ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա | XXI, № 2, 1986 | Математика

УДК 517.98

М. Г. КРЕЙН, Ф. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

МАТРИЧНО-КОНТИНУАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ЗАДАЧ ШУРА И КАРАТЕОДОРИ-ТЕПЛИЦА

§ 0. Введение

В настоящей статье приводятся решения матрично-континуальных аналогов задач Шура (задача (S)) и Каратеодори-Теплица (задача (С—Т)) и связанных с ними задач описания множества всех решений.

Эти задачи рассматривались уже в работе [1], где были намечены пути их решений на основании полученных там результатов.

Здесь мы будем придерживаться в основном обозначений работы [1]. В частности, через $L^p_{n\times m}(a, b)(1\leqslant p\leqslant\infty;\ -\infty\leqslant a<b\leqslant\infty)$, $H^\infty_{n\times m}$, $W_{n\times m}$, $W^{\pm}_{n\times m}$, где m и n — натуральные числа*, обозначаются классы $(n\times m)$-матриц-функций, элементы которых принадлежат $L^p_{(a,b)}$, H^∞, W, $W^\pm$ соответственно. H^∞ — банахова алгебра функций, голоморфных и ограниченных в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$, $W\ (W^\pm)$ — винеровская алгебра функций вида

$$c+\hat{f}(\lambda)=c+\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\ \ (c\in C;\ \lambda\in R),$$

где $f\in L^1(R)$ $(f\in L^1(R)$ и $\operatorname{supp} f\subset R_\pm)$.

Задача (S). *Задана матрица-функция (сокращенно м-функция)* $C_N\in L^1_{n\times m}(0, N)(0<N<\infty)$. *Требуется:*

1) *Найти условие существования нерастягивающей $(n\times m)$-матрицы-функции $E(z)(z\in C_+)$, голоморфной в C_+ и представимой в виде*

$$E(z)=\int\limits_0^N C_N(t)\,e^{izt}\,dt+e^{izN}\,\Phi(z)\,(z\in C_+;\ \Phi\in H^\infty_{n\times m}). \tag{0.1}$$

2) *Если множество* $\mathbf{E}(C_N)$ *всех м-функций* E, *указанного вида, непусто, то дать полное описание этого множества.*

Задача (С—Т). *Задана м-функция* $H_N\in L^1_{n\times n}(0, N)(0<N<\infty)$. *Требуется:*

1) *Найти условие существования $(n\times n)$-матрицы-функции $F(z)(z\in C_+)$, голоморфной в C_+ и удовлетворяющей условиям*

---

* Для определенности предполагается всегда $m<n$.

а) $$\operatorname{Re} F(z) > 0 \ \forall z \in C_+,$$

в) $$F(z) = I_n + 2\int_0^N C_N(t)\, e^{izt}\, dt + e^{izN}\psi(z)\ (z \in C_+), \qquad (0.2)$$

где $\psi(z)$ — голоморфная в C_+ м-функция, допускающая оценку

$$|\psi(z)| = O(z) \text{ при } |z| \to \infty \text{ и } \left|\frac{\pi}{2} - \arg z\right| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon\ (\varepsilon > 0). \qquad (0.3)$$

2) *Если множество $\Omega(H_N)$ всех м-функций F, указанного типа, непусто, то дать полное описание этого множества.*

Решение задачи (С—Т) в скалярном случае, но в более общей (индефинитной) постановке, было получено еще в [2]. Здесь решение этой задачи будет получено другим способом, а именно, сведением ее к задаче (S). В свою очередь, решение задачи (S) основано на решении следующей задачи.

Задача (А). *Задана м-функция $\Gamma \in L^1_{n\times m}(R_+)$. Требуется:*

1) *Найти условие существования нерастягивающей $(n\times m)$-матрицы-функции $S(\lambda)$ $(\lambda \in R)$, представимой в виде*

$$S(\lambda) = \int_0^\infty \Gamma(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt + \Phi(\lambda)\ (\lambda \in R;\ \Phi \in H^-_{n\times m}). \qquad (0.4)$$

2) *Если множество $\mathrm{S}(\Gamma)$ всех м-функций S, указанного типа, непусто, то дать полное описание этого множества.*

Перейдем к краткому изложению понятий и положений работы [1], где была полностью решена задача (А).

1. Пусть задана м-функция $\Gamma \in L^1_{n\times m}(R_+)$. Она порождает вполне непрерывный оператор $\Gamma: L^p_{m\times 1}(R_+) \to L^p_{n\times 1}(R_+)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ по формуле

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^\infty \Gamma(t+s) f(s)\, ds\ (f \in L^1_{m\times 1}(R_+);\ t \in R_+). \qquad (0.5)$$

0.1°. *Спектр $\sigma(\Gamma)$ оператора Γ не зависит от того, в каком из пространств $L^p_{m\times 1}(R_+)(1 < p \leqslant \infty)$ рассматривается этот оператор.*

От p не зависит также множество $\mathfrak{M}_\rho$ пар Шмидта $[\xi, \eta]$ оператора Γ, соответствующее ненулевому s-числу ρ:

$$\mathfrak{M}_\rho \subset \bigcap_p L^p_{(m+n)\times 1}(R_+),$$

$$\mathfrak{M}_\rho := \{[\xi, \eta];\ \xi \in L^p_{m\times 1}(R_+),\ \eta \in L^p_{n\times 1}(R_+) | \Gamma\xi = \rho\eta;\ \Gamma^*\eta = \rho\xi;\ \rho \in \sigma(\Gamma)\}. \quad (0.6)$$

Более того, $\mathfrak{M}_\rho \subset AC_{(m+n)\times 1}(R_+)$ (пространству абсолютно непрерывных на R_+ $(m+n)$-мерных вектор-функций).

0.2°. *Для того, чтобы класс $S(\Gamma)$ был бы непуст, необходимо и достаточно, чтобы $\|\Gamma\|_2 \leqslant 1$*.*

---

* Через $\|\Gamma\|_2$ обозначается норма оператора $\Gamma: L^2_{m\times 1}(R_+) \to L^2_{n\times 1}(R_+)$.

Необходимость условия $\|\Gamma\|_2 \leqslant 1$ доказывается просто. Рассмотрим для этого $S(\lambda)\hat{f}(\lambda)$, где $S \in S(\Gamma)$, а

$$\hat{f}(\lambda)=\int_0^\infty f(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\,(f\in L^1_{m\times 1}(R_+)\cap L^2_{m\times 1}(R_+)).$$

Легко проверить, что

$$S(\lambda)\,\hat{f}(\lambda)=\int_0^\infty (\Gamma f)(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt+\hat{\Psi}(\lambda),$$

где $\hat{\Psi}\in H^2_{n\times 1}$. Отсюда

$$\|f\|^2=\|\hat{f}\|^2\geqslant\|S\hat{f}\|^2=\|\widehat{\Gamma f}\|^2+\|\hat{\Psi}\|^2\geqslant\|\widehat{\Gamma f}\|^2=\|\Gamma f\|^2.$$

Это неравенство и доказывает условие $\|\Gamma\|_2 \leqslant 1$, поскольку множество $L^1_{m\times 1}(R_+)\cap L^2_{m\times 1}(R_+)$ плотно в $L^2_{m\times 1}(R_+)$.

Достаточность получается в процессе описания множества $S(\Gamma)$ при условии $\|\Gamma\|_2 \leqslant 1$.

Предположим $\|\Gamma\|_2<1$. Тогда будет существовать в классе $L^1_{(m+n)\times(m+n)}(R_+)$ решение $g(t)=\|g_{jk}(t)\|^2_{j,k=1}$ $(t\in R_+)$ уравнения

$$\begin{vmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t)\end{vmatrix}-\int_0^\infty\begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*(t+s) \\ \Gamma(t+s) & 0\end{bmatrix}\begin{vmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s)\end{vmatrix}ds=\begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*(t) \\ \Gamma(t) & 0\end{bmatrix}. \tag{0.7}$$

Положим

$$J=\begin{bmatrix} iI_m & 0 \\ 0 & -iI_n\end{bmatrix}\ (I_n - \text{единичная } (n\times n)\text{-матрица})$$

и введем м-функцию $G(\lambda)=\|G_{jk}(\lambda)\|^2_{j,k=1}$ $(\lambda\in R)$:

$$G(\lambda):=I_{m+n}+\int_0^\infty \exp(\lambda tJ)\,g(t)\,dt\left(\exp(\lambda tJ)=\begin{bmatrix} e^{i\lambda t}I_m & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda t}I_n\end{bmatrix}\right).$$

Оказывается. м-функция G J-унитарна: $G^*(\lambda)\,JG(\lambda)=G(\lambda)\,JG^*(\lambda)=J$.

Теорема 0.1. *Пусть задана $\Gamma\in L^1_{n\times m}(R_+)$ и $\|\Gamma\|<1$. Тогда полное описание класса $S(\Gamma)$ дается формулой**

$$S_B(\lambda)=(G_{21}(\lambda)+G_{22}(\lambda)\,B(\lambda))(G_{11}(\lambda)+G_{12}(\lambda)\,B(\lambda))^{-1}\ (\lambda\in R), \tag{0.8}$$

когда B пробегает множество $B_{n\times m}$ нерастягивающих $(n\times m)$-матриц-функций из класса $H^-_{n\times m}$.

При этом, в том и только в том случае, когда $B\in B_{n\times m}\cap W^+_{n\times m}$, м-функция $S\in S(\Gamma)\cap W_{n\times m}$, т. е.

* Дробно-линейное преобразование (0.8) при $B\in B_{n\times m}$ существует в силу J-унитарности матрицы $G(\lambda)$ (см. [3]).

$$S_B(\lambda) = S(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Gamma}(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \quad (\widetilde{\Gamma} \in L^1_{n\times m}(R)), \tag{0.9}$$

где $\widetilde{\Gamma}\,|R_+ = \Gamma$, *а* $S(\infty) = B(\infty)$.

2. Пусть теперь $\|\Gamma\| = 1$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_\rho$ при $\rho = 1$) пар Шмидта оператора Γ, отвечающее s-числу $\rho = 1$. Множество $\mathfrak{M}$ можно определить еще как собственное подпространство оператора Γ_Δ, отвечающее собственному значению 1: $\mathfrak{M} = \{\chi \in L^1_{(m+n)\times 1}(R_+) \,|\times \times\, |\Gamma_\Delta \chi = \chi\}$, если полагать

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} := [\xi(t), \eta(t)]^\tau \ \text{ и } \ (\Gamma_\Delta \chi)(t) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*(t+s) \\ \Gamma(t+s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{bmatrix} ds.$$

Введем также линеал $\mathfrak{M}(0) := \{\chi(0) | \chi \in \mathfrak{M}\} \subset C^{m+n}$.

0.3°. *Линеал* $\mathfrak{M}(0)$ *является J-нейтральным подпространством в* C^{m+n}.

Это означает, что существует частично изометрический оператор K: $C^m \to C^n$, называемый угловым оператором подпространства $\mathfrak{M}(0)$ такой, что $\eta(0) = K\xi(0) \forall [\xi, \eta] \in \mathfrak{M}$.

Отсюда, в частности, следует, что $\dim \mathfrak{M}(0) \leqslant n$.

Определение 0.1. Упорядоченная система $\{\chi^{[1]}, \chi^{[2]}, \cdots, \chi^{[l]}\}$ элементов из $\mathfrak{M}$ называется *D-цепочкой* и обозначается $D(\chi^{[1]}, l)$, если

$$\chi^{[1]}(0) \neq 0; \quad \chi^{[k]}(t) = -J \int_0^t \chi^{[k-1]}(s)\, ds \quad (k = \overline{2, l}).$$

Элемент $\chi^{[1]}$ называется *базовым* элементом D-цепочки $D(\chi^{[1]}, l)$, а l — ее *длиной*.

D-цепочка $(D(\chi; l)$ называется *максимальной*, если в $\mathfrak{M}$ нет D-цепочки большей длины, у которой значение в нуле базового элемента равно $\chi(0)$.

Приведенное определение несколько отлично от общепринятого определения D-цепочки $\{\chi^{[1]}, \chi^{[2]}, \cdots, \chi^{[l]}\}$:

$$\chi^{[1]}(0) \neq 0; \quad \chi^{[k]}(t) = \int_0^t \chi^{[k-1]}(s)\, ds \quad (k = \overline{2, l})$$

и обусловлено тем, что если $\chi \in \mathfrak{M}$, то $J\chi' \in \mathfrak{M}$ в том и только в том случае, когда $\chi(0) = 0$.

0.4°. *Существует система максимальных D-цепочек* $D(\chi_k^{[1]}; l_k)$ $(k = \overline{1, r})$ *такая, что система* $\{\chi_k^{[1]}(0)\}_{k=1}^r$ *образует базис в* $\mathfrak{M}(0)$, *а* $\{\chi_k^{[1]}, \chi_k^{[2]}, \cdots, \chi_k^{[l_k]}\}_{k=1}^r$ *образует базис в* $\mathfrak{M}$ $(r = \dim \mathfrak{M}(0);\ \sum_{k=1}^r l_k = \dim \mathfrak{M})$.

0.5°. *Пусть* $\|\Gamma\|_2 = 1$. *Тогда для любого* $\chi = [\xi, \eta]^\tau \in \mathfrak{M}$ *выполняются тождества*

1) $F_+^*(\xi;\lambda)\,F_+(\xi;\lambda)=F_-^*(\eta;\lambda)\,F_-(\eta;\lambda)$;

2) $S(\lambda)\,F_+(\xi;\lambda)=F_-(\eta;\lambda)\ (\lambda\in R)$, (0.10)

где S произвольный элемент класса $S(\Gamma)$.

Имея систему $D(\chi_k^{[1]};l_k)\ (k=\overline{1,r})$ базисных D-цепочек, образуем $(m\times r)$- и $(n\times r)$-матрицы-функции

$\Xi:=[\xi_1(t),\xi_2(t)\cdots\xi_r(t)]$; $H:=[\eta_1(t),\eta_2(t)\cdots\eta_r(t)]$ $([\xi_k,\eta_k]^\tau=\chi_k^{[1]})$

и $(r\times r)$-диагональные м-функции

$$D_\pm(\lambda)=\left\|\left(\frac{\lambda\pm i}{\lambda}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{jk=1}^r,$$

где $l_k\ (k=\overline{1,r})$ равны длинам D-цепочек $D(\chi_k^{[1]};l_k)$,

Для м-функций Ξ и H из тождеств (0.10) получаем

1) $F_+^*(\Xi;\lambda)\,F_+(\Xi;\lambda)=F_-^*(H;\lambda)\,F_-(H;\lambda)$;

2) $S(\lambda)\,F_+(\Xi;\lambda)\neq F_-(H;\lambda)\ (\lambda\in R)$. (0.11)

Вместе с $F_+(\Xi;\lambda)$ и $F_-(H;\lambda)$ $(\lambda\in R)$ рассмотрим „нормализованные" преобразования:

$$F\cdot н_+(\Xi;\lambda):=\lambda F_1(\Xi;\lambda)\,D_+(\lambda)=\lambda\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda}\right)^{l_k}F_+(\xi_k;\lambda)\right\|_{k=1}^r,$$

$$F\cdot н_-(\Xi;\lambda):=\lambda F_-(H;\lambda)\,D_-(\lambda)=\lambda\left\|\left(\frac{\lambda-i}{\lambda}\right)^{l_k}F_-(\eta_k;\lambda)\right\|_{k=1}^r.$$

0.6°. М-функции $F\cdot н_+(\Xi;\lambda)$ и $F\cdot н_-(H;\lambda)$ имеют полный ранг $r\ (=\dim\mathfrak{M}(0))$ для любого $\lambda\in\overline{C}_+\cup\{\infty\}$ и $\lambda\in\overline{C}_-\cup\{\infty\}$, соответственно.

Отметим, что

$$\operatorname{rang}F\cdot н_+(\Xi;\lambda)=\operatorname{rang}F_+(\Xi;\lambda)\quad\forall\lambda\in\overline{C}_+\setminus\{0\},$$

$$\operatorname{rang}F\cdot н_-(H;\lambda)=\operatorname{rang}F_-(H;\lambda)\quad\forall\lambda\in\overline{C}_-\setminus\{0\}.$$

Теорема 0.2. *Пусть задана $\Gamma\in L^1_{\kappa\times m}(R_+)$ такая, что $\|\Gamma\|_2=1$ и $\dim\mathfrak{M}(0)=m$ (определенный случай). Тогда класс $S(\Gamma)$ состоит из единственного элемента $S(\lambda)(\lambda\in R)$, который определяется по формуле*

$$S(\lambda)=F\cdot н_-(H;\lambda)\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda i}\right)^{l_k}g_k\right\|_{jk=1}^m(F\cdot н_+(\Xi;\lambda))^{-1}\ (\lambda\in R)\qquad(0.12)$$

и является изометрической м-функцией.

Более того, S допускает представление (0.9), *где* $\widetilde{\Gamma}\,|R_+=\Gamma$, *а* $S(\infty)=-K$ (K — *угловой оператор линеала* $\mathfrak{M}(0)$).

В пояснение теоремы 0.2 отметим, что единственность и изометричность м-функции S суть непосредственные следствия тождеств (0.11), а возможность представления ее в виде (0.9) следует из того, что, в силу 0.6°, множители в (0.12) принадлежат, соответственно. $W^-_{\kappa\times r}$, $W_{r\times r}$ $W^+_{r\times m}$.

В частности, при $\|\Gamma\|_2=1$ и $m=1$ всегда имеет место определенный случай. В этом случае система базисных D-цепочек состоит из одной, произвольно выбранной, максимальной D-цепочки $D(\chi^{[1]}; l)$. Поэтому полагая $\chi^{[1]}(t)=[\xi(t); \eta_1(t), \eta_2(t), \cdots, \eta_n(t)]^\tau$, для м-функции S получаем выражение

$$S(\lambda)=\left[\frac{F_-(\eta_1; \lambda)}{F_+(\xi; \lambda)}, \frac{F_-(\eta_2; \lambda)}{F_+(\xi; \lambda)}, \cdots, \frac{F_-(\eta_n; \lambda)}{F_+(\xi; \lambda)}\right]^\tau (\lambda \in R).$$

3. Перейдем к рассмотрению случая $\|\Gamma\|_2=1$ и $\dim \mathfrak{M}(0)<m$.

0.7°. *Пусть* $\|\Gamma\|_2=1$. *Уравнение*

$$\chi^{[0]}(t)-\int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\chi^{[0]}(s)\,ds=\Gamma_\Delta(t)\,a \quad (a \in C^{m+n}) \tag{0.13}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда $a \perp \mathfrak{M}(0)$.

При этом, если $a \in J\mathfrak{M}(0)$, *то вектор-функция*

$$\chi^{[1]}(t)=Ja-J\int_0^t \chi^{[0]}(s)\,ds$$

принадлежит $\mathfrak{M}$ *и, следовательно, является базовым элементом некоторой* D*-цепочки. Обратно, если* $\chi^{[1]}(t)$ — *базовый элемент некоторой* D*-цепочки, то вектор-функция* $\chi^{[0]}(t)=J\frac{d}{dt}\chi^{[1]}(t)$ *удовлетворяет уравнению* (0.13) *при* $a=J\chi^{[1]}(0)$.

В силу 0.7° можно утверждать, что если Q есть ортопроектор на подпространство $C^{m+n}\ominus\mathfrak{M}(0)$, то уравнение

$$\begin{bmatrix}\hat{g}_{11}(t) & \hat{g}_{12}(t)\\ \hat{g}_{21}(t) & \hat{g}_{22}(t)\end{bmatrix}-\int_0^\infty\begin{bmatrix}0 & \Gamma^*(t+s)\\ \Gamma(t+s) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{g}_{11}(s) & \hat{g}_{12}(s)\\ \hat{g}_{21}(s) & \hat{g}_{22}(s)\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}0 & \Gamma^*(t)\\ \Gamma(t) & 0\end{bmatrix}Q \tag{0.14}$$

имеет решение $\hat{g}(t)=\|g_{jk}(t)\|_{j,k=1}^2$, принадлежащее множеству $L^1_{(m+n)\times(m+n)}(R_+)$.

Описание класса $S(\Gamma)$ в рассматриваемом случае дается с помощью специального решения уравнения (0.14).

Для выделения этого решения представим проектор Q в виде суммы $Q=Q_1+Q_2$ двух взаимно ортогональных проекторов, из которых Q_1 проектирует C^{m+n} на $J\mathfrak{M}(0)$.

С помощью частично изометрического углового оператора K подпространства $\mathfrak{M}(0)$, рассматриваемые проекторы можно представить в виде

$$Q_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}P_m & -K^*\\ -K & P_n\end{bmatrix}; \quad Q_2=\begin{bmatrix}I_m-P_m & 0\\ 0 & I_n-P_n\end{bmatrix}, \quad Q=\begin{bmatrix}I_m & 0\\ 0 & I_n\end{bmatrix}-$$
$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}P_m & K^*\\ K & P_n\end{bmatrix}, \tag{0.15}$$

где $P_m:=K^*K$, $P_n:=KK^*$ суть ортопроекторы, проектирующие C^m на $R(K^*)$ и C^n на $R(K)$, соответственно.

Выберем теперь решение $\hat{g}$ уравнения (0.14) в виде $\hat{g}=\hat{g}_1+\hat{g}_2$ где $\hat{g}_2$ есть произвольно фиксированное решение уравнения

$$\hat{g}_2(t) - \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\,\hat{g}_2(s)\,ds = \Gamma_\Delta^*(t)\cdot Q_2,$$

удовлетворяющее условию $\hat{g}_2(t)\ Q_2 \equiv \hat{g}_2(t)(t \in R_+)$, а $\hat{g}^{[1]}(t) := JX'(t)$, где $X(t)$— м-функция, вектор-столбцы которой суть базовые элементы максимальных D-цепочек таких, что $X(0) = J\,Q_1$. Ясно, что $\hat{g}_1$ является решением уравнения

$$\hat{g}_1(t) - \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s)\,\hat{g}_1(s)\,ds = \Gamma_\Delta(t)\,Q_1$$

и удовлетворяет условию $\hat{g}_1(t) \equiv \hat{g}_1(t)\,Q_1\,(t \in R_+)$.

С помощью указанного решения $g(t)$ уравнения (0.14) введем м-функцию $\hat{G}(\lambda) = \|G_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^{2}\ (\lambda \in R)$ по формуле

$$\hat{G}(\lambda) = Q + \int_0^\infty \exp(\lambda t J)\,\hat{g}(t)\,dt.$$

Через $\mathbf{B}_{n\times m}(K)(\subset \mathbf{B}_{n\times m})$ обозначим множество нерастягивающих м-функций $B \in B_{n\times m}$, представимых в виде

$$B(\lambda) = -K \oplus \hat{B}(\lambda), \text{ где } \hat{B}(\lambda): C^m \ominus R(K^*) \to C^n \ominus R(K).$$

0.8°. *Пусть* $D_\pm(\lambda) = \left\|\left(\frac{\lambda \pm i}{\lambda}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^{m}$ — *диагональная м-функция, где* l_k — *длины максимальных* D-*цепочек, образованных первыми* m *столбцами м-функции* $X(t)$ (*при* $X_k(t) \equiv 0$ *полагаем* $l_k = 0$). *Тогда для произвольного* $B \in \mathbf{B}_{n\times m}(K)$ *отображение* $(\hat{G}_{11}(\lambda) + \hat{G}_{12}(\lambda)\,B(\lambda))\,D_+(\lambda): C^m \to C^n$ *обратимо* $\forall \lambda \in C_+ \cup \{\infty\}$.

Теорема 0.3. *Пусть задана* $\Gamma \in L^1_{n\times m}(R_+)$ *такая, что* $\|\Gamma\| = 1$ *и* $\dim \mathfrak{M}(0) < m$. *Тогда полное описание класса* $S(\Gamma)$ *дается формулой*

$$S_B(\lambda) = [(\hat{G}_{21}(\lambda) + \hat{G}_{22}(\lambda)\,B(\lambda))\,D_-(\lambda)]\left\|\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^{m} \times$$
$$\times [(\hat{G}_{11}(\lambda) + \hat{G}_{12}(\lambda)\,B(\lambda))\,D_+(\lambda)]^{-1}, \qquad (0.16)$$

когда B *пробегает все множество* $\mathbf{B}_{n\times m}(K)$.

При этом, в том и только в том случае, когда $B \in \mathbf{B}_{n\times m}(K) \cap W^+_{n\times m}$, *м-функция* $S_B \in S(\Gamma) \cap W_{n\times m}$, *т. е. представима в виде* (0.9), *где* $\hat{\Gamma}|R_+ = \Gamma$, *а* $S(\infty) = -K \oplus \hat{B}(\infty)$.

В заключение отметим, что рассмотрение этого пункта остается в силе и в определенном случае ($\dim \mathfrak{M}(0) = m$). В этом случае класс $\mathbf{B}_{n\times m}(K)$ состоит из одного элемента, равного $-K$ ($\mathbf{B}_{n\times m}(K) = \{-K\}$) и формула (0.15) сводится к (0.12).

§ 1. Решение задачи (S)

1. Пусть задана м-функция $C_N \in L^1_{n\times m}(0, N)$ $(0 < N < \infty)$. Она определяет м-функцию $\Gamma_N \in L^1_{n\times m}(R_+)$ по формуле

$$\Gamma_N(t) = \begin{cases} C_N(N-t), & \text{при } 0 < t < N \\ 0, & \text{при } N < t < \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Решение задачи (S), состоящее в описании класса $\mathbf{E}(C_N)$ будет получено здесь с помощью соответствия, устанавливаемого между классами $S(\Gamma_N)$ и $\mathbf{E}(C_N)$.

М-функция C_N порождает вольтерров оператор $\mathbf{C}_N : L^2_{m\times 1}(0, N) \to \to L^2_{n\times 1}(0, N)$ по формуле

$$(\mathbf{C}_N f)(t) = \int_0^t C_N(t-s) f(s)\, ds \quad (f \in L^2_{m\times 1}(0, N);\ f \in (0N)). \tag{1.2}$$

Норма $\|\mathbf{C}_N\|_2$ этого оператора удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{C}_N\|_2 \leqslant \int_0^N |C_N(t)|\, dt. \tag{1.3}$$

Для доказательства (1.3) введем вектор-функцию $f_s(\cdot)(s \in (0, N))$ со значениями из $L^2_{m\times 1}(0, N)$, порождаемую с помощью функции $f \in L^2_{m\times 1}(0, N)$ равенством

$$f_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < s \\ f(t-s) & \text{при } s < t < N. \end{cases}$$

Очевидно $\|f_s(\cdot)\| \leqslant \|f\|$ $\forall s \in (0N)$. Теперь оператор $\mathbf{C}_N$ можно представить в виде

$$(\mathbf{C}_N f)(t) = \int_0^N C_N(s) f_s(t)\, ds.$$

Отсюда следует неравенство

$$\|\mathbf{C}_N f\| \leqslant \int_0^N |C_N(s)| \|f_s(\cdot)\|\, ds \leqslant \int_0^N |C_N(s)|\, ds \|f\| \quad \forall f \in L^2_{m\times 1}(0, N),$$

которое и доказывает оценку (1.3).

С другой стороны, м-функция $\Gamma_N(t)$ порождает ганкелев оператор $\mathbf{\Gamma}: L^2_{m\times 1}(R_+) \to L^2_{n\times 1}(R_+)$ по формуле (0.4). Легко видеть, что оператор $\mathbf{\Gamma}$ в разложении $L^2_{m\times 1}(R_+) = L^2_{m\times 1}(0, N) \oplus L^2_{m\times 1}(N, \infty)$ имеет вид $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_N \oplus 0$, где $\mathbf{\Gamma}_N : L^2_{m\times 1}(0, N) \to L^2_{n\times 1}(0, N)$ определяется формулой

$$(\mathbf{\Gamma}_N f)(t) = \int_0^{N-t} \Gamma_N(t+s) f(s)\, ds \quad (f \in L^2_{m\times 1}(0, N);\ t \in (0, N)). \tag{1.4}$$

Операторы Γ_N и C_N связаны соотношением

$$\Gamma_N = U_N C_N, \tag{1.5}$$

где U_N — оператор „зеркального отражения" в $L^2_{n\times 1}(0, N)$:

$$(U_N g)(t) = g(N-t)\ (g\in L^2_{n\times 1}(0, N));\ U^*_N = U_N,\ U^2_N = I.$$

Отсюда, в частности, следует равенство

$$\|C_N\|_2 = \|\Gamma_N\|_2. \tag{1.6}$$

1.1° *Пусть м-функции* Γ_N *и* C_N, *принадлежащие* $L^1_{n\times m}(0, N)$ $(0<N<\infty)$, *связаны соотношением* (1.1). *Тогда формулой*

$$E(\lambda) = e^{i\lambda N} S(\lambda)\ (\lambda\in R) \tag{1.7}$$

устанавливается одно-однозначное соответствие между классами $S(\Gamma_N)$ *и* $E(C_N)$.

При этом образ подмножества $S(\Gamma_N)\cap W_{n\times m}$ *есть множество элементов вида*

$$E(\lambda) = e^{i\lambda N} S(\infty) + \int_0^\infty C_\infty(t) e^{i\lambda t}\, dt\ (C_\infty\in L^1_{n\times m}(\mathbf{R}_+)), \tag{1.8}$$

где $C_\infty|(0, N) = C_N$.

Это утверждение получается непосредственно из определений классов $S(\Gamma_N)$ и $E(C_N)$ и соотношения (1.1).

Отсюда, на основании утверждения 0.1° и равенства (1.6), получаем

1.2°. *Для того, чтобы класс* $E(C_N)$ *был бы непуст, необходимо и достаточно, чтобы* $\|C_N\|_2\leqslant 1$.

2. Пусть $\|C_N\|_2 < 1$. Дадим описание класса $E(C_N)$ в этом случае.

Уравнение (0.7), в силу соотношений $U_N\Gamma_N = C_N$ и $U_N\Gamma_N(t) = C_N(t)$, можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} I & -C^*_N \\ -C_N & I\end{bmatrix} p(t) = \begin{bmatrix} 0 & C^*_N(N-t) \\ C_N(t) & 0\end{bmatrix},\ \text{где}\ p(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t)\end{bmatrix} := $$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t)\end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

Отсюда для м-функции $p(t)$ получаем выражение

$$p(t) = \begin{bmatrix} (I-C^*_N C_N)^{-1} & (I-C^*_N C_N)^{-1} C^*_N \\ (I-C_N C^*_N)^{-1} C_N & (I-C_N C^*_N)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & C^*_N(N-t) \\ C_N(t) & 0\end{bmatrix}$$

(операторы $(I-C^*_N C_N)^{-1}$ и $(I-C_N C^*_N)^{-1}$ существуют в силу условия $\|C_N\|<1$).

Введем м-функцию $P(z)(z\in\overline{C}_+)$ по формуле

$$P(z) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & e^{izN} I_N\end{bmatrix} + \int_0^N p(t) e^{izt}\, dt\ \ (z\in\overline{C}_+). \tag{1.10}$$

Легко проверить, что на оси R м-функция $P(\lambda)$ ($\lambda \in R$) удовлетворяет соотношению

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & e^{i\lambda N} I_N \end{bmatrix} G(\lambda), \tag{1.11}$$

где $G(\lambda)$—матрица дробно-линейного преобразования (0.8), дающего описание класса $\mathbf{S}(\Gamma_\Lambda)$. Отсюда, в частности, следует J-унитарность $P(\lambda)$ при $\lambda \in R$: $P^*(\lambda) JP(\lambda) = P(\lambda) JP^*(\lambda) = J$.

Теорема 1.1. *Пусть задана* $C_N \in L^1_{n\times m}(0, N)$ $(0 < N < \infty)$ *и* $\|\mathbf{C}_N\| < 1$. *Тогда полное описание класса* $\mathbf{E}(C_N)$ *дается формулой*

$$E(z) = (P_{21}(z) + P_{22}(z) B(z))(P_{11}(z) + P_{12}(z) B(z))^{-1} \quad (z \in C_+), \tag{1.12}$$

когда B *пробегает множество* $\mathbf{B}_{n\times m}$.

При этом в том и только в том случае, когда $B \in \mathbf{B}_{n\times m} \cap W^+_{n\times m}$, *м-функция* $E(z)$ *представляется в виде* (1.8), *где* $C_*|(0, N) = C_N$, *а* $S(\infty) = B(\infty)$.

Доказательство. В силу соотношения (1.11) дробно-линейное преобразование (1.12) отличается от (0.8) множителем e^{izN}. Это на основании 1.1° и доказывает теорему. □

Замечание 1.1. Установленное в теореме 1.1 соответствие сохраняет определенные аналитические свойства соответствующих элементов. Так, например, имеем

1) $$\mathring{\mathbf{B}}_{n\times m} := \{B \in \mathbf{B}_{n\times m} | \sup_{z\in C_+} |B(z)| < 1\} \Longleftrightarrow \mathring{\mathbf{E}}(C_N) := \\ = \{E \in \mathbf{E}(C_N) \,|\, \sup_{z\in C_+} |E(z)| < 1\}.$$

2) $\mathbf{B}_{n\times m} \cap \mathring{W}^+_{n\times m} \Longleftrightarrow \mathbf{E}(C_N) \cap \mathring{W}^+_{n\times m}$ $(\mathring{W}^+_{n\times m} := \{f \in W^+_{n\times m} | f(\infty) = 0\}$.

3) $\mathbf{B}_{n\times m} \cap V^{ad}_{n\times m} \Longleftrightarrow \mathbf{E}(C_N) \cap V^{ad}_{n\times m}$ ($V^{ad}_{n\times m}$ есть множество всех $(n\times m)$-матриц-функций $M(z)$ вида

$$M(z) = \int_0^\infty e^{izt}\, d\Sigma(t),$$

где Σ-комплексная $(n\times m)$-матричная мера ограниченной вариации, у которой отсутствует сингулярная часть).

Соответствие 1) выполняется в силу того, что всякое дробно-линейное преобразование, ассоциированное с J-унитарной матрицей, отображает открытый (замкнутый) шар на себя.

Соответствие 2) (3)) выполняется, поскольку при $B \in \mathring{W}^+_{n\times m}$ ($B \in$ $\in V^{ad}_{n\times m}$ первый и второй множители в (1.12), в силу теоремы Винера, принадлежат соответствующим винеровским классам.

3. Рассмотрим теперь случай $\|\mathbf{C}_N\| = 1$. Из соотношения (1.5) вытекает, что в этом случае для оператора $\mathbf{C}_N$ справедлив аналог утверждения 0.1°.

Через $\mathfrak{M}_C$ обозначим множество пар Шмидта оператора $\mathbf{C}_N$, соответствующих наибольшему s-числу $\rho=1$:

$$\mathfrak{M}_C=\left\{\left\| \begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix} \right\| \in L^2_{(m+n)\times 1}(0, N)\left|\left[\begin{matrix}0 & \mathbf{C}^*_N\\ \mathbf{C}_N & 0\end{matrix}\right]\right\| \begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}\right]\right\}.$$

Легко видеть, в силу (1.5), что между множествами $\mathfrak{M}_C$ и $\mathfrak{M}_\Gamma$ ($\mathfrak{M}_\Gamma :=\mathfrak{M}$ — множество пар Шмидта оператора Γ_N) существует одно-однозначное соответствие, задаваемое равенством

$$[\xi, \eta]^\tau = [\varphi, \mathbf{U}_N\psi]^\tau \ ([\xi, \eta]^\tau \in \mathfrak{M}_\Gamma;\ [\varphi, \psi]^\tau \in \mathfrak{M}_C).$$

Это дает возможность перенести все понятия и положения о парах Шмидта оператора Γ_N на случай оператора $\mathbf{C}_N$.

Легко проверить, что $[\varphi, \psi]^\tau \in \mathfrak{M}_C$ влечет $[\varphi', \psi']^\tau \in \mathfrak{M}_C$ тогда и только тогда, когда $\varphi(0)=0$ и $\psi(N)=0$ (если $[\varphi, \psi]^\tau \in \mathfrak{M}$, то всегда $\varphi(N)=0$ и $\psi(0)=0$).

Введем $\mathfrak{M}_C(0)$ $(=\mathfrak{M}_\Gamma(0))$: $=\{[\varphi(0), \psi(N)]^\tau | [\varphi, \psi]^\tau \in \mathfrak{M}_C\} \subset C^{m+n}$. Ясно, что $\mathfrak{M}_C(0)$ является J-нейтральным подпространством в C^{m+n} и, следовательно, $\psi(N)=K\varphi(0)$ $\forall [\varphi, \psi]^\tau \in \mathfrak{M}_C$, где K — частично изометрический угловой оператор подпространства $\mathfrak{M}_C$.

Далее, образ D-цепочки из $\mathfrak{M}_\Gamma$ назовем D-цепочкой в $\mathfrak{M}_C$ или, что то же самое, примем

Определение 1.1. Упорядоченная система $\{[\varphi^{[k]}, \psi^{[k]}]^\tau\}_{k=1}^{l}$ элементов из $\mathfrak{M}_C$ называется *D-цепочкой* и обозначается $D([\varphi^{[1]}, \psi^{[1]}]^\tau; l)$, если

1) $\qquad \varphi^{[1]}(0)\neq 0$ и, следовательно, $\psi^{[1]}(N)\neq 0$.

2) $$\varphi^{[k]}(t)=\int_0^t \varphi^{[k-1]}(s)\,ds \text{ и } \psi^{[k]}(t)=-\int_0^t \psi^{[k-1]}(s)\,ds\times$$

$$\times\left(=\int_t^N \psi^{[k-1]}(s)\,ds\right)\ (k=\overline{2, l}).$$

Элемент $[\varphi^{[1]}, \psi^{[1]}]^\tau$ называется *базовым* элементом D-цепочки, а l — ее *длиной*.

Из утверждений 0.4° и 0.5° непосредственно получаем

1.3°. *Существует система максимальных D-цепочек $D([\varphi_k^{[1]}, \psi_k^{[1]}]^\tau, l_k)$ $(k=\overline{1, r})$ такая, что система $\{[\varphi_k^{[1]}(0), \psi_k^{[1]}(N)]^\tau\}_{k=1}^{r}$ образует базис в $\mathfrak{M}_C(0)$ $(\dim \mathfrak{M}_C(0)=r)$, а система $\{[\varphi_k^{[j]}, \psi_k^{[j]}]^\tau\}_{j=1, k=1}^{l_k\ r}$ образует базис в $\mathfrak{M}_C\left(\dim \mathfrak{M}_C=\sum\limits_{k=1}^{r} l_k\right)$.*

1.4°. *Пусть $\|\mathbf{C}_N\|=1$ и $E\in \mathbf{E}(C_N)$. Тогда $\forall [\varphi, \psi]^\tau \in \mathfrak{M}_C$ выполняются тождества*

$$1)\ F_+^*(\varphi;\lambda)F_+(\varphi;\lambda)=F_+^*(\psi;\lambda)F_+(\psi;\lambda);\ \ 2)\ E(\lambda)F_+(\varphi;\lambda)=$$
$$=F_+(\psi;\lambda)\ (\lambda\in R),$$

а, следовательно, и тождества

$$1)\ F_+^*(\varphi;\bar z)\,F_+(\varphi;z)=F_+^*(\psi;\bar z)\,F_+(\psi;z);\ 2)\ E(z)F_+(\varphi;z)=$$
$$=F_+(\psi;z)\ (z\in C). \tag{1.13}$$

С помощью системы базисных D-цепочек $D([\varphi_k^{[1]},\psi_k^{[1]}]^\tau, l_k)$ $(k=\overline{1,r})$ (см. 0.4°) образуем $(m\times r)$- и $(n\times r)$-матрицы-функции

$$\Phi(t)=[\varphi_1^{[1]}(t),\varphi_2^{[1]}(t),\cdots,\varphi_r^{[1]}(t)];\ \Psi(t)=[\psi_1^{[1]}(t),\psi_2^{[1]}(t),\cdots,\psi_r^{[1]}(t)] \tag{1.14}$$

и диагональные $(r\times r)$-матрицы-функции $D_\pm(z)=\left\|\left(\frac{z\pm i}{z}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^r$.

Рассмотрим «нормализованные» преобразования

$$F\cdot н_+(\Phi;z)=z\,F_+(\Phi;z)\,D_+(z);\ F\cdot н_-(\psi;z)=z\,F_+(\psi;z)\,D_-(z)\ (z\in C).$$

1.5°. *м-функции* $F\cdot н_+(\Phi;z)$ *и* $F\cdot н_-(\psi;z)$ *имеют полный ранг* $r\ (=\dim\mathfrak{M}_C(0))$ $\forall z\in\overline{C}_\pm\cup\{\infty\}$ *соответственно.*

Теорема 1.2. *Пусть задана* $C_N\in L^1_{n\times m}(0,N)$ $(0<N<\infty)$ *такая, что* $\|C_N\|=1$ *и* $\dim\mathfrak{M}_C(0)=m$ *(определенный случай). Тогда класс* $\mathrm{E}(C_N)$ *состоит из единственного элемента* $E(z)(z\in\overline{C}_+)$, *который определяется по формуле*

$$E(z)=F\cdot н_-(-\Psi;z)\left\|\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{l_k}\delta_{jk}\right\|_{j,k=1}^r(F\cdot н_+(\Phi;z))^{-1}\ (z\in\overline{C}_+). \tag{1.15}$$

Более того, $E(z)$ *допускает представление* (1.8), *где* $C_\infty|(0,N)=C_N$ *и* $S(\infty)=-K$ $(-K$ *— угловой оператор подпространства* $\mathfrak{M}_C(0))$.

В частности, при $\|C_N\|=1$ и $m=1$ всегда имеет место определенный случай. Поэтому, если $D([\varphi^{[1]},\psi^{[1]}]^\tau,l)$ — произвольно выбранная максимальная D-цепочка, то имеем $[\varphi^{[1]},\psi^{[1]}]^\tau=[\varphi^{[1]};\psi_1^{[1]},\psi_2^{[1]},\cdots,\psi_n^{[1]}]^\tau$ и $E(z)$ представляется в виде

$$E(z)=\left[\frac{F_+(\psi_1^{[1]};z)}{F_+(\varphi^{[1]};z)},\frac{F_+(\psi_2^{[1]};z)}{F_+(\varphi^{[1]};z)},\cdots,\frac{F_+(\psi_n^{[1]};z)}{F_+(\varphi^{[1]};z)}\right]^\tau\quad(z\in\overline{C}_+).$$

Имея в виду представления (1.8) для $E(z)$, для компонент $E_j(z)=F_+(\psi_j^{[1]};z)\,F_+^{-1}(\varphi^{[1]};z)$ $(j=\overline{1,n})$ получаем представление

$$E_j(z)=-e^{izN}K_j+\int_0^\infty\widetilde{C}_j(t)\,e^{izt}\,dt\ (\widetilde{C}_j\in L^1(R_+);\ \widetilde{C}_j|(0,N)=C_j). \tag{1.16}$$

Здесь $[c_1,c_2,\cdots,c_n]$ — заданная $(n\times 1)$-матрица-функция C_N, а $K=[k_1,k_2,\cdots,k_n]^\tau$ $\left(\sum_{j=1}^n|k_j|^2=1\right)$ есть частично изометрический угловой оператор подпространства $\mathfrak{M}_C(0)$.

Это утверждение является континуальным аналогом известной скалярной ($n = 1$) теоремы Шура [4] (а также ее векторного ($n > 1$) обобщения И. П. Федчиной [5]) о степенных рядах со скалярными (векторными) коэффициентами. Появление внеинтегральных членов в (1.16) обусловлено спецификой континуальности рассматриваемой задачи (S).

4. Пусть теперь $|C_N| = 1$ и $\dim \mathfrak{M}_C(0) < m$. Дадим описание множества $\mathbf{E}(C_N)$ на основании теоремы 0.3.

Положим

$$\hat{p}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{U}_N \end{bmatrix} \hat{g}(t),$$

где $\hat{g}$ — специально выбранное решение уравнения (0.14), о котором шла речь во введении. Тогда $\hat{p}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{C}_N^* \\ -C_N & \mathrm{I} \end{bmatrix} \hat{p}(t) = \begin{bmatrix} 0 & C_N^*(N-t) \\ C_N(t) & 0 \end{bmatrix} Q, \tag{1.17}$$

где Q — ортопроектор на $C^{m+n} \ominus \mathfrak{M}_C(0) = C^{m+n} \ominus \mathfrak{M}_\Gamma(0)$.

Далее, определим м-функцию $\hat{P}(z)(z \in \overline{C})$ по формуле

$$\hat{P}(z) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & e^{izN} I_n \end{bmatrix} Q + \int_0^N \hat{p}(t)\, e^{izt}\, dt \quad (z \in \overline{C}).$$

Легко проверить, что при $\lambda \in R$ имеет место соотношение

$$\hat{P}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & e^{i\lambda N} I_n \end{bmatrix} \hat{G}(\lambda) \quad (\lambda \in R),$$

где $\hat{G}(\lambda)$ — матрица дробно-линейного преобразования (0.15), дающего описание класса $\mathbf{S}(\Gamma_N)$. Отсюда, аналогично теореме 1.1, получается

Т е о р е м а 1.3. *Пусть задана* $C_N \in L^1_{n \times m}(0, N)$ $(0 < N < \infty)$ *такая, что* $|C_N| = 1$ *и* $\dim \mathfrak{M}_C(0) < m$. *Тогда полное описание класса* $\mathbf{E}(C_N)$ *дается формулой*

$$E(z) = [(\hat{P}_{21}(z) + \hat{P}_{22}(z)\, B(z))\, D_-(z)] \left\| \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{l_k} \delta_{jk} \right\|_{j,k=1}^{m} \times$$

$$\times [(\hat{P}_{11}(z) + \hat{P}_{12}(z)\, B(z))\, D_+(z)]^{-1} \quad (z \in \overline{C}_+),$$

когда B *пробегает все* $\mathbf{B}_{n \times m}(K)$.

При этом в том и только в том случае, когда $B \in \mathbf{B}_{n \times m}(K) \cap W^+_{n \times m}$ *м-функция* $E(z)$ *представляется в виде* (1.8), *где* $C_-|(0, N) = C_N$, *а*, $S(\infty) = -K \oplus \hat{B}(\infty)$.

Отметим, что замечание 1.1 остается в силе и в этом случае.

5. Немногое нужно добавить к проведенным рассмотрениям, чтобы можно было их истолковать по-новому. Оказывается, теперь совсем просто может быть решена

Задача $(S_{\min})$ *(континуально-матричный аналог задачи Шура). Пусть задана $C_N \in L^1_{n\times m}(0, N)(0<N<\infty)$. Требуется:*

1) *Найти в метрике $H^\infty_{n\times m}$ расстояние*

$$d(C_N) = \operatorname{dist}\left(\int_0^N C_N(t)\, e^{izt}\, dt,\ e^{izN} H^\infty_{n\times m}\right).$$

2) *Дать описание множества всех м-функций $\Phi \in e^{izN} H^\infty_{n\times m}$, на которых достигается расстояние $d(C_N)$.*

Ответ на первый вопрос дается равенством

$$d(C_N) = \|\mathbf{C}_N\|_2. \tag{1.18}$$

При доказательстве этого равенства без ограничения общности можно принять $\|\mathbf{C}_N\|_2 = 1$. Тогда в силу теорем 1.2 и 1.3 найдется такое $\Phi \in H^\infty_{n\times m}$ что

$$\sup_{z\in C_+}\left|\int_0^N C_N(t)\, e^{izt}\, dt - e^{izN}\Phi(z)\right| \leqslant 1.$$

Последнее означает, что $d(C_N) \leqslant 1$. Покажем, что знак $<$ здесь исключается. Допустим противное, т. е. что существует м-функция $\Phi_0 \in H^\infty_{n\times m}$ такая, что

$$\sup_{z\in C_+}|E_0(z)| = \sup_{z\in C_+}\left|\int_0^N C_N(t)\, e^{izt}\, dt - e^{izN}\Phi_0(z)\right| = q < 1.$$

Рассмотрим вектор-функцию $E_0(z)F_+(f; z)$, где $f \in L^2_{m\times 1}(0; N)$. Легко проверить, что

$$E_0(z)F_+(f; z) = \int_0^N (\mathbf{C}_N f)(t)\, e^{izt}\, dt + e^{izN} F_+(\varphi; z), \text{ где } \varphi \in L^2_{n\times 1}(R_+).$$

Отсюда, в силу ортогональности слагаемых в правой части последнего равенства как элементов пространства $H^2_{n\times 1}$ получаем неравенство

$$\|f\|^2 = \|F_+(f; z)\|^2 \geqslant \|E_0(z)F_+(f; z)\|^2 = \|F_+(\mathbf{C}_N f; z)\|^2 + \|F_+(\varphi; z)\|^2 \geqslant \|\mathbf{C}_N f\|^2.$$

Таким образом, получаем $\|\mathbf{C}_N\| < 1$, что противоречит допущению.

Одновременно мы выяснили, что расстояние $d(C_N)$ будет достигаться на единственном элементе из $H^\infty_{n\times m}$ в том и только в том случае, когда линеал $\mathfrak{M}_C(0)$, отвечающий наибольшему s-числу $\rho\ (=\|\mathbf{C}_N\|^2$- оператора $\mathbf{C}_N$, имеет размерность, равную m ($\dim \mathfrak{M}_C(0) = m$). В этом случае элемент $\Phi_0 \in e^{izN} H^\infty_{n\times m}$, на котором достигается расстояние $d(C_N)$, согласно теореме 1.2 имеет вид

$$\Phi_0(z) = e^{izN}\left(-K - \int_0^\infty C_d(t)\, e^{izt}\, dt\right) \quad (C_d \in L^1_{n\times m}(R_+)).$$

Если же $\dim \mathfrak{M}_C(0) < m$, то расстояние $d(C_N)$ будет достигаться на бесконечном множестве элементов из $e^{izN} H^-_{n\times m}$, описание которого дается теоремой 1.3.

Согласно замечанию 1.1 среди «ближайших» Φ будут как элементы вида (1.8) (при $B \in \mathbf{B}_{n\times m}(K) \cap W^+_{n\times m}$), так и элементы, не принадлежащие множеству $e^{izN} W^+_{n\times m}$.

Приведенный анализ показывает, что

$$\operatorname{dist}\left(\int\limits_0^N C_N(t)\, e^{izt}\, dt,\ e^{izN} H^-_{n\times m}\right) = \operatorname{dist}\left(\int\limits_0^N C_N(t)\, e^{izt}\, dt,\ e^{izN}\ W^+_{n\times m}\right).$$

Причем, любопытно, что если «ближайший» элемент не является единственным, то среди них найдутся элементы, не принадлежащие множеству $e^{izN} W^+_{n\times m}$.

Отметим также, что теорема 1.1 содержит полное решение следующей задачи.

Пусть заданы $C_N \in L^1_{n\times m}(0, N)$ $(0 < N < \infty)$ *и* $\varepsilon > 0$. *Требуется дать описание всех м-функций* $\Phi \in e^{izN} H^-_{n\times m}$ *из шара*

$$\sup_{z\in C_+}\left|\int\limits_0^N e^{izN}\, C_N(t)\, dt - \Phi(z)\right| \leqslant \|\mathbf{C}_N\| + \varepsilon .$$

С л е д с т в и е 1.1. Для всякой м-функции $C_- \in L^1_{n\times m}(R_+)$ имеет место равенство

$$d(C_-) := \max_{z\in C_+}\left|\int\limits_0^\infty C_-(t)\, e^{izt}\, dt\right| = \|\mathbf{C}_-\|_2. \tag{1.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что оператор $\mathbf{C}_-$ является сильным пределом операторов $\mathbf{C}_N \mathbf{P}_N$ $(0 < N < \infty)$, где $\mathbf{P}_N$ — оператор ортогонального проектирования $L^2_{m\times 1}(R_+)$ на $L^2_{m\times 1}(0, N)$. Отсюда $\|\mathbf{C}_N\|_2 \to \|\mathbf{C}_-\|_2$ при $N \to \infty$. Поэтому, в силу (1.18), имеем $\|\mathbf{C}_N\|_2 = d(C_N) \leqslant \leqslant d(C_-)$ $\forall N \in R_+$. Следовательно, $\|\mathbf{C}_-\| \leqslant d(C_-)$. Покажем, что знак $<$ здесь исключается. В самом деле, $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $\Phi_N \in H^-_{n\times m}$, что

$$\max_{z\in \overline{C}_+}\left|\int\limits_0^\infty C_-(t)\, e^{izt}\, dt + e^{izN}\,\Phi_N(z)\right| \leqslant \|\mathbf{C}_N\|_2 + \varepsilon \leqslant \|C_-\|_2 + \varepsilon.$$

Рассматривая это соотношение только на оси R найдем, что

$$|\Phi_N(z)| \leqslant d(C_-) + \|\mathbf{C}_-\| + \varepsilon \quad \forall z \in R,$$

а значит и при всех $z \in \mathbf{C}_+$. Отсюда $\lim\limits_{N\to\infty} e^{izN}\,\Phi_N(z) = 0$ $\forall z \in C_+$. Поэтому, для любого $z \in C_+$ имеем

$$\left|\int\limits_0^\infty C_-(t)\, e^{izt}\, dt\right| \leqslant \|\mathbf{C}_-\| + \varepsilon,$$

что в силу произвольности $z \in C_+$ и доказывает (1.18).

Следствие 1.1 можно рассматривать как частный случай результата Сарасона [6] (Сарасон рассматривал скалярный случай, но его рассмотрение допускает естественное обобщение на матричный случай). Дело в том, что при переходе к Фурье-образам, оператор C_- переходит в оператор умножение на м-функцию

$$\widehat{C}_-(z) = \int_0^\infty C_-(t)\, e^{izt}\, dt$$

в пространстве вектор-функций $H^2_{m\times 1}$. У Сарасона рассмотрен оператор умножения в H^2 на произвольную функцию из H^∞ и доказано, что норма оператора равна норме этой функции в H^∞.

§ 2 Вспомогательные предложения

В дальнейшем мы будем рассматривать только квадратные $(n\times n)$— матрицы-функции, как того требует сама постановка задачи (C—T).

Обозначим через Ω_n множество всех $(n\times n)$-матриц-функций $F(z)$ $(z\in C_+)$, голоморфных в C_+ и имеющих там неотрицательную вещественную часть: $\operatorname{Re} F(z) = \frac{1}{2}(F(z) + F^*(z)) \geqslant 0$.

2.1° *Условие $F\in\Omega_n$ эквивалентно тому, что F допускает представление*

$$iF(z) = \alpha + \beta z - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda+z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\Sigma(\lambda) \quad (z\in C_+), \tag{2.1}$$

где α, β — эрмитовы $(n\times n)$-матрицы, причем $\beta\geqslant 0$, а $\Sigma(\lambda)$— неотрицательная матричная мера на оси R, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty. \tag{2.2}$$

В скалярном случае $(n=1)$ это условие составляет известную теорему Рисса-Херглотца-Неванлинны, а на матричный случай она переносится известным способом.

Отметим, что β в представлении (2.1) может быть найдена по формуле

$$\beta = \lim_{y\to\infty} \frac{F(iy)}{y}. \tag{2.3}$$

Отправляясь от представления (2.1), которое определяет $F\in\Omega_n$ единственным образом, будем ассоциировать с ней ее «переходную» м-функцию Π_F:

$$\Pi_F(t) = -\beta + i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda t} - 1 - \frac{i\lambda t}{1+\lambda^2}\right) \frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda^2} \quad (t\in R). \tag{2.4}$$

Легко видеть, что м-функция Π_F непрерывна и, очевидно, эрмитова: $\Pi_F(-t)=\Pi^*(t)$ $(t\in R)$.

2.2° *М-функция* Π_F *допускает оценку*

$$|\Pi_F(t)|\leqslant\gamma_0+\gamma_1|t|^2 \quad (t\in R), \tag{2.5}$$

где γ_0 *и* γ_1 — *некоторые константы, зависящие от* Π_F.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим конечную разность второго порядка:

$$(\Delta_h^2\Pi_F)(t):=\Pi_F(t+2h)-2\Pi_F(t+h)+\Pi_F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}(e^{i\lambda h}-1)\frac{d\Sigma(\lambda)}{\lambda^2}.$$

В силу условия (2.2), при некотором $c>0$ имеем

$$|(\Delta_h^2\Pi_F)(t)|\leqslant C \quad (t\in R).$$

Отсюда уже легко следует требуемая оценка (2.5).

По м-функции Π_F непосредственно восстанавливается м-функция F, а именно, имеет место легко проверяемое соотношение (см. [7]):

$$F(z)=z^2\int_{-\infty}^{\infty}\Pi_F(t)\,e^{izt}\,dt \quad (z\in C_+). \tag{2.6}$$

Из представления (2.4) м-функции Π_E ясно, что для ядра

$$K_\Pi(t,s):=\Pi(t-s)-\Pi(t)-\Pi(-s)+\Pi(0) \tag{2.7}$$

справедливо представление

$$K_\Pi(t,s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{i\lambda t}-1)(e^{-i\lambda s}-1)}{\lambda^2}\,d\Sigma(\lambda) \quad (t,s\in R). \tag{2.8}$$

Оно показывает, что м-функция Π_F принадлежит классу $G_{n;\infty}$, если иметь в виду следующее определение класса $G_{n;N}$ $(0<N\leqslant\infty)$.

Определение 2.1. Для любого натурального n и положительного N $(0<N\leqslant\infty)$ через $G_{n;N}$ обозначается совокупность определенных и непрерывных в интервале $(-N,N)$ $(n\times n)$-матриц-функций Π таких, что $\Pi^*(t)=\Pi(-t)$ $(-N<t<N)$ и ядро $K_\Pi(t,s)$ $(t,s\in R)$ является неотрицательно определенным.

Последнее условие означает, что $\forall t_j\in[0,N)$ и $\forall\xi_j\in C^n$ $(j=\overline{1,m};$ $m=1,2,\cdots)$ выполняется неравенство:

$$\sum_{j,k=1}^{m}(K(t_j,t_k)\xi_k,\xi_j)\geqslant 0.$$

Ввиду непрерывности ядра $K_\Pi(t,s)$ это условие эквивалентно неравенству

$$\int_0^N\int_0^N(K(t,s)f(s),f(t))\geqslant 0 \quad \forall f\in C_{n\times 1}(0,N).$$

(Если $N=\infty$, то от f дополнительно требуется финитность на ∞).

Утверждение о том, что «переходная м-функция Π_f для любого $f\in\Omega_n$ принадлежит $G_{n;N}$» допускает обращение. Точнее, справедливо утверждение

2.3°. *Пусть* $\Pi(t)$ $(-N<t<N;\ 0<N\leqslant\infty)$ — *некоторая непрерывная* $(n\times n)$-*матрица-функция. Для того, чтобы она допускала представление* (2.4) *с заменой* R *на* $(-N, N)$), *где* α, β — *эрмитовы* $(n\times n)$-*матрицы, причем* $\beta>0$, *а* $\Sigma(\lambda)$ — *неубывающая матричная мера на оси* R, *удовлетворяющая условию* (2.2), *необходимо и достаточно, чтобы* $\Pi\in G_{n;N}$.

В скалярном случае это предложение было установлено еще в [8]. Как в скалярном, так и в матричном случаях, оно легко доказывается методом направляющих функционалов (см. [9]).

Утверждение 2.3° непосредственно влечет

2.4°. *Для всякой м-функции* $\Pi\in G_{n;N}$ $(0<N<\infty)$ *существует, по крайней мере, одно продолжение* $\tilde\Pi\in G_{n;\infty}$; $\tilde\Pi|(-N, N)=\Pi$.

Действительно, если $\Pi\in G_{n;N}$, то, согласно 2.3°, она допускает представление (2.4) при $t\in(-N, N)$. Но тогда, рассматривая правую часть (2.4) для всех $t\in R$, мы и получаем требуемое продолжение.

В связи с 2.4° естественно возникает

Задача $(\tilde C)$. *Задана м-функция* $\Pi\in G_{n;N}$ $(0<N<\infty)$. *Требуется дать полное описание множества всевозможных продолжений* $\tilde\Pi\in G_{n;\infty}$ *данной м-функции* Π.

Ряд результатов по этой задаче можно сразу получить методом направляющих функционалов и теорией резольвентных матриц эрмитовых операторов (см. [10]).

Однако здесь мы рассмотрим задачу $(\tilde C)$ при определенном ограничении, налагаемом на м-функцию Π, которое позволит получить решение этой задачи на основании результатов § 1.

Определение 2.2. Будем говорить, что м-функция $\Pi\in G_{n;\infty}$ имеет в интервале $(-N, N)$ суммируемую акселеранту H, если при $t\in(-N, N)$

$$\Pi(t)=\Pi(0)-c_\Pi|t|I_n-\int_0^t(t-s)H(s)\,ds\ (H\in L^1_{n\times n}(-N, N);\ c_\Pi>0). \quad (2.9)$$

Очевидно, представление (2.9) возможно в том и только в том случае, когда м-функция Π имеет абсолютно непрерывную производную в интервалах $(-N, 0)$ и $(0, N)$ и при этом $\Pi'(\pm 0)=\mp c_\Pi I_n$, а $\Pi''(t)=-H(t)$ почти всюду в интервале $(-N, N)$. Последнее непосредственно влечет эрмитность акселеранты H: $H^*(t)=H(-t)$ почти всюду в $(-N, N)$.

В дальнейшем, без ограничения общности, можем принять, что м-функция $\Pi\in G_{n;N}$, имеющая акселеранту, удовлетворяет условиям: $\Pi(0)=0$ и $c_\Pi=1/2$.

С каждой м-функцией $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$ можно связать оператор H_N, действующий в пространстве $L^2_{n\times 1}(0, N)$ по формуле

$$(\mathrm{H}_N f)(t) = \int_0^N H_N(t-s) f(s)\,ds \quad (f \in L^2_{n\times 1}(0, N);\ t \in (0, N)). \tag{2.10}$$

Это вполне непрерывный оператор, норма которого удовлетворяет неравенству

$$\|\mathrm{H}_N\|_2 \leqslant \int_{-N}^{N} |H_N(s)|\,ds.$$

Последнее доказывается аналогично неравенству (1.3), если ввести вектор-функцию $f_s(\cdot)$ $(s \in (-N, N))$ со значениями в $L^2_{n\times 1}(-N, 2N)$ по формуле

$$f_s(t) = \begin{cases} f(t-s) & \text{при } t \in (s, s+N) \\ 0 & \text{при } t \in (-N, s) \cup (s+N, 2N) \end{cases}$$

и записать действие оператора H_N в виде

$$(\mathrm{H}_N f)(t) = \int_{-N}^{N} H_N(s) f_s(t)\,ds.$$

Оператор H_N будет эрмитов: $\mathrm{H}_N^* = \mathrm{H}_N$ в том и только в том случае, когда м-функция H_N будет эрмитовой: $H_N^*(t) = H_N(-t)$.

2.5°. *Для того, чтобы м-функция $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$ была акселерантой некоторой м-функции $\Pi \in G_{n;\,N}(\Pi(0) = 0;\ c_\Pi = 1/2)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{I} + \mathrm{H}_N \geqslant 0$.*

В самом деле, если м-функции Π и H_N связаны соотношением (2.9) при $\Pi(0) = 0$ и $c_\Pi = 1/2$:

$$\Pi(t) = -\frac{1}{2}|t| I_n - \int_0^t (t-s) H_N(s)\,ds \quad (-N < t < N), \tag{2.12}$$

то для любого $f \in C_{n\times 1}[0, N]$ выполняется равенство

$$\int_0^N\int_0^N (K_\Pi(t, s) f(s), f(t))\,ds\,dt = \int_0^N (g(t), g(t))\,dt +$$
$$+ \int_0^N\int_0^N (H_N(t-s) g(s), g(t))\,ds\,dt,$$

где $K_\Pi(t, s)$ определяется соотношением (2.7), а

$$g(t) = \int_t^N f(s)\,ds \quad (f \in C_{n\times 1}[0, N];\ 0 \leqslant t \leqslant N). \tag{2.13}$$

Отсюда, учитывая, что многообразие вектор-функций g, определяемых равенством (2.13), плотно в $L^2_{n\times 1}(0, N)$, получаем эквивалентность условия $\mathrm{I}+\mathrm{H}_N \geqslant 0$ условию неотрицательной определенности ядра K_Π, т. е. условию $\Pi \in G_{n;\,N}$.

В дальнейшем, говоря о м-функции $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$, для которой $\mathrm{I}+\mathrm{H}_N \geqslant 0$, мы будем называть ее акселерантой, имея в виду, что она является акселерантой м-функции $\Pi \in G_{n;\,N}$, определенной равенством (2.12).

В случае, когда м-функция H определена на всей оси R: $H \in L^1_{n\times n}(R)$, имеет место простое и законченное предложение.

2.6°. *Пусть задана эрмитова м-функция* $H \in L^1_{n\times n}(R)$ $(H^*(t) = H(-t))$. *Тогда она будет акселерантой в том и только в том случае, когда*

$$I_n + \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{i\lambda t}\, dt \geqslant 0 \quad \forall \lambda \in R. \tag{2.14}$$

Действительно, если м-функции H и Π связаны соотношением (2.12) при $N=\infty$, то, интегрируя дважды по частям, легко найдем, что для любого $z \in C_+$

$$z^2 \int_0^{\infty} \Pi(t) e^{izt} dt = \frac{1}{2}[I_n + 2\int_0^{\infty} H(t) e^{izt}\, dt := F(z). \tag{2.15}$$

Очевидно, м-функция $F(z)$ голоморфна в C_+ и может быть доопределена по непрерывности в $\overline{C}_+ \cup \{\infty\}$. В силу принципа максимума, $F \in \mathfrak{Q}_n$, т. е. $\operatorname{Re} F(z) \geqslant 0$ $\forall z \in \overline{C}_+$, в том и только в том случае, когда $\operatorname{Re} F(z) \geqslant 0$ $\forall z \in R$. Это и доказывает требуемое утверждение, поскольку левая часть в (2.14) совпадает с $\operatorname{Re} F(z)$.

Отметим также, что в рассматриваемом случае матричная мера Σ в представлении (2.4) м-функции Π абсолютно непрерывна и

$$d\Sigma(\lambda) = \frac{1}{\pi}(I_n + \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-i\lambda t}\, dt)\, d\lambda. \tag{2.16}$$

Это следует из формулы обращения в применении к представлению (2.1) м-функции $F \in \mathfrak{Q}_n$ (см. [11]). Однако, поскольку в (2.1) вместо $(\lambda - z)^{-1}$ участвует $(\lambda + z)^{-1}$, формула обращения принимает вид $-d\Sigma(-\lambda) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} F(\lambda)\, d\lambda$. Отсюда получается формула (2.16).

В общем случае имеет место

2.7°. *Пусть задана м-функция* $\Pi \in G_{n;\,N}$ $(0 < N < \infty)$, *имеющая акселеранту* $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$. *Тогда м-функция* $F_{\tilde{\Pi}}$, *порождаемая по формуле* (2.6) (*с заменой* Π *на* $\tilde{\Pi}$) *произвольным продолжением* $\tilde{\Pi} \in G_{n;\,\infty}$ $(\tilde{\Pi}|(0, N) = \Pi)$, *допускает представление*

$$F_{\widetilde{\Pi}}(z):=z^2\int_0^{\infty}\widetilde{\Pi}(t)\,e^{izt}\,dt=\frac{1}{2}\Big(I_n+2\int_0^{N}H_N(t)\,e^{izt}dt\Big)+e^{izN}\,\Psi(z)\quad(z\in C_+),\tag{2.17}$$

где м-функция Ψ *голоморфна в* C_+ *и удовлетворяет оценке* (0.3).

Для доказательства представим $F_{\widetilde{\Pi}}$ в виде суммы:

$$F_{\widetilde{\Pi}}(z)=z^2\int_0^N\Pi(t)\,e^{izt}\,dt+z^2\int_N^{\infty}\widetilde{\Pi}(t)\,e^{izt}\,dt=$$

$$=z^2\int_0^N\Pi(t)\,e^{izt}\,dt+e^{izN}z^2\int_0^{\infty}\widetilde{\Pi}(N+t)\,e^{izt}dt.$$

Для первого слагаемого, путем двойного интегрирования по частям, найдем

$$z^2\int_0^N\Pi(t)\,e^{izt}\,dt=\frac{1}{2}\Big(I_n+\int_0^N H_N(t)\,e^{izt}\,dt\Big)-iz\,\Pi(N)\,e^{izN}+\Pi'(N)\,e^{izN}.$$

Для второго слагаемого, учитывая (2.5), получим

$$\left|z^2\int_0^{\infty}\widetilde{\Pi}(N+t)\,e^{izt}\,dt\right|\leqslant z^2\int_0^{\infty}(\gamma_0+\gamma_1t^2)\,e^{-Im\,z\cdot t}\,dt=\frac{z^2}{Im\,z}\gamma_0+\left(\frac{z}{Im z}\right)^2\gamma_1.$$

Это и доказывает представление (2.17) с оценкой (0.3).

2.8°. *Пусть задана м-функция* $\Pi\in G_{n;\,N}\,(0<N<\infty)$, *и пусть некоторое ее продолжение* $\widetilde{\Pi}\in G_{n;\,\infty}$ *порождает по формуле* (2.6) *м-функцию* $F_{\widetilde{\Pi}}$, *допускающую представление* (2.17), *где* $H_N\in$ $\in L^1_{n\times n}(0,N)$, *а м-функция* Ψ *голоморфна в* C_+ *и удовлетворяет оценке*

$$|\Psi(z)|=0(|z|^k)\ \text{при}\ |z|\to\infty\ \text{и}\ \left|\frac{\pi}{2}-\arg z\right|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon\ (\varepsilon>0)\tag{2.18}$$

при некотором натуральном k.

Тогда м-функция Π *имеет акселеранту* H_N.

Действительно, с помощью м-функции H_N построим м-функцию $\Pi_0(t)$ $(0<t<N)$ по формуле (2.12). Тогда представление (2.17) м-функции $F_{\widetilde{\Pi}}$ можно преобразовать к виду

$$F_{\widetilde{\Pi}}(z)=z^2\int_0^N\Pi_0(t)\,e^{izt}\,dt+e^{izN}\,\Psi_1(z),$$

где Ψ_1 удовлетворяет оценке (2.18).

Отсюда получим

$$z^2\int_0^N(\Pi_0(t)-\widetilde{\Pi}(t))\,e^{izt}\,dt=e^{izN}\left(\int_N^{\infty}\widetilde{\Pi}(N+t)\,e^{izt}\,dt-\Psi_1(z)\right).$$

Из сравнения порядков роста правой и левой частей этого равенства придем к выводу (см. [12]):

$$\Pi_0(t) = \bar{\Pi}(t) (= \Pi(t)) (0 < t < N) \text{ и } \int_N^{\infty} \bar{\Pi}(N+t) e^{izt} dt = \Psi_1(z).$$

Таким образом, $\Pi_0 \in G_{n;N}$, что в силу определения 2.1 акселераты и доказывает утверждение.

Замечание 2.1. В процессе доказательства 2.8° доказано также, что если м-функция $\bar{\Pi} \in G_{n;\infty}$ допускает представление (2.17) с оценкой (2.18) при некотором натуральном k, то необходимо $k=1$.

§ 3. Решение задачи (С—Т) (вполне неопределенный случай)

1. Пусть задана $(n \times n)$-матрица-функция $H_N \in L^1_{n\times n}(0, N)$. Рассмотрим задачу $(C-T)$, состоящую в описании класса $\Omega(H_N)$ (см. введение).

Из утверждений 2.7° и 2.8° следует, что класс $\Omega(H_N)$ непуст в том и только в том случае, когда м-функция $H_N(t)$ $(-N < t < N)$, продолженная в интервал $(-N, 0)$ условием эрмитовости $(H_N(-t) = H^*(t);\ 0 < t < N)$, является акселерантой, т. е. когда оператор H_N, определенный равенством (2.11), удовлетворяет условию $\mathrm{I} + \mathrm{H}_N \geqslant 0$. Впрочем, это условие получиться и непосредственно при описании класса $\Omega(H_N)$.

Рассмотрим м-функции H_N и C_N, принадлежащие $L^1_{n\times n}(0, N)$ $(0 < N < \infty)$ и связанные соотношением

$$C_N(t) + \int_0^t C_N(t-s) H_N(s)\, ds + H_N(t) \Big(= C_N(t) +$$

$$+ \int_0^t C_N(s) H_N(t-s)\, ds + H_N(t)\Big) = 0 \ (0 < t < N). \tag{3.1}$$

Заметим, что для выполнения соотношения (3.1) достаточно задать одну из м-функций H_N или C_N, поскольку другая может быть найдена из уравнения Вольтерра (3.1).

Введем вольтерровы операторы C_N и $\bar{\mathrm{H}}_N$, действующие в пространстве $L^2_{n\times 1}(0, N)$ по формулам

$$(\mathrm{C}_N f)(t) = \int_0^t C_N(t-s) f(s)\, ds, \quad (\bar{\mathrm{H}}_N f)(t) =$$

$$= \int_0^t H_N(t-s) f(s)\, ds \ (f \in L^2_{n\times 1}(0, N)). \tag{3.2}$$

Отметим, что $2\,\mathrm{Re}\,\widetilde{\mathbf{H}}_N = \widetilde{\mathbf{H}}_N + \widetilde{\mathbf{H}}_N^* = \mathbf{H}_N$, где $\mathbf{H}_N$—оператор, введенный в § 2 формулой (2.10).

Соотношение (3.1) в терминах операторов $\mathbf{C}_N$ и $\widetilde{\mathbf{H}}_N$ имеет вид

$$\mathbf{C}_N + \mathbf{C}_N \widetilde{\mathbf{H}}_N + \widetilde{\mathbf{H}}_N = 0\ (\mathbf{C}_N + \widetilde{\mathbf{H}}_N \mathbf{C}_N + \widetilde{\mathbf{H}}_N = 0), \tag{3.3}$$

что эквивалентно равенству

$$\mathbf{I} + 2\widetilde{\mathbf{H}}_N = (\mathbf{I} + \mathbf{C}_N)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}_N)\ \ (= (\mathbf{I} - \mathbf{C}_N)(\mathbf{I} + \mathbf{C}_N)^{-1}). \tag{3.4}$$

Отсюда легко находим

$$\mathrm{Re}\,(\mathbf{I} + 2\widetilde{\mathbf{H}}_N) = \mathbf{I} + \mathbf{H}_N = (\mathbf{I} + \mathbf{C}_N^*)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}_N^*\mathbf{C}_N)(\mathbf{I} + \mathbf{C}_N)^{-1}. \tag{3.5}$$

Это непосредственно приводит к утверждению

3.1°. Пусть H_N и C_N — м-функции из $L^1_{n\times n}(0, N)$ $(0 < N < \infty)$, связанные соотношением (3.1), а $\mathbf{C}_N$ и $\widetilde{\mathbf{H}}_N$ — вольтерровы операторы, порожденные формулой (3.2). Тогда имеет место эквивалентность следующих утверждений:

1) $\|\mathbf{C}_N\|_2 \leq 1$ $(\|\mathbf{C}_N\| < 1)$ <=> 2) $\mathrm{Re}\,(\mathbf{I} + 2\widetilde{\mathbf{H}}_N) \geq 0$ $(\mathrm{Re}\,(\mathbf{I} + 2\widetilde{\mathbf{H}}_N) > 0)$.

Это утверждение дает возможность каждой акселеранте $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$ однозначно сопоставить непустой класс $\mathbf{E}\,(C_N; H_N) := \mathbf{E}\,(C_N)$, где м-функция $C_N \in L^1_{n\times n}(0, N)$ находится по H_N из уравнения (3.1).

Теорема 3.1. *Пусть задана акселеранта $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$ $(0 < N < \infty)$. Тогда формулой*

$$F(z) = (I_n - E(z))(I_n + E(z))^{-1}\quad (z \in C_+) \tag{3.6}$$

устанавливается одно-однозначное соответствие между классами $\Omega\,(H_N)$ и $\mathbf{E}\,(C_N; H_N)$.

Доказательство. Заметим, во-первых, что формула (3.6) определяет м-функцию $F \in \Omega_n$ и при этом $\lim\limits_{y\uparrow\infty} F(iy) = I_n$. Поэтому в представлении (2.1) м-функции F имеем, в частности, $\beta = 0$, что для „переходной" м-функции Π_F дает $\Pi_F(0) = 0$.

Из соотношения (3.6), воспользовавшись представлениями (0.1) для $E \in \mathbf{E}\,(C_N)$ и (2.6) — для $F \in \Omega_n$, получаем

$$\left(I_n + \int_0^N C_N(t)\,e^{izt}\,dt + e^{izN}\Phi(z)\right) z^2 \int_0^\infty \Pi_F(t)\,e^{izt}\,dt = I_n -$$
$$-\int_0^N C_N(t)\,e^{izt}\,dt - e^{izN}\Phi(z). \tag{3.7}$$

Положим

$$B(t) = -t I_n + \int_0^t (t-s) C_N(s)\, ds \quad (0 < t < N).$$

Теперь, учитывая равенства

$$\int_0^N C_N(t) e^{izt} dt = I_n + B'(N) e^{izN} - iz \int_0^N B'(t) e^{izt} dt =$$

$$= I_n + (B'(N) - iz B(N)) e^{izN} - z^2 \int_0^N B(t) e^{izt} dt$$

и

$$F(z) = iz \int_N^\infty e^{izt} d\Pi(t) + z^2 \int_0^N \Pi(t) e^{itz} dt,$$

из (3.7), после несложного преобразования, получим

$$z^2 \left[2 \int_0^N \Pi(t) e^{izt} dt + \int_0^N \left(\int_0^t B'(t-s)\, d\Pi(s) \right) e^{izt} dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^N B(t) e^{izt} dt \right] = e^{izN} \Psi(z),$$

где м-функция Ψ голоморфна в C_+ и удовлетворяет условию (0.3).

Сравнение порядков роста членов этого равенства дает (см. [12]):

$$2\Pi(t) + \int_0^t B'(t-s)\, d\Pi(s) - B(t) = 0, \quad (0 < t < N),$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\Pi(t) + \int_0^t B''(t-s) \Pi(s)\, ds = B(t) \quad (0 < t < N). \tag{3.7'}$$

Рассматривая полученное равенство как уравнение Вольтерра относительно Π с правой частью B, имеющей абсолютно непрерывную первую производную, можем утверждать, что и м-функция Π имеет в интервале $(0, N)$ абсолютно непрерывную производную.

Дифференцируя дважды уравнение (3.7) и учитывая, что $B''(t) = C_N(t)$ и $\Pi(0) = 0$, имеем

$$\Pi'(0) = -I_n; \quad \Pi''(t) + \int_0^t C_N(t-s) \Pi''(s)\, ds - C_N(t) = 0,$$

откуда, сравнивая с уравнением (3.1), получаем $\Pi''(t) = -H(t)(0<t<N)$. Это на основании утверждения 2.7° доказывает, что м-функция F, определенная формулой (3.6) при $E \in \mathbf{E}(C_N;\ H_N)$, принадлежит $\Omega(H_N)$.

Обратно, пусть $F \in \Omega(H_N)$. Докажем, что она по формуле обратной к (3.6):

$$E(z) = (I - F(z))(I_n + F(z))^{-1} \quad (z \in C_+) \tag{3.8}$$

порождает м-функцию $E \in \mathbf{E}(C_N;\ H_N)$.

Зафиксируем произвольно $E_0 \in \mathbf{E}(C_N)$. По доказанному, она по формуле (3.6) порождает м-функцию $F_0 \in \Omega(H_N)$. Поэтому имеем

$$E(z) - E_0(z) = (I_n + F(z))^{-1}(F(z) - F_0(z))(I_n + F_0(z))^{-1} =$$
$$= e^{izN}(I_n + F(z))^{-1}\,\Psi(z)\,(I_n + F_0(z))^{-1},$$

где Ψ— м-функция, голоморфная в C_+ и удовлетворяющая условию (0.3).

С другой стороны, $(I_n + F(z))^{-1} = \dfrac{1}{2}(I_n + E(z)) \in \mathbf{B}_{n\times n}$ и аналогично $(\mathrm{I}_n + F_0(z))^{-1} \in \mathbf{B}_{n\times n}$. Отсюда $E(z) - E_0(z) = e^{izN}\Psi_1(z)(z \in C_+)$, где Ψ_1— м-функция того же класса, что и Ψ. Полученное соотношение показывает, что ψ_1 ограничена вблизи вещественной оси, а тогда, в силу принципа Фрагмена-Линделефа, она ограничена во всей верхней полуплоскости C_+. Это доказывает, что вместе с E_0 классу $\mathbf{E}(C_N)$ принадлежит и м-функция E. □

Замечание 3.1. Всякая м-функция $F \in \Omega(H_N)$ обладает тем свойством, что $\lim\limits_{y\uparrow\infty} F(iy) = I_n$. Отсюда, как уже отмечалось, следует, в частности, что в представлении (2.1) м-функции F имеем $\beta = 0$. Нам не известна точная характеристика меры Σ в представлении (2.1), обуславливающая предельное соотношение. Отметим только, что это соотношение влечет равенство $\lim\limits_{y\uparrow\infty} \operatorname{Im} F(iy) = 0$, а последнее, как известно (см. [13], стр. 297), эквивалентно условию $\lim\limits_{\lambda\to\infty} 1/\lambda\,(\sum(\lambda) - \sum(-(\lambda))) = 0$.

2. В этом пункте дадим непосредственное описание класса $\Omega(H_N)$ в случае, когда оператор $\mathbf{H}_N$, порожденный акселерантой H_N, удовлетворяет условию $\mathbf{I} + \mathbf{H}_N > 0$ (вполне неопределенный случай).

Рассмотрим для этого пару «дуальных» уравнений

$$C_N(t) + \int_0^t C_N(t-s)H_\pm(s)\,ds \pm H_\pm(t) = 0 \quad (0 < t < N). \tag{3.1$_\pm$}$$

Решение уравнений $(3.1)_\pm$ при заданном C_N будем обозначать через $H_{N;\pm}$ (очевидно $H_{N;+}(t) \equiv H_N(t)$).

Легко понять, что для получения «дуальных» соотношений $(3.3)_\pm$, $(3.4)_\pm$, $(3.5)_\pm$ достаточно рассмотреть операторы $\pm\mathbf{C}_N$ и $\widetilde{\mathbf{H}}_{N;\pm}$. Из соотношений $(3.4)_\pm$ находим $(\mathbf{I} + 2\widetilde{\mathbf{H}}_{N;+})^{-1} = \mathbf{I} + 2\widetilde{\mathbf{H}}_{N;-}$, что дает возможность непосредственно определить м-функцию $H_{N;\mp}$ через $H_{N;\pm}$ из уравнения

$$H_{N;\,+}(t)+2\int_0^t H_{N;\,+}(t-s)\,H_{N;\,-}(s)\,ds+H_{N;\,-}(t)=0\quad(0<t<N).$$

Из соотношений $(3.4)_\pm$ следует также эквивалентность условий

$$1)\ \mathrm{Re}\,(\mathbf{I}_n+2\widetilde{\mathbf{H}}_{N;\,+})\geqslant 0\ (\mathrm{Re}\,(\mathbf{I}+2\widetilde{\mathbf{H}}_{N;\,+})>0);$$

$$2)\ \mathrm{Re}\,(\mathbf{I}+2\widetilde{\mathbf{H}}_{N;\,-})\geqslant 0\ (\mathrm{Re}\,(\mathbf{I}+2\widetilde{\mathbf{H}}_{N;\,-})>0),$$

т. е. м-функции $H_{N;\,\pm}$ являются акселерантами одновременно. Их мы будем называть «дуальными» акселерантами.

Для описания класса $\Omega\,(H_N)$ подставим в (3.6) выражение (1.10) м-функции E. Получим дробно-линейное преобразование

$$F(z)=(Q_{21}(z)+Q_{22}(z)B(z))\,(Q_{11}(z)+Q_{12}(z)B(z))^{-1}\ (B\in\mathbf{B}_{n\times n};\ z\in C_+)\tag{3.9}$$

с матрицей $Q(z)=\|Q_{jk}(z)\|_{j,k=1}^2$, которое связано с матрицей $P(z)$ преобразования (1.11) соотношением

$$Q(z)=\begin{bmatrix} I_n & I_n\\ I_n & -I_n\end{bmatrix}P(z)\ (z\in C_+).$$

Тогда из представления (1.10) матрицы $P(z)$ следует представление

$$Q(z)=\begin{bmatrix} I_n & I_n\\ I_n-e^{izN} & I_n\end{bmatrix}+\int_0^N q(t)e^{izt}dt,\ \text{где}\ q(t):-\begin{bmatrix} I_n & -I_n\\ I_n & -I_n\end{bmatrix}p(t).\tag{3.10}$$

Отсюда, для определения м-функции $q(t)$ $(0<t<N)$, в силу (1.9), получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{I}-\mathbf{C}_N^* & \mathbf{I}+\mathbf{C}_N^*\\ \mathbf{I}-\mathbf{C}_N & -(\mathbf{I}+\mathbf{C}_N)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t)\\ q_{21}(t) & q_{22}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & C_N^*(N-t)\\ C_N(t) & 0\end{bmatrix}.$$

Применим к обеим частям этого уравнения матрицу

$\begin{bmatrix}(\mathbf{I}+\mathbf{C}_N^*)^{-1} & (\mathbf{I}+\mathbf{C}_N)^{-1}\\ (\mathbf{I}-\mathbf{C}_N^*)^{-1} & -(\mathbf{I}-\mathbf{C}_N)^{-1}\end{bmatrix}$ (условие $\mathbf{I}+\mathbf{H}_{N;\,+}>0$ влечет существование операторов $(\mathbf{I}\pm\mathbf{C}_N)^{-1}$, $(\mathbf{I}\pm\mathbf{C}_N^*)^{-1}$).

Получим, учитывая соотношения (3.4)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}+\mathbf{H}_{N;\,+} & 0\\ 0 & \mathbf{I}+\mathbf{H}_{N;\,-}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t)\\ q_{21}(t) & q_{22}(t)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(\mathbf{I}+\mathbf{C}_N)^{-1}C_N(t) & (\mathbf{I}+\mathbf{C}_N^*)^{-1}C_N^*(N-t)\\ -(\mathbf{I}-\mathbf{C}_N)^{-1}C_N(t) & (\mathbf{I}-\mathbf{C}_N^*)^{-1}C_N^*(N-t)\end{bmatrix}.$$

Далее, из соотношений $(3.1)_\pm$ легко следует, что $(\mathbf{I}\pm\mathbf{C}_N)^{-1}C_N(t)=\mp H_{N;\,\pm}(t)$ и $(\mathbf{I}\pm\mathbf{C}_N^*)^{-1}C_N^*(N-t)=\mp H_{N;\,\pm}^*(N-t)$. Поэтому последнее равенство можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t)\\ q_{21}(t) & q_{22}(t)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}(\mathbf{I}+\mathbf{H}_{N;\,+})^{-1}H_{N;\,+}(t) & (\mathbf{I}+\mathbf{H}_{N;\,+})^{-1}H_{N;\,+}^*(N-t)\\ (\mathbf{I}+\mathbf{H}_{N;\,-})^{-1}H_{N;\,-}(t) & -(\mathbf{I}+\mathbf{H}_{N;\,-})^{-1}H_{N;\,-}^*(N-t)\end{bmatrix}.$$

Обозначим через $\Gamma_{N;\pm}(t,s)$ резольвентные ядра операторов $\mathrm{I}-(\mathrm{I}+\mathrm{H}_{N;\pm})^{-1}$:

$$\Gamma_{N;\pm}(t,s)+\int_0^N H_{N;\pm}(t-u)\,\Gamma_{N;\pm}(u,s)\,du=H_{N;\pm}(t-s).$$

Вместе с этими соотношениями рассмотрим также соотношения

$$\Gamma^{*}_{N;\pm}(t,s)+\int_0^N H^{*}_{N;\pm}(t-u)\,\Gamma^{*}_{N;\pm}(u,s)\,du=H^{*}_{N;\pm}(t-s).$$

М-функции $\Gamma^{*}_{N;\pm}(t,s)$ являются резольвентными ядрами операторов $\mathrm{I}-(\mathrm{I}+\mathrm{H}^{*}_{N;\pm})^{-1}$, где $\mathrm{H}^{*}_{N;\pm}$ — оператор, порожденный м-функцией $H^{*}_{N;\pm}(t)$ по формуле (2.10).

Легко проверить, используя эрмитовость м-функции $H_N(t)$ $(H^{*}_N(t)=H_N(-t);\ (-N<t<N))$, что имеет место равенство $\Gamma^{(*)}_{N;\pm}(t,s)=$ $=\Gamma_{N;\pm}(N-t,\ N-s)$.

Таким образом, для м-функции $q(t)$ $(0<t<N)$ получаем окончательное выражение

$$\begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t)\\ q_{21}(t) & q_{22}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Gamma_{N;+}(t,0) & \Gamma^{*}_{N;+}(N-t,0)\\ \Gamma_{N;-}(t,0) & \Gamma^{(*)}_{N;-}(N-t,0)\end{bmatrix}.$$

Теперь представление (3.10) для м-функции $Q(z)$ принимает вид

$$Q(z)=\begin{bmatrix} I_n-\int_0^N\Gamma_{N;+}(t;0)\,e^{izt}dt & e^{izN}\Big(I_n-\int_0^N\Gamma^{*}_{N;+}(t,0)\,e^{-izt}\,dt\Big)\\ I_n-\int_0^N\Gamma_{N;-}(t,0)\,e^{izt}dt & -e^{-izN}\Big(I_n-\int_0^N\Gamma^{(*)}_{N;-}(t,0)\,e^{-izt}\,dt\Big)\end{bmatrix}.$$

Для иных целей удобно представить матрицу дробно-линейного преобразования (3.9) в виде

$$U(z,N):=\frac{e^{-iz\frac{N}{2}}}{\sqrt{2}}\,Q(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}D(z,N) & D_{*}(z,N)\\ E(z,N) & -E_{*}(z,N)\end{bmatrix},$$

где положено

$$D(z,N)=e^{-iz\frac{N}{2}}\Big(I_n-\int_0^N\Gamma_{N;+}(t,0)\,e^{izt}dt\Big);$$

$$D_{*}(z,N)=e^{iz\frac{N}{2}}\Big(I_n-\int_0^N\Gamma^{(*)}_{N;+}(t,0)\,e^{-izt}dt\Big),$$

$$E(z, N) = e^{-iz\frac{N}{2}}\left(I_n - \int_0^N \Gamma_{N;-}(t, 0)\, e^{izt}\, dt\right);$$

$$E_*(z, N) = e^{iz\frac{N}{2}}\left(I_n - \int_0^N \Gamma^*_{N;-}(t, 0)\, e^{-izt}\, dt\right).$$

Из J-унитарности м-функции $P(\lambda)$ при $\lambda \in \mathrm{R}$ следует, что при $\lambda \in R$ м-функция $U(\lambda, N)$ удовлетворяет тождествам

$$U(\lambda, N)\, JU^*(\lambda, N) = J_0;\quad U^*(\lambda; N)\, J_0 U(\lambda; N) = J\left(J_0 := \begin{bmatrix} 0 & iI_n \\ iI_n & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Это приводит к следующим соотношениям для м-функций E, E_*, D, D_*

$$D(\lambda, N)\, D^*(\lambda; N) - D_*(\lambda; N)\, D_*^*(\lambda; N) = 0$$

1) $$E(\lambda; N)\, E^*(\lambda; N) - E_*(\lambda; N)\, E_*^*(\lambda; N) = 0$$

$$D(\lambda; N)\, E^*(\lambda; N) + D_*(\lambda; N)\, E_*^*(\lambda; N) = 2I_n$$

$$E^*(\lambda; N)\, D^*(\lambda; N) + D^*(\lambda N)\, E(\lambda N) = 2I_n$$

2) $$E_*^*(\lambda; N)\, E_*(\lambda N) + D_*^*(\lambda; N)\, E_*(\lambda; N) = 2I_n$$

$$E^*(\lambda; N)\, D_*(\lambda; N)\, D^*(\lambda; N)\, E_*(\lambda; N) = 0.$$

Вышеприведенные рассмотрения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть задана эрмитова акселеранта* $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$ $(0 < N < \infty)$ *такая, что* $\mathrm{I} + \mathrm{H}_N > 0$ *(вполне неопределенный случай). Тогда полное описание класса* $\Omega(H_N)$ *дается формулой*

$$F(z) = (D(z; N) - D_*(z; N)\, B(z))\, (E(z; N) + E_*(z; N)\, B(z))^{-1}\ (z \in C_+), \tag{3.11}$$

когда B *пробегает множество* $\mathrm{B}_{n\times n}$.

Замечание 3.2. В скалярном случае $(n=1)$ формула (3.11) несколько упрощается. Дело в том, что в этом случае $E_*(z, N) = \overline{E(\bar z; N)}$ и $D_*(z; N) = \overline{D(\bar z; N)}$. Если теперь представить $B \in \mathrm{B}_{n\times n}$ в виде $B = (T - iI_n)(T + iI_n)^{-1}$, где $T \in \Omega_n \cup \{\infty\}$, то формула (3.11) перейдет в формулу, полученную, среди прочих, в сообщении [2].

Замечание 3.3. Из теоремы 3.1 и замечания 1.1 легко следует, что одно-однозначное соответствие между множествами $\mathrm{B}_{n\times n}$ и $\Omega(H_N)$, задаваемое формулой (3.11), осуществляет также соответствие между следующими множествами:

1) $$\mathring{\mathrm{B}}_{n\times n} := \{B \in \mathrm{B}_{n\times n} \mid \sup_{z \in C_+} |B(z)| < 1\} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \mathring{\Omega}(H_N) = \{F \in \Omega(H_N) \inf_{z \in C_+} |\mathrm{Re}\, F(z)| > 0\}.$$

2) $\overset{\circ}{\mathrm{B}}_{n\times n} \cap \overset{\circ}{\tilde{W}}_{n\times n} \Longleftrightarrow \overset{\circ}{\Omega}(H_N) \cap \overset{\circ}{W}_{n\times n}$.

3) $\overset{\circ}{\mathrm{B}}_{n\times n} \cap V^{ad}_{n\times n} \Longleftrightarrow \overset{\circ}{\Omega}(H_N) \cap V^{ad}_{n\times n}$.

Теорема 3.2 играет важную роль в теории канонических дифференциальных уравнений. Дело в том, что всякий канонический дифференциальный оператор A_0, порожденный дифференциальным выражением

$$J\frac{d}{dr} - V(r)\Big(V \in L^1_{n\times n}(0, N))\ \ V^*(r) = V(r)\ (0 < r < N);$$
$$J = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix}\Big)$$

и произвольно фиксированным самосопряженным условием в нуле, порождает некоторую акселеранту $H_N(H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N);\ \mathrm{I} + \mathrm{H}_N > 0)$ такую, что множество ее спектральных мер совпадает с множеством спектральных мер эрмитового оператора A_0 с индексом дефекта (n, n). Поясним, что спектральной мерой акселеранты H_N называется мера Σ в представлении (2.1) м-функции $F \in \Omega(H_N)$ или, что одно и то же, мера Σ, фигурирующая в представлении (2.4) «переходной» функции П имеющей H_N в качестве своей акселеранты.

Отметим также, что матрица $U(z;\ N)$ дробно-линейного преобразования (3.11) непосредственно связана с матрицантом $U_1(z;\ r)$ канонического дифференциального уравнения

$$J\frac{dU_1(z, r)}{dr} - V(r)\,U_1(z;\ r) = zU_1(z;\ r);\ U_1(z; 0) = I_n, \qquad (3.12)$$

а именно, $U(z;\ N)\,U^{-1}(z;\ 0) = U_1(z;\ N)$.

В связи с этим укажем, что в процессе работы над статьей авторы имели возможность ознакомиться с препринтом работы [14], где вопрос описания суммируемых продолжений $\tilde{H}$ заданной акселеранты H_N, удовлетворяющих условию $I_n + F(\tilde{H};\ \lambda) > 0\ \forall\lambda \in R$, рассмотрен в связи с каноническими дифференциальными операторами.

В этой работе теорема об указанном описании может быть переформулирована без использования понятий и положений канонических дифференциальных уравнений, после чего она совпадает с утверждением 2) замечания 3.3. Само доказательство этой теоремы построено в работе [14] на основе ряда ошибочных положений. Отметим только, что утверждение о том, что каждая каноническая система (3.12) порождает, в определенном смысле, некоторую акселеранту $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$ в общем случае суммируемых акселерант не допускает обращения.

К сожалению, авторы [14] не заметили ошибочность рассуждений, приводящих к противоположному выводу, допущенную нами в ранних работах [15] и [16].

Подробно эти вопросы будут обсуждены в нашей следующей статье, посвященной приложениям теории акселерант к вопросам спектральной теории и теории рассеяния канонических дифференциальных уравнений (с гамильтонианом и, в частности, с потенциалом).

§ 4. Решение задачи $(C-T)$ (вырожденный случай)

1. В этом параграфе рассмотрим эрмитову акселеранту $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$ $(0 < N < \infty)$ $(H_N(t) = H_N^*(t);\ -N < t < N)$ такую, что -1 является собственным значением оператора H_N $(-1 \in \sigma(\mathrm{H}_N)$.

Вместе с $H_N (= H_{N;+})$ рассмотрим дуальную акселеранту $H_{N;-}$ и введем собственные подпространства $\mathfrak{M}_H^\pm$, отвечающие собственному значению -1 операторов $\mathrm{H}_{N;\pm}$: .

$$\mathfrak{M}_H^\pm = \{h_\pm \in L^1_{n\times n}(0,N) \,|\, (\mathrm{I} + \mathrm{H}_{N;\pm})\, h_\pm = 0\} \quad (-1 \in \sigma(\mathrm{H}_{N;\pm}).$$

Из соотношений $(3.5)_\pm$ легко следует равенство

$$\mathfrak{M}_H^\pm = \{\varphi \pm \psi \,|\, [\varphi, \psi]^\tau \in \mathfrak{M}_C\}. \tag{4.1}$$

Элементы $h_\pm \in \mathfrak{M}_H^\pm$, связанные соотношением $h_\pm = \varphi \pm \psi$ $([\varphi, \psi]^\tau \in \mathfrak{M}_C)$, будем называть „дуальными" собственными элементами.

Соотношение (4.1) даёт возможность непосредственно перенести понятие и положение подпространства $\mathfrak{M}_C$ на подпространства $\mathfrak{M}_H^\pm$.

4.1°. *Для подпространств $\mathfrak{M}_H^\pm$ справедливы включения*

$$\mathfrak{M}_H^\pm \subset \bigcap_{p=1}^{\infty} L^p_{n\times 1}(0,N) \cap AC_{n\times 1}(0, N).$$

4.2°. *Если $h_\pm \in \mathfrak{M}_H^\pm$, то $h'_\pm \in \mathfrak{M}_H^\pm$ в том и только в том случае, когда $h_\pm(0) = h_\pm(N) = 0$.*

Отметим, что вообще $h_+(0) = h_-(0)$, а $h_+(N) = -h_-(N)$.

Введем подпространства $\mathfrak{M}_H^\pm(0)$:

$$\mathfrak{M}_H^\pm(0) = \{[h_\pm(0),\ h_\pm(N)]^\tau \,|\, h_\pm \in \mathfrak{M}_H^\pm\} \subset C^{2n}.$$

Ясно, что $\mathfrak{M}_H^+ = \{[\varphi(0), \psi(N)]^\tau | [\varphi, \psi]^\tau \in \mathfrak{M}_C\} = \mathfrak{M}_C(0)$ и $\mathfrak{M}_H^- = \{[\varphi(0), -\psi(N)]^\tau | [\varphi, \psi]^\tau \in \mathfrak{M}_C\}$. Отсюда получаем

4.3°. *Подпространства $\mathfrak{M}_H^\pm(0)$ являются J-нейтральными и, следовательно, им соответствует частично изометрический угловой оператор $K: C^n \to C^n$ такой что, $h_\pm(N) = \pm K h_\pm(0)$.*

Таким образом, $\dim \mathfrak{M}_H^\pm(0) \leqslant n$.

Определение 4.1. Упорядоченная система $\{h_\pm^{[k]}\}_{k=1}^{l}$ элементов из $\mathfrak{M}_H^\pm$ называется *D-цепочкой* и обозначается $D(h_\pm^{[k]};\ l)$ если

1) $h_\pm^{[1]}(0) \neq 0$, а следовательно, и $h_\pm^{[1]}(N) \neq 0$,

2) $h_\pm^{[k]}(t) = \int\limits_0^t h_\pm^{[k-1]}(s)\, ds \ (k = \overline{2, l})$.

Элемент $h_\pm^{[1]}$ называется *базовым* элементом, а l—*длиной* D-цепочки.

D-цепочка $D(h_\pm^{[1]};\ l)$ называется *максимальной*, если в $\mathfrak{M}_H^\pm$ нет D цепочки большей длины, у которой значение в нуле базового элемента совпадают с $h_\pm^{[1]}(0)$.

Легко видеть, что одно-однозначное соответствие между множествами $\mathfrak{M}_H^\pm$ и $\mathfrak{M}_C$, устанавливаемое равенством (4.1), сохраняет свойство системы элементов быть D-цепочкой. С помощью этого соответствия из 1.3° непосредственно получаем

4.4°. *Существует система максимальных D-цепочек $D((h_{\pm}^{[1]})_k; l_k)$ $(k=\overline{1, r})$ такая, что система $\{(h_{\pm}^{[1]}(0))_k\}_{k=1}^{r}$ образует базис в $\mathfrak{M}_H^{\pm}(0)$, а система $\{(h_{\pm}^{[j]})_k\}_{j=1, k=1}^{l_k}$ образует базис в $\mathfrak{M}_H^{\pm}$ $(\dim \mathfrak{M}_H^{\pm}(0) = r$, $\dim \mathfrak{M}_H^{\pm} = \sum_{k=1}^{r} l_k)$.*

Далее, из утверждения 1.4°, в силу теоремы 3.1, получаем

4.5°. *Пусть задана акселеранта $H_N (= H_{N;+}) \in L^1_{n\times n}(-N, N)$ $(0 < N < \infty)$ такая, что $-1 \notin \sigma(\mathrm{H}_{N;\pm})$, и пусть ${}^sF \in \mathfrak{Q}(H_N)$. Тогда для любого $h_{\pm} = \varphi \pm \psi \in \mathfrak{M}_H^{\pm}$ $([\varphi, \psi]^* \in \mathfrak{M}_C)$ выполняются тождества*

$$1)\qquad F_+^*(h_+; \bar z) F_+(h_-; z) + F_+^*(h_-; \bar z) F_+(h_+; z) = 0;$$

$$2)\qquad F(z) F_+(h_+; z) = F_+(h_-; z) \quad (z \in C_+). \tag{4.2}$$

С помощью системы базисных D-цепочек $D((h_{\pm}^{[1]})_k; l_k)$ $(k = \overline{1, r})$ линеалов $\mathfrak{M}_H^{\pm}$ образуем $(n \times r)$-матрицы-функции

$$H_{\pm}(t) = [(h_{\pm}^{[1]})_1(t), (h_{\pm}^{[1]})_2(t), \cdots, (h_{\pm}^{[1]})_r(t)]. \tag{4.3}$$

В силу (4.2), для этих м-функций имеем

$$1)\qquad F_+^*(H_+; \bar z) F_+(H_-; z) + F_+^*(H_-; \bar z) F_+(H_+; z) = 0;$$

$$2)\qquad F(z) F_+(H_+; z) = F_+(H_-; z) \quad (z \in C_+). \tag{4.4}$$

2. Рассмотрим случай $\dim \mathfrak{M}_H^{\pm}(0) = n$ (определенный случай). В этом случае имеем $H_{\pm} = \Phi \pm \Psi$, где $(n \times n)$-матрицы-функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ $(z \in C_+)$ определяются равенством (1.13) и, в силу 1.4°, обратимы при $z \in \overline{C}_+ \cup \{\infty\}$.

С другой стороны, при $z \in C_+$ существуют $(I_n \pm E(z))^{-1}$, где $E(z) = F_+(\Psi; z) F_+^{-1}(\Phi; z)$ есть единственный элемент множества $\mathrm{E}(C_N; H_N)$. Отсюда следует обратимость м-функций $F_+(H_{\pm}; z)$ при $z \in C_+$.

Однако в данном случае можно утверждать большее.

4.6°. *М-функции $F_+(H_{\pm}; z)$ обратимы при любом невещественном z.*

В самом деле, введем в пространстве $L^2_{n\times 1}(0, N)$ квазискалярное произведение $(f, g)_1 = (f, g) + (\mathrm{H}_{N;+} f, g)$, и в новом пространстве рассмотрим оператор A_0, порождаемый дифференциальным выражением $i\dfrac{d}{dt}$ на многообразии $D(A_0)$ непрерывно дифференцируемых функций $f \in L^2_{n\times 1}(0, N)$, удовлетворяющих условиям $f(0) = f(N) = 0$. Легко проверить, что оператор A_0 является симметрическим. Допустим, что $\det F_+(H_+; z_0) = 0$ при $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. Рассмотрим уравнение $(A_0 + z_0 \mathrm{I})\chi = \xi_+$, где $\xi_+ = H_+ a$ и $F_+(H_+ a; z_0) = 0$. Для решения

$$\chi_0(t) = \int\limits_0^t e^{z_0(s-t)} \xi_+(s)\, ds$$

этого уравнения имеем: $\chi_0(0) = \chi_0(N) = 0$. Это означает, что $\chi_0 \in D(A_0)$. Теперь в фактор-пространстве по подпространству элементов $f \in L^2_{n\times 1}(0, N)$, удовлетворяющих условию $(f, f)_1 = 0$, рассмотрим симметрический оператор $\hat{A}_0$, порождаемый оператором A_0, и класс $\hat{\chi}_0$, содержащий функцию χ_0. Ясно, что $\hat{\chi}_0$ является собственным элементом оператора $\hat{A}_0$, отвечающим собственному значению z_0 ($\operatorname{Im} z_0 \neq 0$).

Получили противоречие. Аналогично доказывается обратимость $F_+(H_-; z)$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Резюмируя сказанное выше, сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть задана эрмитова акселеранта $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$ $(0 < N < \infty)$ такая, что $-1 \in \sigma(H_N)$ и $\dim \mathfrak{M}_H(0) = n$. Тогда множество $\Omega(H_N)$ состоит из одной м-функции $F_0(z)$, которая находится по формуле*

$$F_0(z) = F_+(H_-; z) F_+^{-1}(H_+; z),$$

где м-функции $H_\pm$ определяются по формуле (4.3).

*$\operatorname{Det} F_+(H_+; z)$ имеет только вещественные нули $\{\lambda_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ $(\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k)$ и, следовательно, функция $F_0(z)$ допускает разложение**

$$F_0(z) = \alpha + \frac{\rho_0}{z} + \sum_{\lambda_j \neq 0} \left(\frac{1}{\lambda_j - z} - \frac{1}{\lambda_j} \right) \rho_j,$$

где α — вещественная $(n \times n)$-матрица, а $(n \times n)$-матрицы $\rho_j > 0$, причем

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\rho_j}{1+\lambda_j} < \infty.$$

Можно показать, что ранг вычета ρ_j совпадает с кратностью λ_j как нуля $\det F_+(H_+; z)$ (см. [17]).

Для м-функции $\Pi_0(t) = \Pi_{F_0}(t)$ из соотношения (2.6) найдем: $\Pi_0(t) = \alpha + \sum (e^{i\lambda_j t} - 1)\rho_j/\lambda_j^2$. Дважды дифференцируя последнее равенство в смысле обобщенных функций, получим $\tilde{H}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \Pi_0(t) = \sum \rho_j e^{i\lambda_j t}$, причем $\tilde{H}(t) = H_N(t)$ при $0 < t < N$. Таким образом, в этом случае продолжение $\tilde{H}$ м-функций H_N есть обобщенная почти периодическая м-функция.

---

* Представление (4.4) следует из (2.1), поскольку в данном случае $\Sigma(\lambda)$ является ступенчатой м-функцией со скачками $\rho_j = \Sigma(\lambda_j + 0) - \Sigma(\lambda_j - 0)$. Последнее справедливо в силу того, что $F_0(z)$ является мероморфной функцией с полюсами в точках $z = \lambda_j$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Замечание 4.1. Так как $\det F_+(H_+;\ z)$ есть функция, ограниченная на вещественной оси R и имеет экспоненциальный тип, то нули $\lambda_j(j=0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \det F_+(H_+; z)$ имеют асимптотику $\lambda_j \sim c_j$ при $|j| \to \infty$, где коэффициенты c_j вычисляются по известным правилам (см. [18]).

3. Пусть теперь $-1 \in \sigma(\mathrm{H}_{N;+})$ и $\dim \mathfrak{M}_H^+(0) < n$. С помощью специального решения $\widehat{p}$ уравнения (1.17) введем м-функцию $\widehat{q}$ по формуле

$$\widehat{q}(t) = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \widehat{p}(t).$$

Легко проверить, что м-функция $\widehat{q}$ является определенным решением уравнения

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}+\mathrm{H}_{N,+} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}+\mathrm{H}_{N;-} \end{bmatrix} \widehat{q}(t) = \begin{bmatrix} -H_{N;+}(t) & -H^*_{N;+}(N-t) \\ -H_{N;-}(t) & H^*_{N;-}(N-t) \end{bmatrix} Q, \tag{4.5}$$

где Q есть ортопроектор на подпространство $C^{2n} \ominus \mathfrak{M}_H^+$.

Более того, $\widehat{q}$ есть специальное решение уравнения (4.5) вида $\widehat{q} = \widehat{q}_1 + \widehat{q}_2$, где $\widehat{q}_1$, $\widehat{q}_2$ выбираются следующим образом.

Имеем $Q = Q_1 + Q_2$, где Q_1, Q_2 суть ортопроекторы, определяемые равенством (0.15). Зафиксируем некоторое решение $\widehat{q}_2$ уравнения

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}+\mathrm{H}_{N;+} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}+\mathrm{H}_{N;-} \end{bmatrix} \widehat{q}_2(t) = \begin{bmatrix} -H_{N;+}(t) & -H^*_{N;+}(N-t) \\ -H_{N;-}(t) & H^*_{N;-}(N-t) \end{bmatrix} Q_2,$$

удовлетворяющее условию $\widehat{q}_2(t)\, Q_2 \equiv \widehat{q}_2(t)$. Далее положим $\widehat{q}_1(t) = \dfrac{d}{dt}\widehat{h}(t)$, где $\widehat{h}(t)$ есть м-функция, вектор-столбцы которой суть базовые элементы максимальных D-цепочек из $\mathfrak{M}_H^+$ таких, что $\widehat{h}(0) = Q_1$. Тогда, м-функция $\widehat{q}_1$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}+\mathrm{H}_{N;+} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}+\mathrm{H}_{N;-} \end{bmatrix} \widehat{q}_1(t) = \begin{bmatrix} -H_{N;+}(t) & -H_{N;+}(t) \\ -H_{N;-}(t) & H^*_{N;-}(t) \end{bmatrix} Q_1$$

и условию $\widehat{q}(t)\, Q_1 \equiv q_1(t)$.

Положим теперь

$$\widehat{Q}(z) = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -e^{izN} I_n \end{bmatrix} Q + \int_0^N e^{izN}\widehat{q}(t)\,dt.$$

Поскольку

$$\widehat{Q}(z) = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \widehat{P}(z),$$

в силу теорем 3.1 и 1.3 получаем:

Теорема 4.2. *Пусть задана эрмитова акселеранта* $H_N \in L^1_{n\times n}(-N, N)$ $(0<N<\infty)$ *такая, что* $-1 \in \sigma(H_{N\pm})$ *и* $\dim \mathfrak{M}^{\ddagger}_{H} < n$. *Тогда полное описание класса* $\Omega(H_N)$ *дается формулой*

$$F(z)=(\hat{Q}_{21}(z)+Q_{22}(z)B(z))(\hat{Q}_{11}(z)+Q_{12}(z)B(z))^{-1}\ (z\in C_+),$$

когда B *пробегает все* $\mathbf{B}_{n\times n}(K)$.

Физико-химический институт АН УССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 3.X.1984

Մ. Գ. ԿՐԵՅՆ, Ֆ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ. Շուրի և Կարատեոդորի—Տյոպլիցի խնդիրների մատրիցային կոնտինուալ անալոգները *(ամփոփում)*

Հոդվածում լուծված են հետևյալ խնդիրները.

Խնդիր *(S) (Շուրի խնդրի անալոգ)։ Տրված է* $C_N \in L^1_{n\times n}(0, N)$ $(0 < N < \infty)$ *մատրից-ֆունկցիան (մ-ֆունկցիան)։ Պահանջվում է՝*

1) Գտնել C_+ *-ում հոլոմորֆ և (0,1) տեսքով ներկայացվող* $E(z)$ *մ-ֆունկցիայի գոյության պայմանները։*

2) Եթե նշված $E(z)$ *մ-ֆունկցիաների* $E(C_N)$ *բազմությունը դատարկ չէ, ապա տալ* $E(C_N)$ *բազմության լրիվ նկարագրությունը։*

Խնդիր $(C-T)$ *(Կարատեոդորի-Տյոպլիցի խնդրի անալոգ)։ Տրված է* $H_N \in L^1_{n\times n}(0, N)$ $(0 < N < \infty)$ *մ-ֆունկցիան։ Պահանջվում է՝*

1) Գտնել գոյության պայմանները այնպիսի $F(z)(z\in G_+)$ *մ-ֆունկցիայի, որը բավարարում է* $\operatorname{Re} F(z) \geqslant 0$ *առնչությանը և ներկայացվում է (0,2) տեսքով, որտեղ* $\Psi(z)$ $(z\in C_+)$ *մ-ֆունկցիան բավարարում է (0,3) առնչությանը։*

2) Եթե նշված $F(z)$ *մ-ֆունկցիաների* $\Omega(H_N)$ *բազմությունը դատարկ չէ, ապա տալ* $\Omega(H_N)$ *բազմության լրիվ նկարագրությունը։*

M. G. KREIN, F. E. MELIK-ADAMIAN. *Matrix continuous analogues of Schur's and Caratheodory-Toeplitz problems* (summary)

In this paper the following two problems are considered.

Problem (S). (A version of a problem of Schur). Let $(n\times m)$ — matrix function $C_N \in L^1_{n\times m}(0, N)$ $(0<N<\infty)$ be given.

1) Give the existence condition of nonstretching holomorphic in C_+ matrix-function $E(z)$, which is representable in the form

$$E(z)=\int_0^N C_N(t)\, e^{izt}\, dt + e^{izN}\,\Phi(z)\quad (\Phi\in H^-_{n\times n}).$$

2) Describe the set $E(C_N)$ of all such matrix-functions $E(z)$.

Problem $(C-T)$. (A version of the problen of Caratheodory-Toeplitz). Let a $(n\times m)$ — matrix function $H_N \in L^1_{n\times n}(0, N)$ $(0<N<\infty)$ be given.

1) Give the existence condition of holomorphic in C_+ matrix-function $F(z)$, for which

$$\text{a) } \operatorname{Re} F(z)\geqslant 0;\ \text{b) } F(z)=I_n+2\int_0^N H_N(t)\, e^{itz}\, dt + e^{izN}\,\Psi(z),$$

where $\Psi(z)$ is a holomorphic in C_+ matrix-function, admitting the estimate $\Psi(z) = O(|z|)$, when $z \to \infty$ and $\left| \frac{\pi}{2} - \arg z \right| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \ (0 < \varepsilon < 1)$.

2) Describe the set $\Omega(H_N)$ of all such matrix-functions $F(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* Интегральные ганкелевы операторы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1984, № 4, 311—332, № 5, 339—360.
2. *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер.* Континуальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу и связанные с ним проблемы продолжения, ДАН СССР, 1981, 258, № 3, 537—542.
3. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян.* О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Мат. исследования, т. II, 1967, вып. 3, 64—96.
4. *И. Шур.* (J. Shur). Uber potenzreihen die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journ. für reine and angew. Math., 147, 1917, 205—232.
5. *И. П. Федчина.* Задача Шура для вектор-функций, Укр. матем. журн., 30:6, 1978, 797—805.
6. *Д. Сарасон* (D. Sarason). Generalized interpolation in H^∞, Trans. Am. Math. Soc., 127, 1967, № 2, 179—203.
7. *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман.* О некоторых классах непрерывных функций, порождающих эрмитово-положительные ядра, Хрк. Зап. Матем. о-ва, 25, 1957, 205—217.
8. *М. Г. Крейн.* О проблемах продолжения эрмитово-положительных функций, ДАН СССР, 26, № 1, 1940, 17—22.
9. *М. Г. Крейн.* Про ермітові оператори с напрямними функціоналами, Збірник праць математики АН УССР, № 10, 1948, 83—105.
10. *М. Г. Крейн.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m), Укр. матем. журн., № 2, 1949, 3—66.
11. *И. С. Кац, М. Г. Крейн.* R-функции—аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя, Дополнение 1 к. Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи, «Мир», 1968, 1—750, с. 630.
12. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.* Интегральные преобразования обобщенных функций, «Наука», 1977, 1—287, с. 32.
13. *И. С. Кац.* Теорема об интегральных оценках роста спектральных функций струны, Укр. матем. журн., 34, № 3, 1982, с. 297.
14. *H. Dym, A. Jacob.* Positive definite expensions, canonical equations and inverse problems, Topic in Operator Theory System and Network, The Rehovot Workship June, 1982. Birkhauser Verlag, Basel, 1984, 141—240.
15. *М. Г. Крейн.* К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1956, III, № 6, 1167—1170.
16. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* К теории S-матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом, ДАН Арм.ССР, 1968, XVI, № 4, 150—155.
17. *М. Г. Крейн.* Основные положения λ-зон устойчивости канонических систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сб. памяти А. А. Андронова, М., 1955, 413—498.