

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН, Г. В. МИКАЕЛЯН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТИПА БЛЯШКЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Как хорошо известно, Б. Я. Левиным [1] (см. также [2], гл. II) и А. Пфлюгером [3] независимо были установлены теоремы об асимптотическом поведении произведения Вейерштрасса вблизи бесконечно удаленной точки, при наличии особого рода плотности его нулей. Позже Н. В. Говоровым [4, 5] были получены аналогичные результаты для введенного им канонического произведения в полуплоскости.

В совместной статье авторов [6] были введены в рассмотрение произведения типа Бляшке для нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w: \operatorname{Im} w < 0\}$

$$A_{\alpha}(w) = \prod_k a_{\alpha}(w, w_k) \equiv \\ \equiv \prod_k \exp \left\{ - \int_0^{2|\operatorname{Im} w_k|} \frac{\tau^{\alpha} d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\alpha}} \right\}, \{w_k\}_1^{\infty} \subset G^{(-)}, -1 < \alpha < +\infty, (1)$$

сходящиеся при выполнении условия

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty. (2)$$

Там же был исследован ряд свойств этих произведений. Отметим, что в специальном случае $\alpha=0$ произведение $A_{\alpha}(w)$ совпадает с произведением Бляшке вида

$$A_0(w) = \prod_k \frac{w - w_k}{w - \bar{w}_k}.$$

В данной статье установлены теоремы об асимптотическом поведении произведений типа Бляшке $A_{\alpha}(w)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) вблизи начала координат, при наличии некоторого рода плотностей их нулей $\{w_k\}_1^{\infty} \subset G^{(-)} (\operatorname{Im} w_k = 0)$. Эти теоремы являются также теоремами об асимптотическом поведении произведений $A_{\alpha}(w)$ вблизи любых, лежащих на вещественной оси, конечных, изолированных, предельных точек их нулей, ввиду инвариантности функций $A_{\alpha}(w)$ при параллельном вещественной оси перемещении точки w и последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$ (см. [6]). Одновременно, в случае уточненного порядка $\rho = \operatorname{const}$, теоремы статьи инверсией $w = z^{-1}$ переходят в естественные аналоги упомянутых выше результатов Б. Я. Левина и А. Пфлюгера об асимптотическом поведении произведений Вейерштрасса. Следует отметить, что авторы используют общую схему, данную Б. Я. Левиным. Вместе с тем, исследуемые в данной работе произведения имеют намного более сложную структуру, чем

произведения Вейерштрасса, и авторам пришлось преодолеть ряд существенно новых, специфических трудностей.

Аналогичные по духу теоремы были установлены также для первоначальных произведений М. М. Джрбашяна [7], [8] для круга $\pi_\alpha(z)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) в работе [9] способом, применимым лишь при целочисленных значениях параметра α ($\alpha = p = 0, 1, 2, \dots$).

Развитый в статье метод приводит к распространению результатов работы [9] об асимптотике произведений $\pi_\alpha(z)$ ($\alpha = p = 0, 1, 2, \dots$) на случай любого значения параметра α из $(-1, +\infty)$. Однако на этом, а также на распространении результатов статьи на случай любого уточненного порядка, здесь мы не будем останавливаться.

Следует отметить, что произведения $A_\alpha(w)$ во многом аналогичны другим произведениям типа Бляшке для полуплоскости $B_\alpha(w)$, введенным ранее одним из авторов [10] (см. также [11]). Однако асимптотическое поведение последних требует дополнительного исследования.

В § 1 исследована асимптотика произведения $A_\alpha(w)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) в специальном случае, когда последовательность его нулей $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ расположена на некотором луче, исходящем из точки $w=0$ (теорема I).

В § 2 исследована асимптотика произведения $A_\alpha(w)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) в более общем случае, когда последовательность его нулей $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ имеет угловую плотность (теорема II).

§ 1. Специальный случай распределения нулей

Всюду ниже в этом параграфе будем полагать, что последовательность нулей $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$) функции типа Бляшке $A_\alpha(w)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) расположена на некотором луче $\{xe^{-i\psi}; 0 \leq x < +\infty\}$, где $\gamma \leq \psi \leq \pi - \gamma$, а $\gamma \in (0, \pi/2)$ — фиксированное число. При этом, плотность этой последовательности будем предполагать такой, чтобы для некоторого числа $\rho > 0$ ($\max(0, \alpha) \leq \rho < 1 + \alpha$) имели

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^\rho n(t) = \Delta < +\infty, \quad (1.1)$$

где $n(t)$ ($0 < t < +\infty$) — число точек из $\{w_k\}_1^\infty = \{p_k e^{-i\psi}\}_1^\infty$ (с учетом их кратностей), лежащих на луче $\{xe^{-i\psi}; t \leq x < +\infty\}$.

Далее, всюду ниже мы будем полагать, что точка $w \in G^{(-)}$ лежит на луче $\{xe^{-i\psi}; 0 \leq x < +\infty\}$, $\gamma \leq \varphi \leq \pi - \gamma$, где $\varphi \neq \psi$.

Заметим, что $n(t)$ — ступенчатая, монотонно убывающая, непрерывная справа функция, причем $n(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$ и $n(t) = 0$ при $t > M = \max_k p_k$ ($M < +\infty$).

Следует отметить, что при любом α ($-1 < \alpha < +\infty$) и соответственно выбранном ρ условие (1.1) обеспечивает сходимость ряда (2), и, тем самым, сходимость произведения $A_\alpha(w)$.

Действительно, ввиду этого условия и природы функции $n(t)$ имеем

$$\begin{aligned}
 +\infty &> \int_0^{+\infty} t^\alpha n(t) dt = \frac{1}{1+\alpha} \int_{+\infty}^0 t^{1+\alpha} dn(t) = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{1+\alpha} = \\
 &= \frac{\sin^{-(1+\alpha)} \frac{\gamma}{2}}{1+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha}.
 \end{aligned}$$

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 1. При поставленных выше условиях равномерно по φ внутри $[\gamma, \pi - \gamma] \setminus \psi$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow +0} r^\alpha \log A_\alpha(re^{-i\varphi}) &= \\
 &= -\Delta e^{-i\varphi} (2 \sin \psi)^{1+\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-\rho} dx}{[i(e^{-i\varphi} - xe^{i\psi})]^{1+\alpha} (e^{-i\varphi} - xe^{-i\psi})} = \\
 &\equiv \Delta P_{\alpha, \rho}(\varphi, \psi) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы приведено в конце параграфа. Пока же отметим, что рассмотренные в статье ветви логарифмической функции выбраны так, как в работе [6]. Их определениями являются следующие ниже формулы (1.5) и (1.3). При этом, в случае $\alpha=0$ выбранная таким образом ветвь логарифма—главная. Далее отметим, что как нетрудно убедиться, в случае целых $\alpha=\rho=0, 1, 2, \dots$, после замен φ на $\varphi - \pi/2$ и ψ на $\psi - \pi/2$ последний предел совпадает с пределами (15), (17) работы [9]. Тем самым, при целом $\alpha=\rho=0, 1, 2, \dots$ и нецелом $\rho>0$ ($[\rho]=\rho$)

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha, \rho}(\varphi, \psi) &= \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \left\{ \exp [i\rho(\varphi - \psi) - i\pi \rho \operatorname{sign}(\varphi - \psi)] - \right. \\
 &\left. - e^{i\rho(\varphi + \psi - \pi) - 2\rho i(\psi - \pi/2)} \sum_{n=1}^{\rho+1} (-1)^{\rho-n+1} \binom{\rho-\rho}{n-1} (1 - e^{2i\psi})^n \right\},
 \end{aligned}$$

а при целых $\alpha=\rho=1, 2, \dots$ и $\rho=\alpha=\rho$ имеем

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha, \rho}(\varphi, \psi) &= -e^{i\rho(\varphi - \psi)} \{ i[2\psi + \pi \operatorname{sign}(\varphi - \psi)] + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\rho} \frac{1}{n} (1 - e^{2i\psi})^n \}.
 \end{aligned}$$

1.1. Предположив, что $0 < \sigma \leq \frac{1}{2} \sin \gamma$, $2/\sin \gamma \leq \tau < +\infty$ и $w = re^{-i\varphi}$, произведем следующее разбиение:

$$\begin{aligned}
 \log A_\alpha(w) &= \sum_{0 < \rho_k < +\infty} \log a_\alpha(w, w_k) = \\
 &= \left(\sum_{0 < \rho_k < \sigma r} + \sum_{\sigma r < \rho_k < +\infty} + \sum_{\sigma r < \rho_k < \tau r} \right) \log a_\alpha(w, w_k) = \\
 &\equiv S_1^{(\alpha)}(\sigma, r) + S_2^{(\alpha)}(\tau, r) + S_3^{(\alpha)}(\tau, \tau, r) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Для исследования поведения сумм $S_1^{(\alpha)}(\sigma, r)$ и $S_2^{(\alpha)}(\tau, r)$ целесообразно доказать две предварительные леммы.

Лемма 1.1. Пусть $w = re^{-i\varphi} = u + iv$, $\zeta = \rho e^{-i\psi} = \xi + i\eta$, причем $\varphi, \psi \in [\gamma, \pi - \gamma]$ и $0 < \rho \leq \sigma r$, где $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2} \sin \gamma\right]$. Тогда справедлива оценка

$$|\log a_\alpha(w, \zeta)| < c_\alpha(\gamma) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1+\alpha} \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (1.4)$$

где $c_\alpha(\gamma) \in (0, +\infty)$ — постоянная, зависящая лишь от α и γ .

Доказательство. Ввиду формул (1.3)–(1.3') статьи [6] имеем

$$\log a_\alpha(w, \zeta) = - \int_0^{2|\eta|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau + i(w - \zeta)]^{1+\alpha}} \quad (-1 < \alpha < +\infty). \quad (1.5)$$

Отсюда заменой переменной $\tau = |\eta| - t$ придем к еще одному представлению для факторов произведения типа Бляшке $A_\alpha(w)$

$$\log a_\alpha(w, \zeta) = - \int_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^\alpha dt}{[i(w - \xi) - t]^{1+\alpha}} \quad (-1 < \alpha < +\infty). \quad (1.5')$$

Заметим, что так как $0 < \sigma < \frac{1}{2} \sin \gamma < \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$, то $\rho \sin \psi < \frac{r}{2} \sin \varphi$, или, что то же самое, $|\eta| < |\nu|/2$. Поэтому при $|t| < |\eta|$ имеем $|i(w - \xi) - t| = |i(u - \xi) + (|\nu| - t)| > |\nu| - t > |\nu|/2$. Воспользовавшись этим легко приходим к оценке (1.4) леммы:

$$\begin{aligned} |\log a_\alpha(w, \zeta)| &\leq \int_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^\alpha dt}{|i(w - \xi) - t|^{1+\alpha}} < \frac{2^{1+\alpha}}{|\nu|^{1+\alpha}} \int_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta| - t)^\alpha dt = \\ &= \frac{2^{2(1+\alpha)}}{1+\alpha} \left(\frac{\sin \psi}{\sin \varphi}\right)^{1+\alpha} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1+\alpha} \leq \frac{2^{2(1+\alpha)}}{1+\alpha} (\sin \gamma)^{-(1+\alpha)} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Лемма 1.2. Пусть $w = re^{-i\varphi} = u + iv$, $\zeta = \rho e^{-i\psi} = \xi + i\eta$, причем $\varphi, \psi \in [\gamma, \pi - \gamma]$ и $0 < \tau r \leq \rho$, где $\tau \geq 2/\sin \gamma$. Тогда справедлива оценка

$$|\log a_\alpha(w, \zeta)| < c'_\alpha(\gamma) \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (1.6)$$

где $c'_\alpha(\gamma) \in (0, +\infty)$ — постоянная, зависящая лишь от α и γ .

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\alpha = 0$. Очевидно

$$\log a_0(w, \zeta) = \log \left| \frac{w - \zeta}{w - \bar{\zeta}} \right| + i \arg \frac{w - \zeta}{w - \bar{\zeta}},$$

Далее, очевидны неравенства

$$\left| \arg \frac{w - \zeta}{w - \bar{\zeta}} \right| \leq \pi,$$

$$1 > \left| \frac{w - \zeta}{w - \bar{\zeta}} \right| > \frac{\rho - r}{\rho + r} \geq \frac{1 - \frac{1}{\tau}}{1 + \frac{1}{\tau}} = 1 - \frac{2}{\tau + 1} \geq \frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$|\log a_0(w, \zeta)| < \log 3 + \pi. \quad (1.7)$$

Пусть теперь $\alpha \in (-1, 0)$. Тогда из формулы (1.5') получим

$$|\log a_\alpha(w, \zeta)| \leq \int_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^\alpha dt}{|t - |v||^{1+\alpha}} = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{-(|\eta|+|v|)}^{\frac{|\eta|-|v|}{2}} \frac{(|\eta| - |v| - x)^\alpha}{|x|^{1+\alpha}} dx, \quad I_2 = \int_{\frac{|\eta|-|v|}{2}}^{|\eta|-|v|} \frac{(|\eta| - |v| - x)^\alpha}{x^{1+\alpha}} dx.$$

Оценим теперь по отдельности интегралы I_1 и I_2 . Очевидно

$$\begin{aligned} I_1 &< \left(\frac{|\eta| - |v|}{2} \right)^\alpha \int_{-(|\eta|+|v|)}^{\frac{|\eta|-|v|}{2}} \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} = \left(\frac{|\eta| - |v|}{2} \right)^\alpha \left\{ \int_0^{\frac{|\eta|-|v|}{2}} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} + \right. \\ &+ \left. \int_0^{|\eta|+|v|} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \right\} < 2^{1-\alpha} (|\eta| - |v|)^\alpha \int_0^{|\eta|+|v|} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{2^{1+|\alpha|}}{|\alpha|} \left(\frac{|\eta| - |v|}{|\eta| - |v|} \right)^{|\alpha|} = \\ &= \frac{2^{1+|\alpha|}}{|\alpha|} \left(\frac{\rho \sin \psi + r \sin \varphi}{\rho \sin \psi - r \sin \varphi} \right)^{|\alpha|} < \frac{4}{|\alpha|} \left(\frac{\rho + r}{\rho \sin \gamma - r} \right)^{|\alpha|} < \\ &\leq \frac{4}{|\alpha|} \left(\frac{1 + \tau^{-1}}{\sin \gamma - \tau^{-1}} \right)^{|\alpha|} < \frac{4}{|\alpha|} \left(\frac{1 + \frac{\sin \gamma}{2}}{\frac{\sin \gamma}{2}} \right)^{|\alpha|} < \frac{12}{|\alpha|} \sin^\alpha \gamma. \end{aligned}$$

Далее

$$I_2 < \left(\frac{2}{|\eta| - |v|} \right)^{1+\alpha} \int_{\frac{|\eta|-|v|}{2}}^{|\eta|-|v|} (|\eta| - |v| - x)^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Таким образом, окончательно

$$|\log a_\alpha(w, \zeta)| < \frac{12}{|\alpha|} \sin^\alpha \gamma + \frac{1}{1+\alpha} \equiv c'_\alpha(\gamma) \quad (-1 < \alpha < 0).$$

Отсюда и из (1.7) мы приходим к оценке (1.6) леммы в случае, когда $\alpha \in (-1, 0]$. Для доказательства справедливости этой оценки в случае, когда $\alpha \in (0, +\infty)$, воспользуемся следующей рекуррентной формулой, которую легко вывести из представления (1.5) интегрированием по частям:

$$\log a_\alpha(w, \zeta) = \log a_{\alpha-p}(w, \zeta) + \sum_{j=1}^p \frac{1}{\alpha + 1 - j} \left(\frac{2i\eta}{w - \bar{\zeta}} \right)^{\alpha+1-j}, \quad (1.8)$$

где $p \geq 1$ — целое число, определенное неравенствами $p-1 < \alpha \leq p$. Рас-

пространение оценки (1.6) на случай, когда $\alpha \in (0, +\infty)$ выполнимо благодаря тому, что, как нетрудно заметить

$$\left| \frac{2i\eta}{w - \bar{z}} \right| = \frac{2\rho \sin \psi}{|re^{-i\varphi} - \rho e^{i\psi}|} < \frac{2\rho}{\rho - r} \leq 4.$$

1. 2. Установим теперь оценки для сумм $S_1(\sigma, r)$ и $S_2(\tau, r)$ разбиения (1.3).

Лемма 1.3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое σ_ε ($0 < \sigma_\varepsilon \leq \frac{1}{2} \sin \gamma$), что

$$|r^\alpha S_1^{(\alpha)}(\sigma, r)| < \varepsilon \quad (0 < \sigma \leq \sigma_\varepsilon, -1 < \alpha < +\infty) \quad (1.9)$$

каково бы ни было $r \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Ввиду (1.3) и природы функции $n(t)$, определенной в начале параграфа, очевидно, что

$$\begin{aligned} S_1^{(\alpha)}(\sigma, r) &\equiv \sum_{0 < \rho_k < \sigma r} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, \rho_k e^{-i\psi}) = \\ &= \int_{\sigma r}^{+\infty} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) dn(t) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь оценкой (1.4) леммы 1.1, мы приходим к следующим неравенствам, справедливым, когда $0 < \sigma \leq \frac{1}{2} \sin \gamma$

$$\begin{aligned} |S_1^{(\alpha)}(\sigma, r)| &< \int_{\sigma r}^{+\infty} |\log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi})| dn(t) < \\ &< c_\alpha(\gamma) \int_{\sigma r}^{+\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{1+\alpha} dn(t) = \\ &= \frac{c_\alpha(\gamma)}{r^{1+\alpha}} \left\{ \lim_{t \rightarrow +0} t^{1+\alpha} n(t) + (1+\alpha) \int_{+0}^{\sigma r} t^\alpha n(t) dt \right\} - \\ &\quad - c_\alpha(\gamma) \sigma^{1+\alpha} n(\sigma r) < \\ &< \frac{c_\alpha(\gamma)}{r^{1+\alpha}} \left\{ \lim_{t \rightarrow +0} t^{1+\alpha} n(t) + (1+\alpha) \int_{+0}^{\sigma r} t^\alpha n(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что ввиду соотношения (1.1),

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{1+\alpha} n(t) = 0.$$

С другой стороны, в силу того же соотношения (1.1) и природы функции $n(t)$

$$n(t) < Nt^{-\rho} \quad (0 < t < +\infty) \quad (1.10)$$

при достаточно большом $N \in (0, +\infty)$. Поэтому

$$|S_1^{(\alpha)}(\sigma, r)| < \frac{c_\alpha(\gamma)}{r^{1+\alpha}} (1+\alpha) N \int_0^{\tau r} t^{\alpha-1} dt = c_\alpha(\gamma) \frac{1+\alpha}{1+\alpha-\rho} N r^{-\rho} \sigma^{1+\alpha-\rho},$$

откуда легко приходим к утверждению леммы.

Лемма 1.4. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\tau_\varepsilon (2/\sin \gamma \leq \tau_\varepsilon < +\infty)$, что

$$|r^\rho S_2^{(\alpha)}(\tau, r)| < \varepsilon \quad (\tau_\varepsilon \leq \tau < +\infty, -1 < \alpha < +\infty), \quad (1.11)$$

каково бы ни было $r \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Ввиду (1.3) и природы функции $n(t)$ очевидно представление

$$\begin{aligned} S_2^{(\alpha)}(\tau, r) &\equiv \sum_{\tau r < \rho_k < +\infty} \log a_k(re^{-i\varphi}, \rho_k e^{-i\psi}) = \\ &= \int_{+\infty}^{\tau r} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) dn(t) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \end{aligned}$$

Воспользовавшись оценкой (1.6) леммы 1.2 и неравенством (1.10) при $\tau \geq 2/\sin \gamma$ будем иметь:

$$\begin{aligned} |S_2^{(\alpha)}(\tau, r)| &\leq \int_{+\infty}^{\tau r} |\log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi})| dn(t) < \\ &< c'_\alpha(\gamma) \int_{+\infty}^{\tau r} dn(t) = c'_\alpha(\gamma) n(\tau r) < c'_\alpha(\gamma) N r^{-\rho} \tau^{-\rho}. \end{aligned}$$

Отсюда легко следует утверждение леммы.

1.3. Доказательство теоремы I.

Исследуем поведение суммы $S_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r)$ разложения (1.3) при $r \rightarrow +0$. Для этого целесообразно представить ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) &= \int_{\tau r}^{\sigma r} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) dn(t) = \\ &= n(\sigma r) \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, \sigma r e^{-i\psi}) - n(\tau r) \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, \tau r e^{-i\psi}) + \\ &\quad + \int_{\sigma r}^{\tau r} n(t) \frac{\partial}{\partial t} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) dt \equiv \\ &\equiv L_1^{(\alpha)}(\sigma, r) + L_2^{(\alpha)}(\tau, r) + L_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \end{aligned} \quad (1.12)$$

По лемме 1.1 и неравенству (1.10) при $\sigma \in (0, \frac{1}{2} \sin \gamma)$ имеем

$$|L_1^{(\alpha)}(\sigma, r)| < c_\alpha(\gamma) N \sigma^{1+\alpha-\rho} r^{-\rho} \quad (0 < r < M, -1 < \alpha < +\infty).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\sigma' (0 < \sigma' \leq \frac{1}{2} \sin \gamma)$,

что

$$|r^{\alpha} I_1^{(\alpha)}(z, r)| < z (0 < z < z', -1 < \alpha < +\infty), \quad (1.13)$$

каково бы ни было $r \in (0, M)$.

Далее заметим, что по лемме 1.2 и неравенству (1.10) при $\tau \geq 2/\sin \gamma$ имеем

$$|I_2^{(\alpha)}(\tau, r)| < c'_\alpha(\gamma) N \tau^{-\alpha} r^{-\alpha} (0 < r < M, -1 < \alpha < +\infty).$$

Поэтому существует такое $\tau'_\alpha (2/\sin \gamma \leq \tau'_\alpha < +\infty)$, что

$$|r^{\alpha} I_2^{(\alpha)}(\tau, r)| < \varepsilon (\tau'_\alpha \leq \tau < +\infty, -1 < \alpha < +\infty), \quad (1.13')$$

каково бы ни было $r \in (0, M)$.

Исследуем теперь поведение интеграла $I_3(\sigma, \tau, r)$. Для этого заметим, что ввиду формулы (1.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2t \sin \psi} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau + i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha}} = \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= - \frac{(2 \sin \psi)^{1+\alpha} t^\alpha}{[i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha}}, \\ I_2 &= -(1+\alpha) i e^{-i\psi} \int_0^{2t \sin \psi} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau + i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{2+\alpha}}. \end{aligned}$$

Пусть $t \neq r \cos \varphi / \cos \psi$. Тогда очевидно

$$\operatorname{Im}[\tau + i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})] = r \cos \varphi - t \cos \psi \neq 0$$

и

$$\begin{aligned} I_2 &= -(1+\alpha) \frac{e^{-i\psi}}{re^{-i\varphi} - te^{-i\psi}} \int_0^{2t \sin \psi} \left(\frac{\tau}{\tau + i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})} \right)^\alpha \times \\ &\times d \left(\frac{\tau}{\tau + i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})} \right) = \frac{e^{-i\psi} (2 \sin \psi)^{1+\alpha} t^{1+\alpha}}{(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi}) [i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \log a_\alpha(re^{-i\varphi}, te^{-i\psi}) = - t^\alpha \frac{(2 \sin \psi)^{1+\alpha}}{[i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha}} \frac{re^{-i\varphi}}{re^{-i\varphi} - te^{-i\psi}},$$

и по (1.12)

$$I_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) = - re^{-i\varphi} (2 \sin \psi)^{1+\alpha} \int_{\sigma r}^{\tau r} \frac{t^\alpha n(t) dt}{[i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha} (re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})}. \quad (1.14)$$

Введем теперь функцию

$$g_\alpha(t, r) = - \frac{(2 \sin \psi)^{1+\alpha}}{[i(re^{-i\varphi} - te^{-i\psi})]^{1+\alpha}} \frac{re^{-i\varphi}}{re^{-i\varphi} - te^{-i\psi}}, \quad (1.15)$$

и докажем, что для любых $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2} \sin \gamma\right]$, $\tau \in [2/\sin \gamma, +\infty)$ и $\alpha (-1 < \alpha < +\infty)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +0} r^p J_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) &= \Delta \lim_{r \rightarrow +0} r^p \int_{\sigma r}^{\tau} g_{\alpha}(t, r) t^{\alpha-p} dt = \\ &= -\Delta (2 \sin \psi)^{1+\alpha} e^{-i\varphi} \int_{\sigma}^{\tau} \frac{x^{\alpha-p} dx}{[i(e^{-i\varphi} - x e^{i\psi})]^{1+\alpha} (e^{-i\varphi} - x e^{-i\psi})} = \\ &= \Delta P_{\alpha, p}(\varphi, \psi, \sigma, \tau). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для доказательства второго из этих равенств обозначим:

$$\begin{aligned} r^{1+\alpha} g_{\alpha}(xr, r) &= -\frac{(2 \sin \psi)^{1+\alpha}}{[i(e^{-i\varphi} - x e^{i\psi})]^{1+\alpha}} \frac{e^{-i\varphi}}{e^{-i\varphi} - x e^{-i\psi}} = \\ &= F_{\alpha}(x, \varphi, \psi), \end{aligned} \quad (1.17)$$

и заметим, что эта величина не зависит от r . Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta r^p \int_{\sigma r}^{\tau} g_{\alpha}(t, r) t^{\alpha-p} dt &= \Delta r^{1+\alpha} \int_{\sigma}^{\tau} g_{\alpha}(xr, r) x^{\alpha-p} dx = \\ &= \Delta \int_{\sigma}^{\tau} F_{\alpha}(x, \varphi, \psi) x^{\alpha-p} dx = \\ &= -\Delta (2 \sin \psi)^{1+\alpha} e^{-i\varphi} \int_{\sigma}^{\tau} \frac{x^{\alpha-p} dx}{[i(e^{-i\varphi} - x e^{i\psi})]^{1+\alpha} (e^{-i\varphi} - x e^{-i\psi})}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Для доказательства первого из равенств (1.16) заметим, что так как $t^p n(t) \rightarrow \Delta$ при $t \rightarrow +0$, то каково бы ни было $\delta > 0$ существует такое $t_p > 0$, что $|t^p n(t) - \Delta| < \delta$ при $0 < t \leq t_p$.

Поэтому, по (1.14), (1.15) и (1.17) при достаточно малых $r > 0$,

$$\begin{aligned} |r^p J_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) - \Delta P_{\alpha, p}(\varphi, \psi, \sigma, \tau)| &= \\ &= |r^p J_3^{(\alpha)}(\sigma, \tau, r) - \Delta r^p \int_{\sigma r}^{\tau} g_{\alpha}(t, r) t^{\alpha-p} dt| = \\ &= r^p \left| \int_{\sigma r}^{\tau} [t^p n(t) - \Delta] g_{\alpha}(t, r) t^{\alpha-p} dt \right| < \\ &< \delta r^p \int_{\sigma r}^{\tau} |g_{\alpha}(t, r)| t^{\alpha-p} dt = \delta \int_{\sigma}^{\tau} |F_{\alpha}(x, \varphi, \psi)| x^{\alpha-p} dx < \\ &< \delta \int_0^{+\infty} |F_{\alpha}(x, \varphi, \psi)| x^{\alpha-p} dx < +\infty. \end{aligned}$$

По (1.17) очевидно, что последний интеграл равномерно по φ ограничен внутри $[\gamma, \pi - \gamma] \setminus \psi$. Поэтому, ввиду (1.18), равномерно по φ внутри $[\gamma, \pi - \gamma] \setminus \psi$ выполняются оба предельных соотношения в (1.16).

Принимая во внимание разбиения (1.3), (1.12) и неравенства (1.9), (1.11), (1.13)—(1.13'), при $0 < \sigma < \min(\sigma_1, \sigma'_1)$ и $\tau \geq \max(\tau_1, \tau'_1)$ будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow +0} |r^{\sigma} \log A_{\sigma}(re^{-i\varphi}) - r^{\sigma} I_{\sigma}^{(\sigma)}(\sigma, \tau, r)| \leq 4\varepsilon$$

каковы бы ни были $\varphi, \psi \in [\gamma, \pi - \gamma]$. Поэтому, в силу (1.16), для любого частичного предела

$$|\lim_{r \rightarrow +0} r^{\sigma} \log A_{\sigma}(re^{-i\varphi}) - \Delta P_{\sigma, \rho}(\varphi, \psi, \sigma, \tau)| \leq 4\varepsilon,$$

равномерно относительно φ внутри множества $[\gamma, \pi - \gamma] \setminus \psi$. Следовательно, ввиду такой же равномерной сходимости

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow +0 \\ \tau \rightarrow +\infty}} P_{\sigma, \rho}(\varphi, \psi, \sigma, \tau) \equiv P_{\sigma, \rho}(\varphi, \psi) \equiv$$

$$\equiv - (2 \sin \psi)^{1+\sigma} e^{-i\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\sigma-\rho} dx}{[i(e^{-i\varphi} - xe^{i\psi})]^{1+\sigma} (e^{-i\varphi} - xe^{-i\psi})},$$

устремлением $\sigma \rightarrow +0$ и $\tau \rightarrow +\infty$ для любого частичного предела будем иметь

$$|\lim_{r \rightarrow +0} r^{\sigma} \log A_{\sigma}(re^{-i\varphi}) - \Delta P_{\sigma, \rho}(\varphi, \psi)| \leq 4\varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ —любое. Ввиду равномерности последнего соотношения по φ внутри $[\gamma, \pi - \gamma] \setminus \psi$ теорема доказана.

§ 2. Общий случай распределения нулей

Всюду ниже в этом параграфе будем полагать, что последовательность нулей $\{w_k\}_1^{\infty} \equiv \{p_k e^{-i\psi_k}\}_1^{\infty} \subset G^{(-)}$ функции типа Бляшке $A_{\sigma}(w)$ ($-1 < \sigma < +\infty$), удовлетворяющей условию (1), такова, что $\sup_k p_k = p < +\infty$ (здесь p_k —кратность появления точки w_k в последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$), и расположена в некотором угле $\{xe^{-i\psi}: 0 < x < +\infty, \gamma \leq \psi \leq \pi - \gamma\}$, где $\gamma \in (0, \pi/2)$ —фиксированное число. При этом плотность расположения точек последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$ будем предполагать такой, что для всех значений $\psi \in [\gamma, \pi - \gamma]$, за исключением, быть может, счетного множества из $[\gamma, \pi - \gamma]$, существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{\rho} n(t, \psi) = \Delta(\psi) < +\infty \quad (\rho > 0, \max\{0, \sigma\} \leq \rho < 1 + \sigma). \quad (2.1)$$

Здесь $n(t, \psi)$ —число точек последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$ (с учетом кратностей), лежащих в секторе $\{xe^{-i\psi}: t < x < +\infty, 0 < \psi < \psi\}$.

Дополнительно предположим, что плотность расположения точек последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$ такова, что при некотором $\kappa > 0$ открытые кружки радиусов

$$R_k = x r^{1+p/2}$$

с центрами в различных друг от друга точках этой последовательности не пересекаются. Объединение указанных кружков мы будем называть всюду ниже C_R множеством.

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема II. При поставленных выше ограничениях равномерно по φ внутри $(0, \pi)$ выполняются соотношения

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ re^{-i\varphi} \in C_R}} r^p \log |A_+(re^{-i\varphi})| = \operatorname{Re} \int_{-\gamma-0}^{-\gamma+0} P_{\alpha, p}(\varphi, \psi) d\psi \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (2.2)$$

где $P_{\alpha, p}(\varphi, \psi)$ — интеграл из (1.2)

Доказательство теоремы отодвинуто в конец параграфа. Пока же целесообразно доказать ряд лемм.

2.1 Предположив, что точка $w = re^{-i\varphi}$ лежит на некотором луче $\{xe^{-i\varphi}; 0 < x < +\infty\}$, где $\varphi \in (0, \pi)$ фиксировано, и взяв любое δ ($0 < \delta < 1/2$), произведем разбиение

$$\begin{aligned} \log A_+(w) &= \sum_{k=1}^{\infty} \log a_+(w, w_k) = \\ &= \sum_{|w-w_k| < \delta r} \log a_+(w, w_k) + \sum_{|w-w_k| > \delta r} \log a_+(w, w_k) = \\ &= J_{\alpha}^{(1)}(\delta, r) + J_{\alpha}^{(2)}(\delta, r) \quad (-1 < \alpha < +\infty). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Сначала оценим величину $J_{\alpha}^{(1)}(\delta, r)$.

Лемма 2.1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_{\varepsilon} = \delta_{\varepsilon}(\varepsilon, \alpha) \in (0, 1/2)$, что при любом $\delta \in (0, \delta_{\varepsilon})$

$$r^p |J_{\alpha}^{(1)}(\delta, r)| < \varepsilon \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (2.4)$$

каково бы ни было $w = re^{-i\varphi} \in C_R$ такое, что $0 < r < 1$.

Доказательство. Обозначим через $\{z_n\}_1^{\infty}$ подпоследовательность всех различных друг от друга точек последовательности $\{w_k\}_1^{\infty}$. Далее через $n_w(x)$ обозначим количество точек из $\{w_k\}_1^{\infty}$, лежащих в круге $|w - w_k| \leq x \leq \delta r$.

Пусть $w = re^{-i\varphi} \in C_R$ ($0 < r < 1$), δ ($0 < \delta < 1/2$) и x ($0 \leq x \leq \delta r$) любые. Заметим, что если $|z_n - w| \leq x$, то и $R_n \leq x$. С другой стороны, очевидно

$$\min_{|w-z_n| \leq x} R_n \geq x(r-x)^{1+p/2} > \frac{x}{2^{1+p/2}} r^{1+p/2}.$$

Поэтому, как нетрудно убедиться, при $0 \leq x \leq \delta r$ справедливы неравенства

$$n_w(x) \leq p \frac{\pi(2x)^2}{\pi \left(\min_{|w-z_n| \leq x} R_n \right)^2} \leq \frac{2^{4+p} p}{x^2} x^2 r^{-2-p} \quad (0 \leq x \leq \delta r). \quad (2.5)$$

Докажем теперь оценку (2.4) для целых $\alpha = 0, 1, 2, \dots$. С этой целью.

рассмотрим сначала случай, когда $\alpha=0$. Так как $w \in C_R$, то

$$\sum_{|w-w_k| < \delta r} \log |w-w_k| = \int_0^{\delta r} \log x \, d n_w(x) = n_w(\delta r) \log \delta r - \int_0^{\delta r} \frac{n_w(x)}{x} dx.$$

Однако, ввиду (2.5)

$$\int_0^{\delta r} \frac{n_w(x)}{x} dx \leq \frac{2^{4+p} p}{x^2} r^{-2-p} \int_0^{\delta r} x dx = \frac{2^{3+p} p}{x^2} \delta^2 r^{-p} = c \delta^2 r^{-p}.$$

Следовательно

$$\sum_{|w-w_k| < \delta r} \log |w-w_k| > n_w(\delta r) \log \delta r - c \delta^2 r^{-p} \quad (2.6),$$

Далее, поскольку при $|w-w_k| \leq \delta r$ имеем $|w-w_k| \leq r + |w_k| \leq (2 + \delta) r < 3r$, то очевидно

$$\sum_{|w-w_k| < \delta r} \log |w-w_k| \leq n_w(\delta r) \log 3r. \quad (2.6')$$

Заметим теперь, что

$$a_0(w, w_k) = \frac{w-w_k}{w-w_k} \text{ и } |\arg a_0(w, w_k)| \leq \pi.$$

Поэтому, воспользовавшись оценками (2.5), (2.6) и (2.6'), получим

$$\begin{aligned} |J_0^{(1)}(\delta, r)| &= \left| \sum_{|w-w_k| < \delta r} \log a_0(w, w_k) \right| \leq \\ &\leq - \sum_{|w-w_k| < \delta r} \log \left| \frac{w-w_k}{w-w_k} \right| + \pi n_w(\delta r) \leq c \left(\log \frac{9e^{1+\pi}}{\delta^2} \right) \delta^2 r^{-p}. \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует оценка (2.4) в случае $\alpha=0$.

Как нетрудно проверить, полученные неравенства приводят к оценке (2.4) и в случае любого натурального $\alpha=1, 2, \dots$. Надо только воспользоваться рекуррентной формулой (1.8), где в нашем случае

$$\left| \frac{2iv_k}{w-w_k} \right| < 2.$$

Пусть теперь $-1 < \alpha < 0$.

Если $v \leq v_k$ ($-\infty < v \leq v_k < 0$) и $|w-w_k| \leq \delta r$, то ввиду представления (1.5) будем иметь

$$\begin{aligned} \log a_\alpha(v, w_k) &\leq \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{(\tau^2 + |w-w_k|^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}} < \\ &< \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{|v_k|^{1+\alpha}}{|w-w_k|^{1+\alpha}} < \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{r^{1+\alpha}}{|w-w_k|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $v > v_k$ ($-\infty < v_k < v < 0$) и $|w-w_k| \leq \delta r$. Тогда $0 < (|v_k| - |v|)/2 < 2(|v_k| - |v|) < 2|v_k|$, и ввиду представления (1.5) имеем:

$$\begin{aligned}
& |\log a_\alpha(w, w_k)| \leq \\
& < \left\{ \int_0^{\frac{|v_k| - |v|}{2}} + \int_{\frac{|v_k| - |v|}{2}}^{2(|v_k| - |v|)} \int_{2(|v_k| - |v|)}^{2|v_k|} \right\} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[(\tau + |v| - |v_k|)^2 + (u - u_k)^2]^{\frac{1+\alpha}{2}}} = \\
& \equiv I_\alpha^{(1)}(w, w_k) + I_\alpha^{(2)}(w, w_k) + I_\alpha^{(3)}(w, w_k).
\end{aligned}$$

Далее очевидны оценки

$$\begin{aligned}
I_\alpha^{(1)}(w, w_k) & \leq \int_0^{\frac{|v_k| - |v|}{2}} \frac{\tau^\alpha d\tau}{(|v_k| - |v| - \tau)^{1+\alpha}} < \left(\frac{2}{|v_k| - |v|} \right)^{1+\alpha} \times \\
& \times \int_0^{\frac{|v_k| - |v|}{2}} \tau^\alpha d\tau = \frac{1}{1+\alpha}, \quad I_\alpha^{(2)}(w, w_k) \leq \int_{\frac{|v_k| - |v|}{2}}^{2(|v_k| - |v|)} \frac{\tau^\alpha d\tau}{||v_k| - |v| - \tau|^{1+\alpha}} = \\
& = \int_{1/2}^2 \frac{t^\alpha dt}{|1 - t|^{1+\alpha}} < +\infty, \quad I_\alpha^{(3)}(w, w_k) \leq \frac{1}{|w - w_k|^{1+\alpha}} \times \\
& \times \int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau \leq \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{r^{1+\alpha}}{|w - w_k|^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Из этих оценок следует, что при любом α ($-1 < \alpha < 0$) и достаточно малом δ ($0 < \delta < 1/2$).

$$|\log a_\alpha(w, w_k)| < c_\alpha \frac{r^{1+\alpha}}{|w - w_k|^{1+\alpha}} (|w - w_k| \leq \delta r),$$

где $c_\alpha \in (0, +\infty)$ — постоянная, зависящая лишь от α .

Опираясь на рекуррентную формулу (1.8), последнюю оценку легко распространить и на все нецелые $\alpha > 0$. Мы получим, что при любом целом α ($-1 < \alpha < +\infty$) и при достаточно малом $\delta \in (0, 1/2)$ справедливо неравенство

$$|\log a_\alpha(w, w_k)| < c_\alpha \frac{r^{1+\alpha-p}}{|w - w_k|^{1+\alpha-p}} (|w - w_k| \leq \delta r),$$

где $c_\alpha \in (0, +\infty)$ — постоянная, зависящая лишь от α , а $p = [\alpha] + 1$.

Воспользовавшись оценкой (2.5) и последним неравенством, получим, что

$$\begin{aligned}
|I_\alpha^{(1)}(\delta, r)| & \equiv \left| \sum_{|w - w_k| < \delta r} \log a_\alpha(w, w_k) \right| \leq c_\alpha r^{1+\alpha-p} \int_0^{\delta r} \frac{dn_w(x)}{x^{1+\alpha-p}} = \\
& = c_\alpha \delta^{-(1+\alpha-p)} n_w(\delta r) + C_\alpha (1 + \alpha - p) r^{1+\alpha-p} \int_0^{\delta r} \frac{n_w(x)}{x^{2+\alpha-p}} dx <
\end{aligned}$$

$$< 2c, c \left\{ 1 + \frac{1 + \alpha - p}{1 - \alpha + p} \right\} \delta^{1+p-\alpha} r^{-p}.$$

Отсюда следует оценка (2.4) в случае нецелых значений α ($-1 < \alpha < +\infty$). Тем самым, лемма полностью доказана.

2.2. Для дальнейшего изложения целесообразно наряду с последовательностью $\{w_n\}_1^\infty \equiv \{\rho_k e^{-i\psi_k}\}_1^\infty$ ввести в рассмотрение для любого $t \in [0, \gamma/2)$ некоторую последовательность $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{\rho_k e^{-i\psi_k}\}_1^\infty \in G^{(-)}$ такую, что

$$\sup_k |\psi_k - \psi'_k| \leq t.$$

Необходимо ввести также следующие обозначения:

$$A_\alpha^t(w) = \sum_{k=1}^{\infty} a_\alpha(w, w'_k) \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (2.7)$$

$$J_\alpha^{(1)}(\delta, r, t) = \sum_{|w - w_k| < \delta r} \log a_\alpha(w, w'_k),$$

$$J_\alpha^{(2)}(\delta, r, t) = \sum_{|w - w_k| < \delta r} \log a_\alpha(w, w'_k).$$

$$(-1 < \alpha < +\infty, 0 < \delta < 1/2). \quad (2.7')$$

Имеет место

Лемма 2.2. Пусть $\beta \in (0, \pi/2)$ и $c \in (0, +\infty)$ — фиксированные числа. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon \equiv \delta(\varepsilon, \alpha, c, \beta, \rho) \in (0, 1/4)$, что при любом $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$

$$r^\rho |J_\alpha^{(1)}(\delta, r, t)| < \varepsilon \quad (-1 < \alpha < +\infty) \quad (2.8)$$

каковы бы ни были $t \in [0, \delta/2)$ и $w = re^{-i\varphi} \in C_R$ такое, что $r \in (0, 1)$, $\alpha \in [\beta, \pi - \beta]$ и $\inf_k |\varphi - \psi'_k| \geq ct$.

Доказательство. Если $0 < \delta < 1/4$, $0 \leq t < \delta/2$, и при некотором фиксированном $n \geq 1$ имеем $|w - w_k| \leq x$ ($0 \leq x \leq \delta r$), то очевидно

$$\begin{aligned} |w - w'_n| &= |we^{-i(\psi_n - \psi'_n)} - w_n| \leq |w - w_n| + \\ &+ |w - we^{-i(\psi_n - \psi'_n)}| \leq x + r|1 - e^{it}| \leq x + rt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |J_\alpha^{(1)}(\delta, r, t)| &\leq \sum_{|w - w_k| < \delta r} |\log a_\alpha(w, w'_k)| \leq \\ &\leq \sum_{|w - w_k| < (\delta + t)r} |\log a_\alpha(w, w'_k)|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Далее очевидно, что если $|w - w'_n| \leq x$ ($0 \leq x \leq (\delta + t)r$) при фиксированном $n \geq 1$, то

$$\begin{aligned} |w - w_n| &= |we^{i(\psi_n - \psi'_n)} - w'_n| \leq |w - w'_n| + \\ &+ |w - we^{i(\psi_n - \psi'_n)}| \leq x + rt. \end{aligned}$$

Следовательно, если через $n_w^t(x)$ обозначить количество точек w_k (учитывая кратности), для которых $|w - w_k| \leq x$, то

$$n_w^t(x) \leq n_w(x + rt) \quad (0 \leq x \leq (\delta + t)r).$$

Однако, при $x \leq (\delta + t)r$ имеем $x + rt < r/2$. Поэтому к функции $n_w(x + rt)$ применима оценка (2.5), и, тем самым

$$n_w^t(x) \leq \frac{2^{1+p} p}{x^2} (x + rt)^2 r^{-2-p}.$$

Заметим теперь, что если $\inf_k |\varphi - \psi_k| \geq ct$, то $n_w^t(x) = 0$ при $0 \leq x <$

$\frac{c}{2} tr$. В случае же $\frac{c}{2} tr \leq x \leq (\delta + t)r$ имеем $x + rt \leq \left(1 + \frac{2}{c}\right)x$.

Поэтому при любом x ($0 \leq x \leq (\delta + t)r$) справедлива оценка

$$n_w^t(x) \leq \frac{2^{1+p} p \left(1 + \frac{2}{c}\right)^2}{x^2} x^2 r^{-2-p}.$$

Полученная оценка по существу совпадает с оценкой (2.5), на которую опиралось доказательство леммы 2.1. Повторяя рассуждения этой леммы для правой части неравенства (2.9), мы приходим к утверждению нашей леммы.

2.3. Докажем еще две леммы, необходимые для дальнейшего изложения.

Лемма 2.3. Пусть $w = re^{-i\varphi} \in G^{(-)}$ — любое, $m \geq 1$ — фиксированное натуральное число и $K_w = \{k \geq 1, |w - w_k| > \delta r, \rho_k \geq r/m\}$ ($0 < \delta < 1/2$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $t_\varepsilon \equiv t(\varepsilon, \delta, m)$, что при $0 \leq t < t_\varepsilon$

$$|\log |a_\alpha(w, w_k)| - \log |a_\alpha(w, w'_k)|| < \varepsilon \quad (k \in K_w, -1 < \alpha < +\infty). \quad (2.10)$$

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости леммы в случае $\alpha = 0$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Phi(w, w_k) &= \log |a_0(w, w_k)| - \log |a_0(w, w'_k)| \leq \\ &\leq \log \left\{ \left| \frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w'_k)} - 1 \right| + 1 \right\} \leq \left| \frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w'_k)} - 1 \right| \end{aligned} \quad (2.11)$$

и

$$\Phi(w, w_k) > \log \left| 1 - \left| \frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w'_k)} - 1 \right| \right|. \quad (2.12)$$

(Далее, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} &\frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w'_k)} - 1 = \\ &= 4ie^{i\psi_k} \sin \left(\frac{\psi'_k - \psi_k}{2} \right) \frac{r/\rho_k e^{-i\varphi} \cos \frac{\psi_k + \psi'_k}{2} - \cos \frac{\psi_k - \psi'_k}{2}}{(r/\rho_k e^{-i\varphi} - e^{i\psi_k}) \left(\frac{w}{w_k} - e^{i(\psi_k - \psi'_k)} \right)}. \end{aligned}$$

При этом очевидно

$$|r/\rho_k e^{-i\gamma} - e^{i\psi_k}| \geq \sin \psi_k \geq \sin \gamma.$$

Одновременно можно убедиться в том, что если $k \in K_\omega$, то

$$\left| \frac{w}{w_k} - \frac{1}{1-\delta^2} \right| > \frac{\delta}{1-\delta^2}.$$

Отсюда следует, что при $0 \leq t < \delta/3$ имеем

$$\left| \frac{w}{w_k} - e^{i(\psi_k - \gamma)} \right| > \frac{\delta}{3}.$$

Поэтому при достаточно малом $t_\delta > 0$ и любом $t \in [0, t_\delta)$ будут справедливы неравенства

$$\left| \frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w_k)} - 1 \right| < \frac{6(m+1)}{\delta \sin \gamma} t < \delta < 1/2. \quad (2.13)$$

Так как при $0 \leq x < \delta < 1/2$ имеем $\log(1-x) > -2x$, то отсюда и из (2.12) следует, что при $0 < t < t_\delta$

$$\Phi(w, w_k) > -2 \left| \frac{a_0(w, w_k)}{a_0(w, w_k)} - 1 \right|.$$

Сопоставив последнее неравенство с (2.11) и (2.13), придем к оценке

$$|\Phi(w, w_k)| < \frac{12(m+1)}{\delta \sin \gamma} t \quad (0 \leq t < t_\delta).$$

Из этой оценки очевидным образом следует утверждение леммы в случае $\alpha=0$.

Предположим теперь, что α ($-1 < \alpha < +\infty$) любое. Тогда, как нетрудно убедиться, представление (1.5) можно преобразовать к виду

$$a_\alpha(w, w_k) = a_0(w, w_k) \exp \{-F_\alpha(w, w_k)\},$$

где

$$\begin{aligned} F_\alpha(w, w_k) &= \int_0^1 \left\{ \frac{x^\alpha}{\left[x + \frac{w-w_k}{2iv_k} \right]^{1+\alpha}} - \frac{1}{x + \frac{w-w_k}{2iv_k}} \right\} dx \equiv \\ &\equiv \varphi_\alpha \left(\frac{w-w_k}{2iv_k} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что функция $\varphi_\alpha(z)$ аналитична во всей конечной плоскости z , кроме, быть может, отрицательной полуоси. С другой стороны, эту функцию можно представить в виде

$$\varphi_\alpha(z) = \left(\int_0^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \right) \left\{ \frac{x^\alpha}{(x+z)^{1+\alpha}} - \frac{1}{x+z} \right\} dx \equiv \varphi_\alpha^{(1)}(z) - \varphi_\alpha^{(2)}(z).$$

При этом, очевидно, $\varphi_\alpha^{(1)}(z)$ аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \{z = -h: 0 \leq h < +\infty\}$, а $\varphi_\alpha^{(2)}(z)$ — в области $\mathbb{C} \setminus \{z = -h: 1 \leq h < +\infty\}$. Убедемся однако в том, что в действительности функция $\varphi_\alpha^{(1)}(z)$ постоянна

ная. Действительно, взяв $z = h$ ($h > 0$), заменой переменной интегрирования $x = h\sigma$ получим, что

$$\varphi_a^{(1)}(h) \equiv \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\sigma^\alpha}{(1+\sigma)^{1+\alpha}} - \frac{1}{1+\sigma} \right\} d\sigma \equiv c_a.$$

Таким образом

$$\log |a_\alpha(w, w_k)| = \log |a_0(w, w_k)| + \operatorname{Re} \varphi_a^{(2)}(z) - c_a, \quad (2.14)$$

где $\operatorname{Re} \varphi_a^{(2)}(z)$ гармонична в области $\mathbb{C} \setminus \{z = -h: 1 \leq h < +\infty\}$.

Теперь заметим, что так как $w, w_k \in G^{(-)}$, то

$$\operatorname{Re} z \equiv \operatorname{Re} \left(\frac{w - w_k}{2iv_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{v_k} - 1 \right) > -\frac{1}{2}.$$

Тем самым, при рассматриваемых нами значениях w и w_k (из $G^{(-)}$) переменная z остается в области гармоничности функции $\operatorname{Re} \varphi_a^{(2)}(z)$. С другой стороны, как нетрудно убедиться

$$\begin{aligned} & \frac{w - w_k}{2iv_k} - \frac{w - w'_k}{2iv'_k} = \\ &= \frac{\sin \frac{\psi'_k - \psi_k}{2}}{\sin \psi'_k \sin \psi_k} \left\{ \frac{r}{\rho} \cos \frac{\psi'_k + \psi_k}{2} - \cos \frac{\psi'_k - \psi_k}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Повтому при $0 \leq t \leq \gamma/2$ имеем

$$\left| \frac{w - w_k}{2iv_k} - \frac{w - w'_k}{2iv'_k} \right| \leq \frac{m+1}{2 \sin \gamma \sin \gamma/2} t.$$

Отсюда, ввиду уже доказанного утверждения леммы в случае $\alpha=0$ и представления (2.14), следует утверждение леммы в случае любого α ($-1 < \alpha < +\infty$).

Лемма 2.4. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $t_\varepsilon \equiv t(\varepsilon, \delta, \alpha, \rho, \beta)$, что при любом $t \in [0, t_\varepsilon)$

$$r^\alpha |\operatorname{Re} I_a^{(2)}(\delta, r) - \operatorname{Re} I_a^{(2)}(\delta, r, t)| < \varepsilon \quad (-1 < \alpha < +\infty), \quad (2.15)$$

каковы бы ни были $w = re^{-i\varphi} \in G^{(-)} \left(\varphi \in [\beta, \pi - \beta], \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right)$ и $\delta \in (0, 1/2)$.

Доказательство. Для любого натурального $m \geq 1/\sin \beta$ введем в рассмотрение произведение

$$\psi_{m,\alpha}(w) \equiv \prod_{\substack{|w-w_k| > \delta r \\ \rho_k < r/m}} a_\alpha(w, w_k) \quad (-1 < \alpha < +\infty).$$

В этом произведении $|v_k| < |v|$. Действительно, если $w_k = \rho_k e^{-i\psi_k}$ такое, что $\rho_k < r/m$, то $r \sin \varphi / \sin \psi_k \geq r \sin \varphi > r/m > \rho_k$, и повтому $|v_k| = \rho_k \sin \psi_k < r \sin \varphi = |v|$. Ввиду этого, воспользовавшись представлением (1.5), приходим к следующим неравенствам для факторов введен-

ного произведения:

$$\begin{aligned}
 |\log a_\alpha(w, w_k)| &< \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau^2 + |w - w_k|^2]^{\frac{1+\alpha}{2}}} < \\
 &< \frac{1}{|w - w_k|^{1+\alpha}} \int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau = \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{|v_k|^{1+\alpha}}{|w - w_k|^{1+\alpha}} \leq \\
 &\leq \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \frac{\rho_k^{1+\alpha}}{(r - \rho_k)^{1+\alpha}} < \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} \left(\frac{m}{m-1}\right)^{1+\alpha} \left(\frac{\rho_k}{r}\right)^{1+\alpha} \leq \\
 &\leq \frac{2^{2(1+\alpha)}}{1+\alpha} \left(\frac{\rho_k}{r}\right)^{1+\alpha} \equiv c_\alpha \left(\frac{\rho_k}{r}\right)^{1+\alpha}.
 \end{aligned}$$

Используем теперь соотношение (2.1). Для достаточно большого $m \geq 2$ и некоторого достаточно большого $N \geq 1$ будем иметь

$$\begin{aligned}
 |\log \psi_{m,\alpha}(w)| &< c_\alpha r^{-1-\alpha} \sum_{\rho_k < r/m} \rho_k^{1+\alpha} = c_\alpha r^{-1-\alpha} \int_{r/m}^{+\infty} x^{1+\alpha} dn(x, \pi - \gamma) = \\
 &= c_\alpha r^{-1-\alpha} \left[\lim_{x \rightarrow +0} x^{1+\alpha} n(x, \pi - \gamma) - \left(\frac{r}{m}\right)^{1+\alpha} n\left(\frac{r}{m}, \pi - \gamma\right) + \right. \\
 &\quad \left. + (1+\alpha) \int_0^{r/m} x^\alpha n(x, \pi - \gamma) dx \right] \leq \\
 &\leq c_\alpha r^{-1-\alpha} [\Delta(\pi - \gamma) + N](1+\alpha) \int_0^{r/m} x^{\alpha-\rho} dx = \\
 &= c_\alpha [\Delta(\pi - \gamma) + N] \frac{1+\alpha}{1+\alpha-\rho} m^{-(1+\alpha-\rho)} r^{-\rho}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при достаточно большом $m \geq 2$ имеем

$$r^\rho |\log \psi_{m,\alpha}(w)| < \varepsilon.$$

Легко видеть, что соотношение (2.1) справедливо также для функции $n^t(x, \pi - \gamma + t)$, считающей точки последовательности $\{w'_k\}_1^\infty$ ($0 < t < \gamma/2$) (в данном случае просто $n^t(x, \pi - \gamma + t) = n(x, \pi - \gamma)$). С другой стороны, последняя оценка для $\log \psi_{m,\alpha}$ была получена без применения условия $|w - w_k| > \delta r$. Поэтому, обозначив

$$\psi_{m,\alpha}^t(w) = \prod_{\substack{|w - w_k| > \delta r \\ \rho_k < r/m}} a_\alpha(w, w'_k) \quad (-1 < \alpha < +\infty),$$

теми же выкладками установим, что при достаточно большом $m \geq 2$

$$r^\rho |\log \psi_{m,\alpha}^t(w)| < \varepsilon.$$

Ввиду обозначений (2.3), (2.7') и полученных оценок, при достаточно большом $m \geq 2$ имеем

$$r^p |\operatorname{Re} I_{\varepsilon}^{(2)}(\delta, r) - \operatorname{Re} I_{\varepsilon}^{(2)}(\delta, r, t)| \leq 2\varepsilon + \\ + r^p \sum_{\substack{|\omega - \omega_k| > \delta r \\ r_k > r/\varepsilon}} |\log |a_{\varepsilon}(\omega, \omega_k)| - \log |a_{\varepsilon}(\omega, \omega_k)||.$$

Отсюда в силу оценки (2.10) и соотношения (2.1) следует утверждение леммы.

2.4. Доказательство теоремы II. Заметим сначала, что поскольку

$$\lim_{r \rightarrow +0} r^p \log \left| \prod_{|\omega_k| > 1} a_{\varepsilon}(re^{-i\varphi}, \omega_k) \right| = 0 \quad (0 < \varphi < \pi),$$

то, не нарушая общности, можно считать, что $\max_k |\omega_k| < 1$. Далее условимся считать, что $\omega = re^{-i\varphi} \in C_R$, причем $0 < r < 1$ и $\varphi \in [\beta, \pi - \beta]$, для некоторого $\beta \in (0, \pi/2)$.

Пусть $\alpha (-1 < \alpha < +\infty)$ и $\varepsilon > 0$ любые. Согласно оценкам (2.4), (2.8) и (2.15), при достаточно малых фиксированных $\delta \in (0, 1/4)$, $t(\varepsilon, \delta) \in [0, \min\{\delta/2, \beta\})$ и любого $r \in (0, 1)$ будем иметь

$$r^p |\log |A_{\varepsilon}(re^{-i\varphi})| - \log |A_{\varepsilon}^t(re^{-i\varphi})|| < \varepsilon/3 \quad (0 < t < t(\varepsilon, \delta)), \quad (2.16)$$

если только $\inf |\varphi - \psi_k| \geq t/12$.

Предполагая теперь, что $t \in (0, t(\varepsilon, \delta))$, произведем разбиение отрезка $[0, \pi]$ точками $\{\vartheta_j\}_0^n$ ($0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_n = \pi$), так, чтобы $t/2 \leq \vartheta_j - \vartheta_{j-1} \leq t$ ($j = 1, 2, \dots, n$), и для любого ϑ_j ($1 \leq j \leq n$) соотношение (2.1) выполнялось. При этом, если $\{\omega_k\}_1^{\infty} \equiv \{\rho_k e^{-i\psi_k}\}_1^{\infty}$, то каждое ψ_k должно удовлетворять неравенствам $\vartheta_{j-1} < \psi_k \leq \vartheta_j$ для некоторого j ($1 \leq j \leq n$). В соответствии с этим обозначим $\omega_k = \rho_k e^{-i\vartheta_j}$ ($k \geq 1$). Легко видеть, что при выбранной таким образом последовательности $\{\omega_k\}_1^{\infty}$ оценка (2.16) будет оставаться в силе для тех $\varphi \in [\beta, \pi - \beta]$, для которых $\min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j| \geq t/12$. Причем, очевидно, что множество $\{\varphi: \min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j| \geq t/12\}$ перекрывает не менее чем двух третей отрезка $[0, \pi]$.

Введем теперь обозначения

$$G_j(re^{-i\varphi}) = \prod_{\substack{k=1 \\ \vartheta_{j-1} < \psi_k < \vartheta_j}} a_{\varepsilon}(re^{-i\varphi}, \rho_k e^{-i\vartheta_j}) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$S_n(\varphi) = \sum_{j=1}^n P_{n,j}(\varphi, \vartheta_j) [\Delta(\vartheta_j) - \Delta(\vartheta_{j-1})].$$

Заметим, что при этом

$$A_{\varepsilon}^t(re^{-i\varphi}) = \prod_{j=1}^n G_j(re^{-i\varphi}).$$

Применяя теорему I к каждой из функций $G_j(re^{-i\varphi})$ получим, что для любого φ такого, что $\min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j| \geq t/12$ и достаточно малого

$$r(\varepsilon, t) \in (0, 1)$$

$$|r^p \log A_a'(re^{-i\varphi}) - S_n(\varphi)| < \varepsilon/3 \quad (0 < r < r(\varepsilon, t)).$$

Отсюда и из (2.16) следует, что если φ принадлежит множеству $\{\varphi: \beta \leq \varphi \leq \pi - \beta, \min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j| \geq t/12\}$, то при любом $r \in (0, r(\varepsilon, t))$

$$|r^p \log |A_a(re^{-i\varphi})| - \operatorname{Re} S_n(\varphi)| < 2/3\varepsilon. \quad (2.17)$$

Произведем теперь аналогичное разбиение отрезка $[0, \pi]$ точками $\{\vartheta_j'\}_0^n$ ($0 = \vartheta_0' < \vartheta_1' < \dots < \vartheta_n' = \pi$) так, чтобы множества $\{\varphi: \min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j'| \geq t/12\}$ и $\{\varphi: \min_{0 < j < n} |\varphi - \vartheta_j| \geq t/12\}$ перекрывали отрезок $[\beta, \pi - \beta]$.

Такими же как выше рассуждениями мы придем к аналогичной (2.17) оценке. Однако можно убедиться в том, что интеграл в (2.2) сходится равномерно по $\varphi \in [0, \pi]$. Поэтому при достаточно малом $t'_* > 0$ и любом $t \in (0, t'_*)$ равномерно по $\varphi \in [0, \pi]$ выполняется неравенство

$$|S_n(\varphi) - \int_{\gamma-0}^{\pi-\gamma+0} P_a(\varphi, \psi) d\Delta(\psi)| < \varepsilon/3.$$

Следовательно, окончательно имеем

$$|r^p \log |A_a(re^{-i\varphi})| - \operatorname{Re} \int_{\gamma}^{\pi-\gamma+0} P_a(\varphi, \psi) d\Delta(\psi)| < \varepsilon \quad (0 < r < r)$$

каково бы ни было $\varphi \in [\beta, \pi - \beta]$. Отсюда, ввиду произвольности числа $\beta \in (0, \pi/2)$, следует утверждение теоремы.

Институт математики АН Армянской ССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 16.XI.1984

Ա. Մ. ԶԻՐԱՇԻԱՆ, Գ. Վ. ՄԻԿԱԵԼԻԱՆ. Կիսանցքային համար Բլաշկեյի տիպի առտադ-
այանների մի ընտանիքի արժեքային վարքը (ամփոփում)

Հոդվածում ուսումնասիրված է հեղինակների կողմից [2] ներմուծված Բլաշկեյի տիպի $A_a(w)$ ($-1 < a < +\infty$) առտադայանների արժեքային վարքը նրանց զրոների կամայական առանձնացված կուտակման կետերի մոտ, երբ այդ զրոները բաժարարում են խառնված հատուկ պայմանի:

$A_a w = z^{-1}$ ինվերսիայով հոդվածի արդյունքները փոխանցվում են Բ. Յա. Լեինի և Փիլուզների Վալերշտրասի առտադայանների վերաբերող հայտնի արդյունքի յուրօրինակ համանմանների:

A. M. JERBASHIAN (DZRBASHJAN), G. V. MIKAELIAN. *The asymptotic behaviour of a family of Blaschke-type products for the halfplane (summary)*

The paper investigates the asymptotic behaviour of Blaschke type product $A_a(w)$ ($-1 < a < +\infty$) near isolated condensation points of their zeros, satisfying a special density condition. The products in question were constructed previously by the authors [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. О росте целой функции по лучу и о распределении ее нулей по аргументам, Мат. сб., 2 (44), № 6, 1937, 1097—1142.
2. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
3. A. Pfluger. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen, I, II. Comm. math. Helv. v. 11, 1938, 180—213; v. 12, 1939, 25—69.
4. Н. В. Говоров. Об индикаторе функций нецелого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости, ДАН СССР, 162, № 3, 1965, 495—498.
5. Н. В. Говоров. Об индикаторе функций целого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости, ДАН СССР, 172, № 4, 1967, 763—766.
6. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян. Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XV, № 6, 1980, 461—474.
7. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм.ССР, 3, № 3, 1945, 3—9.
8. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Института математики и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
9. Р. С. Галоян. Об асимптотических свойствах функции $\pi_p(z, z_k)$, ДАН Арм.ССР, IX, № 2, 1974, 65—71.
10. А. М. Джрбашян. Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.
11. А. М. Джрбашян. Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVIII, № 6, 1983, 409—440.