits_0^{\infty} f(t)\,\overline{\varphi_{ks}(t)}\,dt. \tag{2.14}$$

Теорема 2. *Проекция $P_E f$ функции f на замкнутую линейную оболочку E системы (2.4) имеет представление*

$$(P_E f)(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\cdot \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)(-1)^s \frac{d^s}{d\lambda^s}\{e^{-\lambda x} r_n(\lambda)\}_{\lambda=\lambda_k}, \tag{2.15}$$

где l.i.m. *означает предел в пространстве $L^2(0, \infty)$,*

$$r_n(\lambda) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\left\{\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda+\bar\lambda_k}\,\frac{|1-\lambda_k^2|}{1-\lambda_k^2}\right\}^{m_k}.$$

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.
Согласно теореме Винера-Пэли функция

$$\hat f(\zeta) = \int\limits_0^{\infty} f(t)\, e^{-\zeta t}\, d\zeta,\ \mathrm{Re}\,\zeta>0$$

входит в класс H^2 в правой полуплоскости, поэтому почти везде на мнимой оси она имеет угловые граничные значения $\hat f(i\tau)$, причем $\hat f(i\tau)\in L^2(-\infty, \infty)$.

Лемма 1. *Коэффициент $a_{ks}(f)$ можно представить в виде*

$$a_{ks}(f) = \frac{(-1)^s}{s!}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W(\lambda)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\hat f(i\tau)}\,d\tau}{\overline{W(i\tau)}\,(i\tau-\lambda)}\right\}. \tag{2.16}$$

Доказательство. В силу непрерывности скалярного произведения в пространстве $L^2(0, \infty)$ из (2.14) и (2.11) получим

$$a_{ks}(f)=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f(t)\,\overline{\varphi_{ksn}(t)}\,dt. \tag{2.17}$$

Подставляя в (2.6) параметрические представления кривых Γ и c_k и изменив порядок интегрирования мы убедимся, что

$$\overline{\varphi_{ksn}(t)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{-\zeta t}\,d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta+\bar\lambda)}\right\}}.$$

Подставляя полученное выражение в (2.17) и применяя теорему Фубини, получим

$$a_{ks}(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{(\lambda-\lambda_k)^s\,d\lambda}{W_n(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\hat f(\zeta)\,d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta+\bar\lambda)}\right\}}. \tag{2.18}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F_n(\lambda)=\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\hat f(\zeta)\,d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta+\bar\lambda)}} \tag{2.19}$$

и представим ее в виде

$$F_n(\lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\overline{\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\hat f(\zeta)\,d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta+\bar\lambda)}}. \tag{2.20}$$

Для этого мы воспользуемся следующими свойствами функций класса H^2 в правой полуплоскости (см. [8], стр. 176—183):

а) при всех $x>0$ функция $\hat f_x(y)=\hat f(x+iy)$ лежит в $L^2(-\infty,\infty)$;

b) функция $\hat f_x(y)$ сходится к функции $\hat f(iy)$ в $L^2(-\infty,\infty)$ при $x\to 0$;

с) функция $\hat f(\zeta)$ стремится равномерно к нулю, когда ζ стремится к бесконечности внутри любой фиксированной полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta\geqslant\delta>0$.

В интегральном представлении (2.19) функции $F_n(\lambda)$ в качестве контура Γ выберем контур, состоящий из отрезка $[x+ir,\ x-ir]$ и полуокружности $\zeta=x+re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. При этом x берем настолько малым, а r — настолько большим, чтобы контур Γ охватывал внутри себя все корни функции $W_n(\zeta)$. Устремив r к бесконечности, согласно свойству с) функции $\hat f(\zeta)$, в представлении (2.20) интеграл по полуокружности $\zeta=x+re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ будет стремится к нулю. В результате получим

$$F_n(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\overline{\hat{f}(\zeta)\, d\zeta}}{W_n(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})}.$$

Устремив теперь x к нулю, учитывая свойство b) функции $\hat{f}$, получим (2.20).

Из (2.18), (2.19) и (2.20) следует, что для доказательства леммы 1 достаточно показать, что функция $F_n(\lambda)$ на окружности c_k равномерно сходится к функции

$$F(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\overline{\hat{f}(\zeta)\, d\zeta}}{W(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})}, \tag{2.21}$$

а это следует из (2.5) и (2.10′).

Так как $|W(\zeta)| = 1$ почти всюду на мнимой оси, то функция $F(\lambda)$ входит в класс H^2 в правой полуплоскости (см. [8], стр. 192). Обозначим через $F(i\tau)$ граничную функцию функции $F(\lambda)$.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$(P_E f)(x) = -\operatorname*{l\cdot i\cdot m}_{\sigma\to\infty} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)} e^{-i\tau x}\, d\tau. \tag{2.22}$$

Доказательство. В [2] установлен следующий результат. Ортопроектор $P_{E_n} f$, проектирующий все пространство $L^2(0, \infty)$ на линейную оболочку конечной системы (2.4′), имеет представление

$$(P_{E_n} f)(x) = \int\limits_0^\infty K(x, t) f(t)\, dt, \tag{2.23}$$

где

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda x}\, d\lambda}{W_n(\lambda)} \int \left\{ \overline{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{e^{-\zeta t}\, d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})}} \right\}, \tag{2.24}$$

Г—замкнутый контур, лежащий в открытой правой полуплоскости и охватывающий все корни функции $W_n(\lambda)$.

Подставляя (2.24) в (2.23) и применяя теорему Фубини, получим

$$(P_{E_n} f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda x}\, d\lambda}{W_n(\lambda)} \left\{ \overline{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\hat{f}(\zeta)\, d\zeta}{W_n(\zeta)(\zeta + \bar{\lambda})}} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{F_n(\lambda)}{W_n(\lambda)} e^{-\lambda x}\, d\lambda. \tag{2.25}$$

Проекцию функции f на подпространство E_n можно представить и в виде

$$(P_{E_n} f)(x) = -\operatorname*{l\cdot i\cdot m}_{\sigma\to\infty} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)} e^{-i\tau x}\, d\tau. \tag{2.26}$$

Для этого в (2.25) в качестве контура Г выберем контур, состоящий из отрезка $[\delta + i\sigma, \delta - i\sigma]$ и полуокружности $\lambda = \delta + \sigma e^{i\varphi}$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

Устремив σ к бесконечности, согласно лемме Жордана и вышеприведенному свойству с) функций класса H^2 в правой полуплоскости, интеграл по полуокружности будет стремиться к нулю, и мы получим

$$(P_{E_n}f)(x) = -\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F_n(\delta+i\tau)}{W_n(\delta+i\tau)} e^{-\delta x} e^{-i\tau x} d\tau. \tag{2.27}$$

Так как функция

$$\frac{F_n(\delta+i\tau)}{W_n(\delta+i\tau)} e^{-\delta x}, \tag{2.28}$$

как функция от τ, входит в класс $L^2(-\infty,\infty)$, то (2.27) можно переписать в виде

$$(P_{E_n}f)(x) = -\operatorname{l\cdot i\cdot m\cdot}_{\sigma\to\infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F_n(\delta+i\tau)}{W_n(\delta+i\tau)} e^{-\delta x} e^{-i\tau x} d\tau.$$

Для доказательства (2.26), в силу непрерывности преобразования Фурье в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$, нам остается доказать, что при $\delta\to 0$ функция (2.28) по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$ стремится к функции $\frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)}$. А это следует из вышеприведенного свойства b) функций класса H^2.

Обозначим через $\psi_{ks}(x)$; $k=1, 2,\cdots$; $s=0, 1,\cdots, m_k-1$ ортогонализацию системы (2.4) методом Шмидта. Тогда E_n будет совпадать с линейной оболочкой конечной системы $\psi_{ks}(\tau)$, $k=1, 2,\cdots, n$; $s=0, 1,\cdots, m_k-1$, а E — замкнутой линейной оболочкой бесконечной системы $\psi_{ks}(x)$; $k=1, 2,\cdots$; $s=0, 1,\cdots, m_k-1$. Имеем

$$(P_E f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_k-1} (f, \psi_{ks}) \psi_{ks}(x) =$$

$$= \operatorname{l\cdot i\cdot m}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} (f, \psi_{ks}) \psi_{ks}(x) = \operatorname{l\cdot i\cdot m\cdot}_{n\to\infty} (P_{E_n} f)(x).$$

Поэтому, из (2.26) следует, что для доказательства леммы нам остается установить, что при $n\to\infty$ функция $\frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)}$ по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$ стремится к функции $\frac{F(i\tau)}{W(i\tau)}$. Для этого составим разность

$$\frac{F_n(i\tau)}{W_n(i\tau)} - \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)} = \frac{1}{W_n(i\tau)}[F_n(i\tau) - F(i\tau)] + F(i\tau)\frac{W(i\tau) - W_n(i\tau)}{W(i\tau)\, W_n(i\tau)}. \tag{2.29}$$

Согласно (2.5) второе слагаемое справа в (2.29) стремится к нулю. Докажем, что первое слагамое также стремится к нулю. Из (2.20) и (2.21) имеем

$$F_n(\lambda) - F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [W_n(i\tau) - W(i\tau)] \overline{\widehat{f}(i\tau)} \frac{d\tau}{i\tau - \lambda}.$$

Отсюда получим оценку (см. [8], стр. 192)

$$\|F_n(i\tau) - F(i\tau)\| < \|[W_n(i\tau) - W(i\tau)]\widehat{f}(i\tau)\|.$$

Еще раз применяя (2.5), получим требуемый результат.

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим функцию

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{F(\lambda)}{W_n(\lambda)} e^{-\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} r_n(\lambda)\frac{F(\lambda)}{W(\lambda)} e^{-\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{c_k} \frac{F(\lambda)}{W(\lambda)} r_n(\lambda) e^{-\lambda x}\, d\lambda. \qquad (2.30)$$

Так как функция $g_n(\lambda) = r_n(\lambda) e^{-\lambda x}$ регулярна на и внутри окружности c_k, то ее разложение Тейлора сходится равномерно на и внутри окружности c_k

$$g_n(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_n^{(s)}(\lambda_k)}{s!}(\lambda - \lambda_k)^s.$$

Подставляя это разложение в (2.30) и интегрируя почленно получим

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} \frac{1}{2\pi i}\int_{c_k} \frac{(\lambda-\lambda_k)^s}{s!\, W(\lambda)} F(\lambda)\, d\lambda \frac{d^s}{d\lambda^s}\{e^{-\lambda x} r_n(\lambda)\}|_{\lambda=\lambda_k}.$$

Учитывая (2.16) и (2.21) отсюда имеем

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)(-1)^s \frac{d^s}{d\lambda^s}\{e^{-\lambda x} r_n(\lambda)\}|_{\lambda=\lambda_k}. \qquad (2.31)$$

С другой стороны, повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 2, мы убедимся, что функция $S_n(x)$ представляет собой преобразование Фурье функции $-\dfrac{F(i\tau)}{W_n(i\tau)}$, которая в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ сходится к функции $-\dfrac{F(i\tau)}{W(i\tau)}$. В силу непрерывности преобразования Фурье получаем

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}} \cdot S_n(x) = -\underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F(i\tau)}{W(i\tau)} e^{-i\tau x}\, d\tau. \qquad (2.32)$$

Учитывая лемму 2, из (2.31) и (2.32) получим утверждение теоремы.

Следствие. Пусть система (2.1) неполна в пространстве $L^2(0, \infty)$ и последовательность $P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n} a_k^{(n)} e^{-\lambda_k x}$ в пространстве $L^2(0, \infty)$ сходится к функции $f(x)$. Тогда

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k r_n(\lambda_k) e^{-\lambda_k x},$$

где

$$a_k = \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}.$$

§ 3. Неполная система рациональных функций

Рассмотрим систему рациональных функций

$$e_{ks}(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{s!}{(z-\bar{\lambda}_k)^{s+1}},\ k=1,2,\cdots;\ s=0,1,\cdots,\ m_k-1,\quad (3.1)$$

где $\{\lambda_k\}$—произвольная последовательность различных комплексных чисел из верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$.

Функции этой системы входят в известный класс Харди-Тамаркина H^2_+ аналитических в $G^{(+)}$ функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|=\sup_{0<y<\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dx\right\}^{1/2}<\infty.$$

Кроме того, функция $f\in H^2_+$ почти всюду на вещественной оси $-\infty<x<\infty$ имеет угловые граничные значения $f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$, причем

$$\|f\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}.$$

Известно [7], что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}m_k\frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}<\infty\qquad (3.2)$$

необходимо и достаточно для неполноты системы (1) в пространстве H^2_+.

Порождённая неполной системой (3.1) биортогональная система была построена и систематически использована М. М. Джрбашяном (см. [4]—[6]).

В настоящей работе получено интегральное представление указанной биортогональной системы. Исходя из полученного интегрального представления порождённой биортогональной системы строится метод суммирования, который суммирует биортогональное разложение произвольной функции $f\in H^2_+$ к проекции этой функции на пространство E, порожденное неполной системой (3.1). В частности, когда $f\in E$, биортогональное разложение функции f приведенным методом суммирования суммируется к функции f. В предположении сходимости ряда (3.2), следуя М. М. Джрбашяну [4], обозначим через $H^2_\pm\{\lambda_j\}$ множество функций $f(z)$, определенных вне точек вещественной оси $\operatorname{Im} z=0$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(z)\equiv f_+(z)\in H^2_+,\ z\in G^{(+)}$,

2) $f(z)\equiv f_-(z)=B(z)f_*(z),\ z\in G^{(-)}$;

где $f_*(z)\in H^2_-$ (H^2_- — класс Харди—Тамаркина в нижней полуплоскости, $B(z)$ — произведение Бляшке, образованное для последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ с кратностями $\{m_k\}$, $G^{(-)}$ — открытая нижняя полуплоскость),

3) почти для всех $x \in (-\infty, \infty)$ существуют и равны пределы

$$\lim_{y\to 0+} f_+(x+iy) \equiv f_+(x) = f_-(x) \equiv \lim_{y\to 0-} f_-(x+iy).$$

М. М. Джрбашян в работе [4], характеризуя замкнутую линейную оболочку неполной в пространстве H^2_+ системы рациональных функций (3.1), доказал следующую основную теорему:

Класс $H^2_\pm\{\lambda_j\}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_k(z), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty,$$

где $\{\Phi_k(z)\}$—система Мальмквиста—Такенака, которая получается из системы (3.1) ортогонализацией методом Шмидта в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$. Причем ряд сходится равномерно на каждом компакте, принадлежащем множеству точек $G^{(+)} \cup G^{(-)} \setminus \{\overline{\lambda}_k\}$.

Таким образом, функции, принадлежащие замкнутой линейной оболочке E неполной системы (3.1), аналитически продолжаются в область $G^{(-)} \setminus \{\overline{\lambda}_k\}$.

В связи с этим возник вопрос: восстанавливаются ли приведенным методом суммирования аппроксируемые функции в области аналитического продолжения $G^{(-)} \setminus \{\overline{\lambda}_k\}$.

Положительный ответ на этот вопрос даёт теорема 3.

Доказательство теоремы 3 опирается на одну экстремальную оценку относительно конечных линейных комбинаций функций из системы (3.1), которая представляет и самостоятельный интерес.

Для удобства читателей и автора в начале параграфа приводятся доказательства некоторых фактов, содержащихся в работах М. М. Джрбашяна [4]—[6].

Введем необходимые обозначения. Известно, что условие (3.2) необходимо и достаточно для сходимости произведения Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-\lambda_k}{z-\overline{\lambda}_k} \nu_k \right)^{m_k}, \quad \nu_k = \frac{|1+\lambda_k^2|}{1+\lambda_k^2}^{*},$$

которое сходится равномерно на каждом компактном множестве комплексной плоскости, не пересекающемся с замыканием множества точек последовательности $\{\overline{\lambda}_k\}_1^\infty$.

Обозначим

$$\varphi_{ks}(z) = \frac{B(z)}{s!\,2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\zeta-\lambda_k)^s d\zeta}{B(\zeta)(\zeta-z)}; \quad k=1,2,\cdots;\ s=0,1,\cdots, m_k-1, \tag{3.3}$$

где c_k—окружность с центром в точке λ_k, лежащая в открытой верхней полуплоскости и не охватывающая корней функции $B(z)$, отличных от λ_k (точка z лежит вне окружности c_k).

* Условимся считать $\nu_k = 1$ при $\lambda_k = i$.

Лемма 3. *Системы функций $e_{ks}(z)$ и $\varphi_{ks}(z)$ биортогональны на вещественной оси*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_{pq}(z)\overline{\varphi_{ks}(z)}dz = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e_{pq}(z)}\, \varphi_{ks}(z)\,dz = \begin{cases} 1, & p=k,\ q=s \\ 0, & p\neq k \\ 0, & p=k,\ q\neq s. \end{cases}$$

Для доказательства леммы введем обозначения

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z-\lambda_j}{z-\overline{\lambda}_j}\,\nu_j\right)^{m_j}$$

и

$$\varphi_{ksn}(z) = \frac{B_n(z)}{s!\,2\pi i}\int_{c_k}\frac{(\zeta-\lambda_k)^s\,d\zeta}{B_n(z)(\zeta-z)},\quad n>p. \tag{3.4}$$

Применяя теорему Фубини, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{e_{pq}(z)}\,\varphi_{ksn}(z)\,dz = \frac{q!}{s!\,2\pi i}\int_{c_k}\frac{(\zeta-\lambda_k)^s\,d\zeta}{B_n(\zeta)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_n(z)\,dz}{(z-\lambda_p)^{q+1}(z-\zeta)}. \tag{3.5}$$

Так как функция

$$\frac{B_n(z)}{(z-\lambda_p)^{q+1}},\quad n\geqslant p$$

входит в класс H^2_+, то для неё справедлива формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_n(z)\,dz}{(z-\lambda_p)^{q+1}(z-\zeta)} = \frac{B_n(\zeta)}{(\zeta-\lambda_p)^{q+1}},\quad \zeta\in G^{(+)}.$$

Подставляя полученное значение интеграла в (3.5), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{e_{pq}(z)}\,\varphi_{ksn}(z) = \frac{q!}{s!\,2\pi i}\int_{c_k}\frac{(\zeta-\lambda_k)^s\,d\zeta}{(\zeta-\lambda_p)^{q+1}} = \begin{cases} 1, & p=k,\ q=s \\ 0, & p\neq k \\ 0, & p=k,\ q\neq s. \end{cases} \tag{3.6}$$

Нам остаётся доказать, что при $n\to\infty$ в равенстве (3.6) можно перейти к пределу. Для этого мы должны доказать, что при фиксированных k и s последовательность $\{\varphi_{ksn}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $\varphi_{ks}(z)$ по норме пространства $L^2(-\infty,\infty)$. С этой целью введем обозначения

$$f_n(z) = \frac{\varphi_{ksn}(z)}{B_n(z)},\quad f(z) = \frac{\varphi_{ks}(z)}{B(z)}.$$

Имеем

$$|f_n(z)-f(z)| = \left|\frac{1}{s!\,2\pi i}\int_{c_k}\frac{(\zeta-\lambda_k)^s}{\zeta-z}\cdot\left[\frac{1}{B_n(\zeta)}-\frac{1}{B(\zeta)}\right]d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\zeta\in c_k}\left|\frac{1}{\zeta-z}\right|\cdot\int_{c_k}|\zeta-\lambda_k|^s\left|\frac{1}{B_n(\zeta)}-\frac{1}{B(\zeta)}\right||d\zeta|. \tag{3.7}$$

Так как функция

$$F(z, \zeta) = \frac{1+|z|}{|\zeta - z|}, \ \zeta \in c_k, \ z \in (-\infty, \infty),$$

как функция двух переменных, непрерывна и равномерно относительно $\zeta \in c$ стремится к единице при $|z| \to \infty$, то она ограничена, следовательно, имеем

$$\frac{1}{|\zeta - z|} \leqslant \frac{M}{1+|z|}, \ \zeta \in c_k, \ z \in (-\infty, \infty), \tag{3.8}$$

где M постоянная.

Кроме того, функция $B_n(\zeta)$ на окружности c_k равномерно сходится к функции $B(\zeta)$, поэтому

$$\int_{c_k} |\zeta - \lambda_k|^s \left| \frac{1}{B_n(\zeta)} - \frac{1}{B(\zeta)} \right| |d\zeta| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.9}$$

Из (3.7), (3.8) и (3.9) следует, что последовательность $f_n(z)$ сходится к функции $f(z)$ по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$:

$$\|f_n - f\|_{L^2(-\infty, \infty)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.10}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_{ksn}(z) - \varphi_{ks}(z)| &= |B_n(z) f_n(z) - B(z) f(z)| \leqslant \\ &\leqslant |f_n(z)| |B_n(z) - B(z)| + |B(z)| |f_n(z) - f(z)|. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Так как почти везде на действительной оси $|B(z)| = 1$, то в силу (3.10) второе слагаемое справа в (3.11) стремится к нулю по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$. Первое слагаемое справа в (3.11) стремится к нулю в силу соотношения (см. [8], стр. 152, см. также [6])

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B_n(z) - B(z)|^2 \frac{dz}{1+z^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.12}$$

ибо в силу (8) имеем оценку

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{M_1}{1+|z|}, \ z \in (-\infty, \infty).$$

Лемма доказана.

Нетрудно убедиться, что система $\{\varphi_{ks}\}$ порождается системой $\{e_{ks}\}$. Действительно, при $n \geqslant k$ точка λ_k является полюсом порядка $m_k - s$ для подынтегральной функции в (4), поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s \, d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta - z)} = \operatorname{Res}\left[\frac{(\zeta - \lambda_k)^s}{B_n(\zeta)(\zeta - z)}, \ \zeta = \lambda_k\right] =$$

$$= \frac{1}{(m_k - s - 1)!} \lim_{\zeta \to \lambda_k} \frac{d^{m_k - s - 1}}{d\zeta^{m_k - s - 1}} \left[\frac{(\zeta - \lambda_k)^{m_k}}{B_n(\zeta)} \cdot \frac{1}{\zeta - z}\right].$$

Применяя формулу Лейбница, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k}\frac{(\zeta-\bar\lambda_k)^s\,d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta-z)}=\sum_{j=0}^{m_k-s-1}\frac{a_j}{(z-\bar\lambda_k)^{j+1}}.$$

Следовательно, функция $\varphi_{ksn}(z)$ представляет собой рациональную функцию с полюсами порядков m_k в точках $\bar\lambda_k$, $k=1, 2,\cdots, n$, причем $\varphi_{ksn}(z)\underset{z\to\infty}{\to}0$. Поэтому, разлагая функцию $\varphi_{ksn}(z)$ на простейшие дроби, получим

$$\varphi_{ksn}(z)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=0}^{m_k-1}\frac{a_{pq}}{(z-\bar\lambda_k)^{q+1}}.$$

Тем самым доказано, что функция $\varphi_{ksn}(z)$ принадлежит линейной оболочке системы (3.1). А функция $\varphi_{ks}(z)$ есть предельная функция последовательности $\{\varphi_{ksn}(z)\}_{n=1}^{\infty}$, поэтому φ_{ks} принадлежит замкнутой линейной оболочке системы (3.1).

Лемма 4.* *В пространстве H_+^2 ортопроектор P_E на подпространство E, порожденное неполной системой* (3.1), *имеет представление*

$$(P_Ef)(z)=f(z)-\frac{B(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{B(t)(t-z)},\ \operatorname{Im} z>0. \tag{3.13}$$

Доказательство. Воспользуемся следующим замечанием.

Если конечные системы $\{e_k\}_1^n$ и $\{\varphi_k\}_1^n$ биортогональны в гильбертовом пространстве H и порождают друг друга, то элемент $P_E x=\sum_{k=1}^{n}(x, \varphi_k)e_k$ представляет собой проекцию элемента $x\in H$ на линейную оболочку E системы $\{e_k\}_1^n$. Для доказательства замечания мы должны показать, что $x-P_E x\perp E$, или, что то же самое, $x-P_E x\perp\varphi_m$, $m=1, 2,\cdots, n$. Имеем

$$(x-P_Ex, \varphi_m)=(x, \varphi_m)-(x, \varphi_m)=0,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через E_n линейную оболочку конечной системы

$$\{e_{ks}(z)\},\ k=1, 2,\cdots, n;\ s=0, 1,\cdots, m_k-1.$$

Согласно замечанию имеем

$$(P_{E_n}f)(z)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ksn}(f)\,e_{ks}(z),$$

---

* Формула (3.13) впервые установлена М. М. Джрбашяном [4]. Мы приведем новое доказательство, чтобы указать на прямую связь ортопроектора с биортогональной системой. (Ниже используются также промежуточные результаты, которые получаются при доказательстве леммы 4).

где

$$a_{ksn}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\varphi_{ksn}(t)}\,dt.$$

Подставляя значения коэффициентов, получим

$$(P_{E_n}f)(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} e_{ks}(z)\,\overline{\varphi_{ksn}(t)}\,dt. \tag{3.13'}$$

Введём обозначение

$$K_n(z,\,t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} e_{ks}(z)\,\overline{\varphi_{ksn}(t)}, \tag{3.14}$$

и при условии, что t и $\bar z$ лежат вне окружностей c_k, $k=1,\,2,\dots,\,n$, вычислим эту сумму. Имеем

$$K_n(z,\,t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1}\frac{s!}{(z-\bar\lambda_k)^{s+1}}\left\{\overline{\frac{B_n(t)}{s!\,2\pi i}\int_{c_k}\frac{(\zeta-\lambda_k)^s\,d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta-t)}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\left\{\overline{\frac{B_n(t)}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta-t)(\bar z-\lambda_k)}\cdot\sum_{s=0}^{m_k-1}\left(\frac{\zeta-\lambda_k}{\bar z-\lambda_k}\right)^s}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\left\{\overline{\frac{B_n(t)}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta-t)(\bar z-\lambda_k)}\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-\lambda_k}{\bar z-\lambda_k}\right)^s}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\left\{\overline{\frac{B_n(t)}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta-t)(\bar z-\lambda_k)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-\lambda_k}{\bar z-\lambda_k}}}\right\}.$$

Таким образом, получаем

$$K_n(z,\,t)=\frac{\overline{B_n(t)}}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\left\{\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta-t)(\bar z-\zeta)}}\right\}, \tag{3.15}$$

где t и $\bar z$ лежат вне окружностей c_k, $k=1,\,2,\cdots,\,n$.

С другой стороны, при фиксированных z и t рациональная функция

$$R(\zeta)=\frac{1}{B_n(\zeta)(\zeta-t)(\bar z-\zeta)}$$

удовлетворяет условию

$$R(\zeta)=O(\zeta^{-2}),\ \zeta\to\infty,$$

следовательно, сумма её вычетов относительно всех её полюсов $\lambda_1,\,\lambda_2,\dots,\,\lambda_n$, t, $\bar z$ равна нулю.

Поэтому из (3.15) получим

$$K_n(z,\,t)=\frac{\overline{B_n(t)}}{2\pi i}\left\{-\overline{\frac{1}{B_n(t)(\bar z-t)}}+\overline{\frac{1}{B_n(\bar z)(\bar z-t)}}\right\}.$$

Учитывая равенство

$$\overline{B_n(\bar{z})} = \frac{1}{B_n(z)},$$

имеем

$$K_n(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - \overline{B_n(t)}\, B_n(z)}{\bar{t} - z}. \tag{3.16}$$

Равенство (3.16) нами установлено при условии, что t и $\bar{z}$ лежат вне окружностей c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Аналитическим продолжением по переменным z и t мы убедимся в справедливости равенства (3.16) для всех значений переменных z и t.

При $t \in (-\infty, \infty)$ из (3.16) получим

$$K_n(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{B_n(z) - B_n(t)}{B_n(t)(z - t)}, \quad t \in (-\infty, \infty). \tag{3.17}$$

Подставляя полученное выражение ядра $K_n(z, t)$ в (3.13′), получим

$$(P_{E_n} f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{B_n(z) - B_n(t)}{B_n(t)(z - t)}\, dt. \tag{3.18}$$

Так как для функции $f \in H_+^2$ справедлива формула Коши, то из (3.18) получим равенство

$$(P_{E_n} f)(z) = f(z) - \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\, dt}{B_n(t)(t - z)}. \tag{3.19}$$

Для доказательства леммы 4 нам остаётся установить, что при $n \to \infty$ в равенстве (3.19) можно перейти к пределу.

Воспользуемся следующим замечанием.

Пусть $\{e_k\}_1^\infty$ линейно независимая система в гильбертовом пространстве H. E_k — линейная оболочка первых k векторов $e_1, e_2, \cdots, e_k$, а E — замкнутая линейная оболочка всей системы $\{e_k\}_1^\infty$. Тогда для любого $x \in H$ имеет место равенство

$$P_E x = \lim_{k \to \infty} P_{E_k} x,$$

где $P_E x$ — проекция элемента x на пространство E, а $P_{E_k} x$ — проекция элемента x на конечномерное подпространство E_k.

Действительно, обозначим через $\{\varphi_k\}_1^\infty$ ортогонализацию системы $\{e_k\}_1^\infty$ методом Шмидта. Тогда E_k есть линейная оболочка первых k векторов $\{\varphi_j\}_1^k$, а E — замкнутая линейная оболочка всей системы $\{\varphi_j\}_1^\infty$. Имеем

$$P_E x = \sum_{m=1}^{\infty} (x, \varphi_m)\varphi_m = \lim_{k \to \infty} \sum_{m=1}^{k} (x, \varphi_m)\varphi_m = \lim_{k \to \infty} P_{E_k} x.$$

Таким образом, чтобы обосновать предельный переход в равенстве (3.19), нам остаётся доказать, что последовательность

$$F_n(z) = \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{B_n(t)(t-z)}$$

по норме пространства H^{2}_{+} сходится к функции

$$F(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{B_n(t)(t-z)}.$$

Для этого мы воспользуемся следующим фактом (см. [8], стр. 192, а также [6]).

Если $h \in L^2(-\infty, \infty)$, то функция

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)\,dt}{t-z}$$

входит в класс H^2_+ и имеет место неравенство

$$\|H\|_{H^2_+} < \|h\|_{L^2(-\infty,\infty)}. \tag{3.20}$$

Из этого следует, что последовательность

$$\frac{F_n(x)}{B_n(x)} - \frac{F(x)}{B(x)}$$

по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$ сходится к нулю (в качестве $F(x)$ и $B(x)$ мы берем граничные значения соответствующих функций $F(z)$ и $B(z)$, $\operatorname{Im} z > 0$).

С другой стороны, имеем

$$F_n(x) - F(x) = B_n(x)\left[\frac{F_n(x)}{B_n(x)} - \frac{F(x)}{B(x)}\right] + \frac{F(x)}{B(x)}[B_n(x) - B(x)].$$

Согласно вышесказанному, в этом равенстве первое слагаемое справа стремится к нулю по норме пространства $L^2(-\infty, \infty)$, а стремление к нулю по той же норме второго слагаемого следует из (3.12). Лемма доказана.

Для произвольной функции $f \in H^2_+$ введём обозначение

$$a_{ks}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\varphi_{ks}(t)}\,dt.$$

Далее, обозначим через $r_n(z)$ остаток произведения Бляшке:

$$r_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{z-\lambda_k}{z-\bar{\lambda}_k}\nu_k\right)^{m_k}.$$

Теорема 3. *Проекция $P_E f$ функции $f \in H^2_+$ на замкнутую линейную оболочку E неполной системы (3.1) имеет представление*

$$(P_E f)(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}(f)\left\{\overline{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{\overline{r_n(\lambda)}}{\bar z-\lambda}}\right\}_{\lambda=\lambda_k},$$

где предел понимается в пространстве H^2_+.

Следствие.. Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (3.1)

$$Q_n(z)=\sum_{k=1}^{q_n}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}^{(n)}e_{ks}(z)$$

сходится к функции f по норме пространства H^2_+, то имеет место равенство

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}(f)\left\{\overline{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{\overline{r_n(\lambda)}}{\bar z-\lambda}}\right\}_{\lambda=\lambda_k},$$

где $a_{ks}(f)=\lim\limits_{n\to\infty}a_{ks}^{(n)}$ (первый предел опять понимается в пространстве H^2_+).

Доказательство теоремы 3. Имеем

$$a_{ks}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{B(x)}\overline{\left\{\frac{1}{s!\,2\pi i}\int_{c_k}\frac{(\zeta-\lambda_k)^s\,d\zeta}{B(\zeta)(x-\zeta)}\right\}}\,dx,$$

откуда

$$\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}(f)\left\{\overline{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{\overline{r_n(\lambda)}}{\bar z-\lambda}}\right\}_{\lambda=\lambda_k}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{B(x)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{1}{B(\zeta)(\zeta-x)}\sum_{s=0}^{m_k-1}\frac{g^{(s)}(\lambda_k)}{s!}(\zeta-\lambda_k)^s\,d\zeta\right\}}\,dx,\qquad(3.21)$$

где

$$g(\lambda)=\frac{\overline{r_n(\lambda)}}{\bar z-\lambda}.\qquad(3.22)$$

Так как $\operatorname{Im} z>0$, то $\bar z$ лежит в нижней полуплоскости, следовательно $g(\lambda)$ регулярна в верхней полуплоскости. Поэтому ряд Тейлора

$$g(\zeta)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{g^{(s)}(\lambda_k)}{s!}(\zeta-\lambda_k)^s$$

сходится равномерно на и внутри окружности c_k.

Кроме того, функция

$$\frac{1}{B(\zeta)}\sum_{s=m_k}^{\infty}\frac{g^{(s)}(\lambda_k)}{\lambda!}(\zeta-\lambda_k)^s$$

регулярна на и внутри окружности c_k. Поэтому заменив в (3.21) конечную сумму на бесконечную, получим

$$\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}(f)\left\{\overline{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{\overline{r_n(\lambda)}}{\bar z-\lambda}}\right\}_{\lambda=\lambda_k}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{B(x)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{g(\zeta)\,d\zeta}{B(\zeta)(\zeta-x)}\right\}}\,dx.$$

Учитывая (3.22), получим

$$\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\overline{\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{z-\lambda}\right\}}_{\lambda=\lambda_k} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{B(x)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{r_n(\zeta)\,d\zeta}{B(\zeta)(\zeta-x)(\bar z-\zeta)}\right\}}dx,$$

следовательно, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\overline{\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{z-\lambda}\right\}}_{\lambda=\lambda_k} =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{B(x)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{d\zeta}{B_n(\zeta)(\zeta-x)(\bar z-\zeta)}\right\}}dx.$$

Учитывая (3.15) и (3.17), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\overline{\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{z-\lambda}\right\}}_{\lambda=\lambda_k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\frac{B_n(x)-B_n(z)}{B(x)(x-z)}\,dx.$$

Или, что то же самое

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\overline{\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{z-\lambda}\right\}}_{\lambda=\lambda_k} =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)B_n(x)}{B(x)}\frac{dx}{x-z}-\frac{B_n(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{B(x)(x-z)}. \tag{3.23}$$

В силу леммы 4 для доказательства теоремы нам остаётся показать, что при $n\to\infty$ правая часть равенства (3.23) стремится к правой части равенства (3.13) по норме пространства H_+^2.

Согласно (3.12) функция

$$\frac{f(x)B_n(x)}{B(x)},\quad x\in(-\infty,\infty),$$

стремится к функции $f(x)$ по норме пространства $L^2(-\infty,\infty)$. Поэтому, согласно (3.20), первое слагаемое справа в (23) стремится к функции

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x-z}=f(z),\ \operatorname{Im} z>0$$

по норме пространства H_+^2. Далее, функция

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{B(x)}\,\frac{dx}{x-z}$$

входит в класс H_+^2. Обозначим через $F(x)$, $x\in(-\infty,\infty)$ ее граничную функцую. Согласно (3.12) имеем

$$\|FB_n-FB\|_{L^2(-\infty,\infty)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Учитывая неравенство (3.20), получим

$$\|FB_n - FB\|_{H^2_+} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем экстремальную оценку для функций, принадлежащих линейной оболочке E_n конечной системы рациональных функций

$$e_{ks}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{s!}{(z-\lambda_k)^{s+1}}\,;\ k=1, 2, \cdots, n;\ s=0,\ 1, \cdots,\ m_k - 1.$$

Теорема 4. *Для любой точки z комплексной плоскости, отличной от полюсов конечного произведения Бляшке $B_n(z)$, имеет место равенство*

$$\max_{Q\in E_n} \frac{|Q(z)|}{\|Q\|} = \sqrt{K_n(z, z)}, \tag{3.24}$$

где

$$K_n(z, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1-|B_n(z)|^2}{2\operatorname{Im} z}, & \operatorname{Im} z \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi i} \dfrac{B_n'(z)}{B_n(z)}, & \operatorname{Im} z = 0, \end{cases} \tag{3.25}$$

причем максимум в (3.24) (в фиксированной точке z) достигается для функции

$$Q_z(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - B_n(t)\overline{B_n(z)}}{\bar{z} - t}.$$

Доказательство. Согласно (3.16) для комплексных значений переменных z и t имеем

$$K_n(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - \overline{B_n(t)}B_n(z)}{\bar{t} - z}. \tag{3.26}$$

Подставляя это выражение ядра $K_n(z, t)$ в (3.13′), получим

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) \frac{1 - \overline{B_n(t)}B_n(z)}{\bar{t} - z} dt. \tag{3.27}$$

В этом равенстве слева и справа стоят рациональные функции, совпадающие в верхней полуплоскости. Согласно теореме единственности они будут совпадать во всех точках комплексной плоскости, отличных от полюсов конечного произведения Бляшке $B_n(z)$. Применяя неравенство Буняковского, из (3.27) получим

$$|Q(z)| \leqslant \|K_n(z,\ t)\| \cdot \|Q\|. \tag{3.28}$$

С другой стороны, согласно (3.14) функция $\overline{K_n(z,\ t)}$, как функция от t, принадлежит подпространству E_n. Поэтому в равенстве (3.27) вместо функции Q подставляя функцию $\overline{K_n(z,\ t)}$ и учитывая (3.26), получим

$$\overline{K_n(z,\ z)} = \|K_n(z,\ t)\|^2 \tag{3.28'}$$

или, что то же самое

$$\|K_n(z,\ t)\| = \sqrt{\overline{K_n(z,\ z)}}.$$

Вводя полученное значение нормы ядра $K_n(z,\ t)$ в неравенство (3.28) получим

$$|Q(z)| \leqslant \sqrt{K_n(z,\ z)}\,\|Q\|, \tag{3.29}$$

причем, согласно (3.28′), равенство в (3.29) достигается для функции $K_n(z,\ t)$. Тем самым равенство (3.24) доказано.

Равенство (3.25) следует из представлений (3.17) и (3.26) ядра $K_n(z,\ t)$.

Теорема 5. *Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы* (3.1)

$$Q_n(z) = \sum_{k=1}^{\sigma_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} e_{ks}(z)$$

сходится по норме пространства $L^2(-\infty,\ \infty)$, *то она сходится равномерно на каждом компактном подмножестве множества* $C\setminus F$, *где* C*—комплексная плоскость, а* F*—замыкание множества точек последовательности* $\{\lambda_k\}$.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что последовательность K_n $(z,\ z)$ монотонно возрастает. Поэтому согласно теореме 4, в точках множества $C \setminus F$ справедлива оценка

$$|Q(z)| \leqslant \sqrt{K(z,\ z)},\ K(z,\ z) = \lim_{n\to\infty} K_n(z,\ z), \tag{3.30}$$

где $Q \in E_n$; $n = 1,\ 2, \cdots$.

Докажем, что функция $K(z, z)$ непрерывна на множестве $C \setminus F$. Достаточно доказать, что для любой точки z_0 на действительной оси, не принадлежащей множеству F (если такие точки существуют), выполняется равенство

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ \operatorname{Im} z\neq 0}} \frac{1-|B(z)|^2}{2\operatorname{Im} z} = \frac{B'(z_0)}{i\,B(z_0)}. \tag{3.31}$$

Учитывая равенство

$$\overline{B(z)} = \frac{1}{B(\bar z)},$$

получим

$$\frac{1-|B(z)|^2}{2\operatorname{Im} z} = i\,\frac{1-B(z)\cdot\overline{B(z)}}{z-\bar z} = \frac{B(z)-B(\bar z)}{i\,B(\bar z)(z-\bar z)}. \tag{3.32}$$

Так как $z_0 \bar{\in} F$, то в окрестности этой точки функция $B(z)$ регулярна, поэтому в равенстве (3.32) вместо $B(z)$ и $B(\bar z)$ подставляя их разложения Тейлора в окрестности точки z_0 и переходя к пределу, устремив z к z_0, получим (3.31).

Пусть теперь K—произвольное компактное подмножество множества $C \setminus F$. Обозначим

$$M = \max_{z \in K} \sqrt{K(z, z)}.$$

Применяя неравенство (3.30) к разности $Q_n - Q_m$, получим

$$|Q_n(z) - Q_m(z)| \leqslant M \|Q_n - Q_m\|, \quad z \in K.$$

Утверждение теоремы 5 следует из этого неравенства.

Ереванский государственный
университет

Поступила 12. VI. 198[illegible]

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ. Ըստ էքսպոնենտների և ըստ ռացիոնալ ֆունկցիաների ոչ լրիվ համակարգերի երկօրթոգոնալ վերլուծությունների գումարումը *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրելով էքսպոնենտների ոչ լրիվ համակարգը կոմպլեքս տիրույթում, Ա. Ֆ. Լեոնտևը կառուցել է երկօրթոգոնալ վերլուծությունների գումարման մեթոդ (տես [1], էջ 111)։

Ներկա աշխատանքում նախ մտցվում է ծնված երկօրթոգոնալ համակարգի գաղափարը հիլբերտյան տարածության մեջ և ապացուցվում է մի ընդհանուր բնույթի լեմմա։ Այնուհետև դիտարկվում է էքսպոնենտների ոչ լրիվ համակարգը տարածության մեջ և ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգը, որը լրիվ չէ Հարդիի տարածությունում կիսահարթության վրա, և ըստ այդ համակարգերի Մ. Մ. Ջրբաշյանի [3—6] երկօրթոգոնալ վերլուծությունների համար կառուցվում են գումարման մեթոդներ, որոնք նման են Լեոնտևի գումարման մեթոդին։

V. Kch. MUSOIAN. *The summation of decompositions with respect to non-complete biorthogonal systems of exponents and rational functions* (summary)

Investigating the non-complete system of exponents in the complex domain A. F. Leontiev has constructed a method of biorthogonal decomposition (see [1], 111 p.)

In the present paper in the first place the notion of a generated biorthogonal system in a Hilbert space is introduced. Then non-complete systems of exponents are considered in $L^2(0, \infty)$ and a summation method is constructed for decompositions of M. M. Djrbashian ([3], [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ф. Леонтьев*. Последовательности полиномов из экспонент, М., «Наука», 1980. сер. матем., XVIII, № 4, 1983, 253—270.
2. *В. Х. Мусоян*. Экстремальные свойства полиномов Дирихле, Изв. АН АрмССР,
3. *М. М. Джрбашян*. О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k - 1}\}_1^\infty$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
4. *М. М. Джрбашян*. Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций, мат. сборник, 114 (156), № 1, 1981, 3—84.
5. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшие приближения ядра Коши на вещественной оси, Мат. Сборник, 95 (137), 1974, 418—444.
6. *М. М. Джрбашян*. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Изв. АН СССР, серия матем., 42, 1978, 1323—1384.
7. *М. М. Джрбашян*. Представление и замкнутость некоторых ортогональных систем, Изв. АН АрмССР, сер. матем. 14, № 6, 1979, 446—493.
8. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.