ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 1, 1986 Математика

УДК 517.986

В. А. АРЗУМАНЯН, С. А. ГРИГОРЯН

СПЕКТР РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛЕЙ

§ 0. Введение

В настоящей работе изучаются алгебры операторно-значных функций на компакте, рассматриваемые как некоммутативные аналоги равномерных алгебр. Эти алгебры являются подалгебрами т. н. C^*-алгебр операторных полей, впервые введенных Феллом в [1] (подробное изложение теории см. в монографии [2]). Некоммутативным равномерным алгебрам, интерес к которым вполне закономерен, посвящен ряд работ (см., напр., [3]—[5]), в которых обобщаются отдельные результаты, относящиеся к классическим равномерным алгебрам.

Естественным было бы ожидать, чтобы теория некоммутативных равномерных алгебр включала в себя описание такого фундаментального понятия, как пространство максимальных идеалов (спектр) и связанных с ним объектов. Неизвестно, насколько правомерна такая постановка вопроса в общем случае алгебр с переменным слоем. В данной работе делается попытка сделать это для равномерных алгебр непрерывных C^*-значных функций на компакте.

Пусть $C(T, A)$—C^*-алгебра непрерывных отображений компакта T в фиксированную C^*-алгебру A с единицей. Равномерная алгебра $\mathfrak{M}$ — это замкнутая подалгебра $C(T, A)$, разделяющая точки и содержащая константы. Для такой алгебры вводится понятие относительного спектра (опред. 3.1), заменяющего пространство максимальных идеалов и сводящегося к нему при $A = \mathbf{C}$. Надо заметить, что это понятие учитывает структуру непрерывного поля и отличается от обычного спектра даже при коммутативном слое (отличном от C^*-алгебры комплексных чисел). Определение относительного спектра кажется далеким от совершенства, однако, в важном случае A-алгебры (равномерной алгебры, являющейся A-подмодулем $C(T, A)$, опред. 1.6) оно становится безупречным (теорема 3.6). Такие алгебры возникают совершенно естественно, по своим свойствам они наиболее близки к классическим равномерным алгебрам, а результаты, относящиеся к A-алгебрам более содержательны. Отметим, что выделение этого подкласса равномерных алгебр является характерным для некоммутативной теории: это непосредственно следует из эквивалентного определения A-алгебры, как равномерной алгебры, содержащей постоянные функции. Модельным примером служит A-алгебра аналитических в единичном круге матриц-функций (аналог диск-алгебры).

Содержание работы распределено по параграфам следующим образом. В § 1 приведены необходимые определения, примеры и результаты, постоянно используемые в дальнейшем. В следующем параграфе подробно изучены условные ожидания (основной объект, фигурирующий в определении относительного спектра). Результаты носят сравнительно общий характер и представляют самостоятельный интерес. Основные факты сосредоточены в § 3, где вводится и изучается подходящее понятие спектра некоммутативной равномерной алгебры. В последнем параграфе рассматривается гельфандово представление и связанные с ним объекты. Результаты статьи разного типа — одни обобщают известные факты, другие являются новыми по существу (сводятся к тривиальным в коммутативном случае), некоторые уточняют условия, при которых существуют аналоги известных результатов.

Часть результатов работы была анонсирована в заметке [6], п. п. 1—5.

Необходимо отметить, что работа носит вводный характер и приведенные результаты—малая часть ответов на многочисленные вопросы, естественно возникающие при последовательном развитии теории. Интересной является проблема описания классов некоммутативных банаховых алгебр, «представляющихся» определенным типом равномерных алгебр.

Все сведения, касающиеся понятий и фактов, употребляемых без указания на источник, можно найти в монографиях [2], [7], [8].

§ 1. Предварительные сведения

Основными объектами в настоящей работе являются алгебры операторных полей с постоянным слоем, однако мы считаем целесообразным начать с общих понятий.

Определение 1.1. *(см. [1], [2]). Пусть T — компакт, $\{A_t, t\in T\}$ — семейство C^*-алгебр с единицей ($e_t\in A_t$). C^*-алгеброй* **A** *непрерывных сечений называется любая инволютивная подалгебра $\prod\limits_{t\in T} A_t$ (с покоординатными операциями), удовлетворяющая условиям:*

(i) для любого $x\in \mathbf{A}$ функция $t\to\|x(t)\|$ непрерывна;

(ii) для любого $t\in T$, $\{x(t),\ x\in \mathbf{A}\}=A_t$;

(iii) пусть y—сечение ($y\in\prod\limits_{t\in T} A_t$); если для любых $t_0\in T$, $\varepsilon>0$, существует $x\in\mathbf{A}$ такое, что $\|x(t)-y(t)\|<\varepsilon$ в некоторой окрестности t_0, то $y\in\mathbf{A}$.

Тот факт, что алгебра **A**, удовлетворяющая условиям (i)—(iii) определения 1.1 является C^*-алгеброй (в норме) $\|x\|=\sup\limits_{T}\|x(t)\|$) вполне очевиден (только доказательство полноты требует небольшого технического усилия). Условие (iii) определения утверждает, по существу, что любое „непрерывное“ относительно **A** сечение само принадлежит **A**. Оказывается (см. [2]), что это равносильно максимальности этой алгебры.

При каждом $t\in T$ естественно определены морфизмы $p_t\colon \mathbf{A}\to A_t$, $p_t(x)=x(t)$.

Определение 1.2 (ср. [2]). *Пусть* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ — *две* C^*-*алгебры непрерывных сечений на* T, *порождаемые, соответственно, семействами* $\{A_t\}$, $\{A'_t\}$. *Отображение* $\Phi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, $\Phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}'$ *называется изоморфизмом* C^*-*алгебр непрерывных сечений, если существует семейство изоморфизмов* $\{\Phi_t,\ t \in T\}$, $\Phi_t\colon A_t \to A'_t$, *такое, что при любом* $t \in T$ *коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{A}' \\ p_t\downarrow & & \downarrow p_t \\ A_t & \xrightarrow{\Phi_t} & A'_t \end{array}$$

Очевидно, что Φ есть *-изоморфизм C^*-алгебр $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ (специального вида). Вообще говоря, могут существовать неизоморфные алгебры непрерывных сечений с одинаковыми слоями. В дальнейшем изоморфные C^*-алгебры непрерывных сечений мы не будем различать.

Определение 1.3. (ср. [3], [5]). *Пусть* $\mathbf{A}$—C^*-*алгебра непрерывных сечений на компакте* T. *Равномерной алгеброй называется замкнутая подалгебра* $\mathfrak{M} \subset \mathbf{A}$, *удовлетворяющая условиям:*

(i) $\mathfrak{M}$ *содержит единицу* $\mathbf{A}$;

(ii) *для любого* $t \in T$, $\{x(t),\ t \in T\} = A_t$;

(iii) *для любых* $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$ *существует* $x \in \mathfrak{M}$, *такое, что* $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = e_{t_2}$.

Легко проверить, что замкнутая подалгебра $\mathfrak{M} \subset \mathbf{A}$ равномерна тогда и только тогда, когда она содержит константы и разделяет точки T в следующем смысле:

(iv) для любых $t_1, t_2 \in T$, $a_1 \in A_{t_1}$, $a_2 \in A_{t_2}$, существует $x \in \mathfrak{M}$ $x(t_1) = a_1$, $x(t_2) = a_2$.

Заметим, что в силу максимальности $\mathbf{A}$, для любой функции $f \in C(T)$ сечение $\underline{f}$, определяемое формулой

$$\underline{f}(t) = f(t)\, e_t,$$

принадлежит $\mathbf{A}$. Более того, равномерная алгебра, содержащая алгебру всех таких сечений (изоморфную $C(T)$ и обозначаемую $\underline{C(T)}$), совпадает с $\mathbf{A}$ (см. [4]).

Равномерные алгебры непрерывных сечений являются некоммутативным обобщением обычных равномерных алгебр. Как уже было отмечено во введении, для них, при различных предположениях, справедливы некоторые факты классической теории равномерных алгебр. Мы ограничиваемся случаем алгебр непрерывных сечений с постоянным слоем, что позволяет сделать более обстоятельным и последовательным построение некоммутативного аналога.

Пусть T—компакт, A—C^*-алгебра с единицей e, $C(T, A)$—алгебра непрерывных отображений из T в A. Тогда C^*-алгебра непрерывных сечений $C(T, A)$ содержит постоянные сечения $\underline{a}$, определяемые для каждого $a \in A$ следующим образом:

$$\underline{a}(t) = a.$$

Обозначим через $\underline{A}$ подалгебру (изоморфную A) всех таких сечений.

Заметим, что существует множество C^*-алгебр непрерывных сечений на T со слоями $A_t = A$, $t \in T$, отличных от $C(T, A)$, но изоморфных ей (в смысле определения 1.2).

Следующие утверждения легко доказываются.

Предложение 1.4. (i) *Алгебра $C(T, A)$ порождается своими подалгебрами $\underline{C(T)}$ и $\underline{A}$ и является $C(T)$-и A-бимодулем.*

(ii) *C^*-алгебра A непрерывных сечений на компакте T со слоями $A_t = A$ совпадает с $C(T, A)$ тогда и только тогда, когда $A \subset \mathrm{A}$.*

(iii) *Имеет место соотношение $Z(C(T, A)) = C(T, Z(A))$, где $Z(M)$ означает центр алгебры M.*

Таким образом, алгебра $C(T, A)$ является замыканием $*$-алгебры конечных линейных комбинаций вида $\sum \underline{a}_i \underline{f}_i$, где $a_i \in A$, $f_i \in C(T)$, которую мы обозначаем $C_0(T, A)$.

Заметим, что каждое состояние Φ на $C(T, A)$ определяет вероятностную меру на T и измеримое поле φ_t состояний алгебры A, причем

$$\Phi(x) = \int_T \varphi_t(x(t))\, d\mu(t).$$

Однако для целей настоящей работы мы ограничимся доказательством следующего утверждения:

Теорема 1.5. *Каждое состояние Φ на $C(T, A)$, сужение которого на $\underline{A}$ является чистым состоянием, представляется в виде*

$$\Phi(x) = \int_T \varphi(x(t))\, d\mu(t),$$

для некоторой вероятностной меры μ на T.

Доказательство. Пусть μ—мера на T, которую определяет состояние $\Phi|_{C(T)}$.

Для любого открытого множества $U \subset T$ рассмотрим монотонно возрастающую последовательность функций $f_n \in C(T)$, $n = 1, 2, \ldots$ таких, что

(i) $0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1$, $t \in T$,

(ii) для любого $t \in T$, $f_n(t) \to \chi_U(t)$, при $n \to \infty$, где χ_U — характеристическая функция множества U.

Пусть $x \in C(T, A)$, тогда, в силу монотонности последовательности f_n, существует предел $\lim_{n \to \infty} \Phi(\underline{f}_n x)$, не зависящий от конкретного выбора последовательности f_n. Если $0 < \mu(U) < 1$, то, очевидно, функционал Φ_U

$$\Phi_U(x) = \frac{1}{\mu(U)} \lim_{n \to \infty} \Phi(\underline{f}_n x)$$

является состоянием на алгебре $C(T, A)$ так же, как и состояние

$$\Phi_{T \setminus U}(x) = \frac{1}{\mu(T \setminus U)} \lim_{n \to \infty} \Phi(x - \underline{f}_n x).$$

Следующее соотношение очевидно:

$$\Phi = \mu(U)\Phi_U + \mu(T\setminus U)\Phi_{T\setminus U}.$$

Кроме того, т. к. φ—чистое состояние,

$$\Phi|_{\underline{A}} = \Phi_U|_{\underline{A}} = \Phi_{T\setminus U}|_{\underline{A}} = \varphi. \tag{1.1}$$

Пусть $a \in A$, $f \in C(T)$, $\varepsilon > 0$ и пусть $\{U_i\}_{i=1}^m$ — конечное покрытие T открытыми множествами такое, что для некоторых $\alpha_i \in \mathbf{C}$, $i=1, 2, \cdots, m$

$$\left\| f - \sum_1^m \alpha_i \chi_{U_i} \right\| < \frac{\varepsilon}{3\|a\|}.$$

Подберем для любого $i=1, 2, \cdots, m$, функцию g_i из последовательности, аппроксимурующей χ_{U_i}, такую, что

$$\left\| f - \sum_1^m \alpha_i g_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3\|a\|},$$

причем

$$|\Phi(\underline{a}g_i) - \mu(U_i)\Phi_{U_i}(\underline{a})| < \frac{\varepsilon}{3\sum|\alpha_i|}.$$

Теперь, в силу (1.1)

$$|\Phi(\underline{a}\underline{f} - \varphi(a)\Phi(\underline{f})| \leqslant |\Phi(\underline{a}\underline{f}) - \Phi(\underline{a}\sum \alpha_i \underline{g}_i)| +$$

$$+ |\sum \alpha_i \Phi(\underline{a}\underline{g}_i) - \sum \alpha_i \mu(U_i)\Phi_{U_i}(\underline{a})| + |\sum \alpha_i \mu(U_i)\varphi(a) - \varphi(a)\Phi(\underline{f})| <$$

$$< \|a\|\frac{\varepsilon}{3\|a\|} + \sum |\alpha_i| \frac{\varepsilon}{3\sum|\alpha_i|} + |\varphi(a)| \frac{\varepsilon}{3\|a\|} < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\Phi(\underline{a}\underline{f}) = \varphi(a)\int f d\mu = \int \varphi(a) f d\mu = \int \varphi(af(t))\, d\mu(t).$$

В силу предложения 1.4, для любого $x \in C(T, A)$,

$$\Phi(x) = \int \varphi(x(t))\, d\mu(t).$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваемые равномерные алгебры являются подалгебрами $C(T, A)$.

Из класса всех равномерных подалгебр $C(T, A)$ естественно выделить те, которые являются подмодулями A-бимодуля $C(T, A)$.

Определение 1.6. *Равномерная алгебра $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$ называется A-алгеброй, если $\underline{A} \subset \mathfrak{M}$.*

Следующее предложение очевидно.

Предложение 1.7. *Замкнутая подалгебра $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$ является A-алгеброй тогда и только тогда, когда $\underline{A} \subset \mathfrak{M}$ и для любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, существует $x \in \mathfrak{M}$, $x(t_1)=0$, $x(t_2)=e$.*

Простейшим примером A-алгебры служит минимальная замкнутая подалгебра $C(T, A)$, порожденная A и M, где M—некоторая равномерная подалгебра $C(T)$. В частности, если M—диск-алгебра (аналитических в открытом и непрерывных в замкнутом единичном круге функций), то получается некоммутативное обобщение диск-алгебры. Эта алгебра является примером равномерной алгебры, инвариантной относительно сдвигов компактной группы—носителя. Такие алгебры будут подробно изучены в последующих публикациях (см. [6], п. п. 7, 8).

Очевидно, не каждая A-алгебра получается таким путем.

С другой стороны, если $A = M_n C$, (C^*-алгебра комплексных матриц порядка n), то, как показывает следующее утверждение, все A-алгебры таковы.

Предложение 1.8. *Пусть $A = M_n C$. Тогда любая A-алгебра $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$, порождается алгеброй $\underline{A}$ и некоторой равномерной алгеброй M, $M \subset C(T)$.*

Доказательство. Каждый элемент $x \in \mathfrak{M}$ реализуется в виде матриц-функций $(f_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, где $f_{ij} \in C(T)$; при этом $x \in \underline{A}$, если f_{ij} — константы, $x \in \underline{C(T)}$, если $f_{ij} = 0$, $i \neq j$, $f_{ii} = f_{jj}$, $i, j = 1, \cdots, n$. Пусть $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — система матричных единиц алгебры $M_n C$, тогда, очевидно, $\underline{e}_{ij} \in \mathfrak{M}$ при всех i, j. Обозначим через M минимальную подалгебру $C(T)$, которой принадлежат все f_{ij}, $i, j = 1, \cdots, n$, когда x пробегает алгебру $\mathfrak{M}$. Покажем, что M — искомая равномерная алгебра. Действительно, пусть $x \in \mathfrak{M}$, тогда для любой пары (i, j), очевидно

$$\underline{f}_{ij} = \sum_{1}^{n} \underline{e}_{ki}\, x\, \underline{e}_{jk} \in \underline{M} \subset \underline{C(T)} \cap \mathfrak{M}.$$

Поскольку $\underline{M}$ замкнуто в $\underline{C(T)}$ то соответствующая алгебра M образует замкнутую подалгебру $C(T)$. Если $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, то существует $x \in \mathfrak{M}$, $x(t_1) \neq x(t_2)$ (предл. 1.7), откуда для некоторой пары (i, j), $f_{ij}(t_1) \neq f_{ij}(t_2)$.

Следовательно M—равномерная алгебра, $M \subset C(T)$, причем, очевидно, A вместе с $\underline{M}$ порождают алгебру $\mathfrak{M}$.

§ 2. Условные ожидания

В этом параграфе изучаются общие факты, относящиеся к понятию условного ожидания, постоянно применяющиеся в дальнейшем. Некоторые из них общеизвестны и приводятся для полноты, в большинстве случаев даны новые доказательства.

Для простоты изложения всюду предполагается, что C^*-алгебры обладают единицей.

Определение 2.1. (ср. [8], [9]). *Пусть* A *—C^*-алгебра и A—ее C^*-подалгебра, содержащая единицу* A. *Условным ожиданием p называется A-билинейное положительное отображение* A *на A, сохраняющее единицу.*

Множество $P(\mathrm{A}, A)$ всех условных ожиданий (снабженное топологией поточечной сходимости) образует выпуклое подмножество конуса всех положительных операторов из A в A. Здесь A-билинейность означает, что $p(axb)=ap(x)b$ для любых $a, b\in A$ и $x\in \mathbf{A}$. Отсюда сразу следует, что p есть проектор.

Предложение 2.2. *Пусть* $p\in P(\mathbf{A}, A)$, $J=\ker p$. *Тогда J является самосопряженным A-бимодулем,* $J\cap A=\{0\}$, *причем* $J\oplus A=\mathbf{A}$ (*т. е. для любого* $x\in\mathbf{A}$ *существуют однозначно определенные* $j\in J$, $a\in A$, *такие, что* $x=j+a$). *Кроме того справедливы соотношения*:

(i) $p(x^*)=p(x)^*$,

(ii) $p(x)^*p(x)\leqslant p(x^*x)$,

(iii) $p(x^*y)p(y^*x)\leqslant \|y\|^2 p(x^*x)$,

(iv) $\|p\|=1$.

Доказательство. Свойства J проверяются непосредственно. Утверждение (i) есть простое следствие положительности p. Для доказательства (ii) предположим $x=j+a$, $j\in J$, $a\in A$, тогда $p(x^*x)=$ $=a^*a+p(j^*j)\geqslant a^*a=p(x)^*p(x)$, так как $p(j^*j)\geqslant 0$. Чтобы показать (iii) заметим вначале, что для любого $y\in\mathbf{A}$, $x^*y^*yx\leqslant\|y\|^2x^*x$, откуда, в силу (ii), $(p(x^*y)p(y^*x)\leqslant p(x^*yy^*x)\leqslant\|y\|^2p(x^*x)$. Далее, из (iii) следует, что $\|p(xy)\|^2\leqslant\|y\|^2\|p(x^*x)\|$, откуда, положив $x=e$, имеем $\|p\|\leqslant 1$. Поскольку p — проектор, $\|p\|\geqslant 1$, получаем (iv).

Таким образом, условное ожидание есть проектор с нормой 1. Заметим, что верно и обратное (теорема Томияма): любой проектор нормы 1 с C^*-алгебры на некоторую ее подалгебру есть условное ожидание ([8], [9]).

Предложение 2.3. *Пусть* $p\in P(\mathbf{A}, A)$, $J=\ker p$. *Тогда*
(i) *если* $h\in J_+$ $(h\in J, h\geqslant 0)$, *то для любого рационального* $r>0$, $h^r\in J$;

(ii) *минимальная C^*-подалгебра* $\mathbf{A}$, *содержащая* J_+, *сама содержится в* J;

(iii) *если* $h\in J$, $\operatorname{Re}h>0$, $\operatorname{Im}h>0$, *то* $h^*h\in J$ *и* $hh^*\in J$.

Доказательство. (i) Пусть $n, m\in\mathbf{N}$, $h\in J_+$, тогда при $n\geqslant m$, в силу (iii) предложения 2.2, имеем

$$\|p(h^{\frac{n}{m}})\|^2=\|p(h^{\frac{1}{2}}\cdot h^{\frac{2n-m}{2m}})\|^2\leqslant\|h^{\frac{2n-m}{2m}}\|^2\cdot p(h)=0. \tag{2.1}$$

Если же $n<m$, то для k такого, что $2^k\cdot n>m$ получаем в силу (iii) предложения 2.2 и (2.1)

$$\|p(h^{\frac{n}{m}})\|^{2^k}\leqslant\|p(h^{\frac{2n}{m}})\|^{2^{k-1}}\leqslant\cdots\leqslant\|p(h^{\frac{2^kn}{m}})\|=0.$$

Отметим, что (i) верно и для любого действительного $r>0$. (ii) следует из (i) и того, что при любых $h_1, h_2\in J$,

$$\|p(h_1h_2)\|^2\leqslant\|h_1\|^2\|p(h_2^2)\|.$$

(iii) очевидно, в силу самосопряженности J и свойства (ii).

Определение 2.4. *Пусть* $\mathbf{A}$ — C^*-*алгебра*, A — C^*-*подалгебра* $\mathbf{A}$. *Самосопряженный замкнутый A-подмодуль* $J\subset\mathbf{A}$ *будем называть A-максимальным, если выполнены следующие условия:*

(i) $J\cap A=\{0\}$, $J\oplus A=\mathbf{A}$;

(ii) *для любых* $h\in J$, $h>0$, $x, y\in\mathbf{A}$, *имеет место* $xhy\in J$.

Следующий результат характеризует в некоторых случаях (важных для нас) ядра условных ожиданий:

Теорема 2.5. *Пусть J—A-максимальный подмодуль C^*-алгебры* $\mathbf{A}$. *тогда он является ядром единственного условного ожидания* $p \in P(\mathbf{A}, A)$. *Обратно, пусть C^*-алгебра* $\mathbf{A}$ *порождается C^*-подалгебрами A и* $Z(\mathbf{A})$, $p \in P(\mathbf{A}, A)$, *тогда* $\ker p$ *есть A-максимальный подмодуль алгебры* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Пусть J — A-максимальный подмодуль алгебры $\mathbf{A}$. Для любого $x \in \mathbf{A}$, $x = a + j$ корректно определен оператор проектирования на первую компоненту: $p(x) = a$. Очевидно. что p является A-билинейным отображением $p: \mathbf{A} \to A$, причем $p(e) = e$. В силу самосопряженности подмодуля J, p отображает эрмитовы элементы $\mathbf{A}$ в эрмитовы элементы A. Достаточно показать, что p является положительным оператором.

Предположим вначале, что $J_+ = \{0\}$ и пусть $x \geqslant 0$, $x = a + h$. Тогда $a = a^*$ и, следовательно, $a = a_+ - a_-$, где $a_+ \geqslant 0$, $a_- \geqslant 0$, $a_+ a_- = a_- a_+ = 0$. Допустим $a_- \neq 0$, тогда $a_- x a_- = a_-^3 + a_- h a_-$, и так как $a_- x a_- \geqslant 0$, то $a_- h a_- = a_- x a_- + a_-^3 \geqslant 0$. Поэтому $a_- h a_- = 0$ в силу нашего предположения и A-максимальности J. Отсюда получаем $a_- x a_- = -a_-^3$ и, следовательно $a_- = 0$. Таким образом, $p(\mathbf{A}_+) = A_+$.

Пусть теперь $J_+ \neq \{0\}$. Тогда замыкание I подалгебры $\mathbf{A} J \mathbf{A}$ является двусторонним идеалом алгебры $\mathbf{A}$, содержащимся в J (в силу A-максимальности). Рассмотрим фактор-алгебру $\mathbf{A}/I$ и естественное $*$-отображение $\pi: \mathbf{A} \to \mathbf{A}/I$, которое порождает разложение C^*-алгебры $\mathbf{A}/I$:

$$\mathbf{A}/I = \pi(A) \oplus \pi(J),$$

где C^*-алгебра $\pi(A)$ $*$-изоморфна алгебре A (так как $A \cap \ker p = \{0\}$), $i: \pi(A) \to A$. В силу того, что $\ker \pi \subset J$, $\pi(J)$ является замкнутым $\pi(A)$-подмодулем $\pi(A)$-бимодуля $\mathbf{A}/I$. Покажем, что $\pi(J)_+ = \{0\}$. Действительно, если $h \in \pi(J)_+$, то найдется положительный элемент $j \in A$, и следовательно из J, такой, что $\pi(j) = h$, откуда $\pi(j) = 0$. Таким образом, $\pi(J)$ является $\pi(A)$-максимальным $\pi(A)$-подмодулем $\mathbf{A}/I$ (условие (ii) определения 2.4 тривиально выполнено). Тогда, по предыдущему, оператор q проектирования на первую координату, $q: \mathbf{A}/I \to \pi(A)$ является условным ожиданием. Как легко проверить, $p = i^0 q \circ \pi$, поэтому p также положительный оператор и, следовательно, есть условное ожидание.

Обратно, пусть $p \in P(\mathbf{A}, A)$, причем $\mathbf{A} = C^*\{A, Z(\mathbf{A})\}$ и пусть $J = \ker p$. Тогда, из предложения 2.2, J — самосопряженный замкнутый A-подмодуль $\mathbf{A}$, причем $J \cap A = \{0\}$ и если $x \in \mathbf{A}$, то разложение $x = p(x) + (x - p(x))$ однозначно. Условие (ii) определения 2.4 достаточно проверить для $h \in J_+$, $x, y \in Z(\mathbf{A})$. В силу (iii) предложения 2.2 и (i) предложения 2.3, имеем

$$\|p(xhy)\|^2 = \|p(xyh)\|^2 \leqslant \|xy\|^2 \|p(h^2)\| = 0.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Заметим, что условия теоремы выполнены для $\mathrm{A}=C(T, A)$, см. §1.

На алгебре $C(T, A)$ выделяются два типа условных ожиданий, соответственно на подалгебры $\underline{A}$ и $\underline{C(T)}$. Обозначим множество всех условных ожиданий $p: C(T, A) \to \underline{A}$ (соответственно $q: C(T, A) \to \underline{C(T)}$ через $P(T, A)$, вместо $P(\mathrm{A}, A)$ (соответственно $Q(T, A)$). Например, оператор p_t, определенный ранее (§ 1), $p_t(x)=x(t)$ есть пример условного ожидания $p_t \in P(T, A)$. Множество $P(T, A)$ играет важную роль в наших рассмотрениях, мы изучим его подробно в следующем параграфе. Сейчас обратим основное внимание на множество $Q(T, A)$, наделенное слабой топологией.

Предложение 2.6. *Пусть $S(A)$—множество всех состояний алгебры A. Тогда $Q(T, A)$ гомеоморфно множеству $C(T, S(A))$ всех непрерывных отображений $h: T \to S(A)$, снабженное топологией поточечной сходимости.*

Доказательство. Пусть $q \in Q(T, A)$, тогда, если

$$h_q(t)(a) = q(\underline{a})(t),$$

то, как легко проверить, $h_q \in C(T, S(A))$. Обратно, пусть $h \in C(T, S(A))$, положив для любого $x \in C(T, A)$

$$q_h(x)(t) = h(t)(x(t)),$$

q_h определяет некоторое условное ожидание из $Q(T, A)$. Подробное доказательство не представляет трудностей.

Следствие 2.7. *Пусть $\mathfrak{M}$— равномерная алгебра $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$, $q \in Q(T, A)$. Тогда полный образ $q(\mathfrak{M})$ не тривиален (т. е. содержит в себе непрерывные функции, отличные от констант).*

Доказательство. В самом деле, пусть $x \in \mathfrak{M}$, $x(t_0)=0$, $x(t_1)=e$ и пусть $h \in C(T, S(A))$ — функция, отвечающая q в силу предложения 2.6. Тогда

$$q(x)(t_0) = h(t_0)(x(t_0)) = 0,$$

$$q(x)(t_1) = h(t_1)(e) = 1.$$

Пространство $Q(T, A)$ играет важную роль во взаимоотношениях между равномерными подалгебрами $C(T, A)$ и $C(T)$. Подробное освещение подобных вопросов мы оставляем на будущее.

§ 3. Относительный спектр равномерных алгебр

Здесь вводится понятие спектра для некоммутативных равномерных алгебр, которое связано со структурой непрерывного поля. При $A=\mathrm{C}$ получается обычный компакт максимальных идеалов.

Определение 3.1. *Относительным спектром (или A-спектром) равномерной алгебры $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$ называется множество $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ всех гомоморфизмов $p: \mathfrak{M} \to A$, которые продолжаются до условного ожидания $p \in P(T, A)$, снабженное топологией поточечной сходимости.*

В силу того, что любая точка $t \in T$ определяет отображение $p_t : \mathfrak{M} \to A$ (см. § 1) $p_t(x) = x(t)$, которое, как легко убедиться, является условным ожиданием, множество T вложено в $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ как компактное подмножество; при этом $\mathrm{Sp}_A C(T, A)$ состоит из A-билинейных гомоморфизмов $C(T, A) \to A$.

Следующее утверждение описывает относительный спектр равномерной алгебры в терминах соответствующих идеалов.

Предложение 3.2. *Относительный спектр $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ равномерной алгебры $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$ биективен множеству двусторонних замкнутых идеалов $\mathfrak{M}$, продолжаемых до некоторого A-максимального подмодуля $C(T, A)$.*

Доказательство состоит в комбинации теоремы 2.5 и утверждения (i) предложения 1.4.

Заметим, что вообще говоря $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ не является компактом, однако, в некоторых важных случаях это можно гарантировать. Как показывает следующий результат, это верно в случае, если A имеет тривиальный центр, в частности является простой алгеброй.

Теорема 3.3. *Пусть C^*-алгебра A имеет тривиальный центр ($Z(A) = \mathbf{C}e$). Тогда относительный спектр любой равномерной алгебры является компактом.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$—равномерная алгебра $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. Покажем вначале, что $P(T, A)$ — компакт. В силу предложения 1.4, каждое условное ожидание p определяется своими значениями на $\underline{C(T)}$. Кроме того из A-линейности p следует, что $p(\underline{C(T)}) \subset Z(A)$ и, следовательно, по условию теоремы, ему отвечает некоторое состояние на $C(T)$. Поэтому достаточно проверить, что множество всех таких состояний замкнуто в компакте состояний на $C(T)$. Пусть $\varphi_n = p_n|_{\underline{C(T)}}$— последовательность, сходящаяся к некоторому состоянию φ. Оно определяет оператор p_0 на $C_0(T, A)$ по формуле

$$p_0(\sum \underline{a_i} \underline{f_i}) = \sum a_i \varphi(f_i),$$

где $a_i \in A$, $f_i \in C(T)$.

Поскольку для любого $n = 1, 2, \cdots$

$$\|\sum_i a_i \varphi_n(f_i)\| = \|p_n(\sum_i \underline{a_i} \underline{f_i})\| \leqslant \|\sum_i \underline{a_i} \underline{f_i}\|,$$

то

$$\|\sum a_i \varphi(f_i)\| \leqslant \|\sum \underline{a_i} \underline{f_i}\|,$$

откуда следует непрерывность p_0 на всюду плотном подмножестве $C_0(T, A) \subset C(T, A)$ (см. предложение 1.4). Поэтому оператор p_0 продолжается на $C(T, A)$ до проектора на подалгебру $\underline{A}$ с нормой 1 и, по теореме Томияма, является условным ожиданием. При этом, очевидно $p|_{\underline{C(T)}} = \varphi$. Итак, $P(T, A)$ — компакт. Обозначая через R подмножество $P(T, A)$ такое, что $R|_{\mathfrak{M}} = \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$, заметим, что для окончания доказательства остается отметить простой факт: R является замкнутым подмножеством $P(T, A)$.

Замечание. На самом деле любое состояние на $C(T)$ продолжается до условного ожидания на $C(T, A)$. Действительно если μ — вероятностная мера на T (отвечающая некоторому состоянию на $C(T)$), то канонически определено условное ожидание $p_\mu \in P(T, A)$ по формуле

$$p_\mu(x) = \int_T x(t)\, d\mu(t),$$

где интегрирование понимается в естественном смысле.

Следующий результат дает описание A-спектра алгебры $C(T, A)$.

Предложение. 3.4. *Пространство* $\mathrm{Sp}_A\ C(T, A)$ *гомеоморфно множеству непрерывных отображений пространства максимальных идеалов* $Z(A)$ *в* T, *снабженного топологией поточечной сходимости.*

Доказательство. Обозначим пространство максимальных идеалов алгебры $Z(A)$ через X.

Пусть $p \in \mathrm{Sp}_A C(T, A)$, тогда, как уже было отмечено в начале доказательства теоремы 3.3, $p: C(T) \to Z(A)$, поэтому существует однозначно определенное непрерывное отображение p^* (двойственное к $p|_{C(T)}$) $p^*: X \to T$. Ввиду того, что рассматриваются слабые топологии, отображение $p \to p^*$ непрерывно.

Обратно, пусть α — непрерывное отображение $\alpha: X \to T$. Тогда, отождествляя $C(T, Z(A))$ с $C(T \times X)$ и $Z(A)$ с $C(X)$, определим отображение $p_0: C(T, Z(A)) \to Z(A)$ по формуле

$$(p_0 f)(x) = f(\alpha(x), x).$$

Нетрудно проверить, что p_0 является $Z(A)$-линейным $*$-гомоморфизмом. Наша цель — продолжить его до A-линейного гомоморфизма на $C(T, A)$.

Пусть вначале $a \in A$ и M_a — коммутативная C^*-подалгебра A порождена $Z(A)$ и элементом a^*a, тогда $M_a = C(Y)$, где Y — компакт максимальных идеалов алгебры M_a. Так как $Z(A) \subset M_a$, то существует сюръекция $\beta: Y \to X$, поэтому композиция $\alpha \circ \beta$ отображает Y на T и, как и выше, определяет M_a-линейный $*$-гомоморфизм $p_a: C(T, M_a) \to$ $\to M_a$, являющийся продолжением p_0, т. е. $p_a|_{C(T, Z(A))} = p_0$.

Обозначим через I двусторонний замкнутый идеал $\ker p_0$ в алгебре $C(T, Z(A))$, а через Λ — множество всех состояний на $C(T, A)$, аннулирующих I. Покажем, что для любого $a \in A$ существует $\varphi_a \in \Lambda$, $\varphi_a(\underline{a}^* \underline{a}) = \|a\|^2$.

В самом деле, пусть ψ — состояние на M_a такое, что $\psi(a^*a) =$ $= \|a\|^2$. Тогда $\varphi = \psi \circ p_a$ является состоянием на $C(T, M_a)$, причем, очевидно, $I \subset \ker \varphi$ и $\varphi(\underline{a}^* \underline{a}) = \|a\|^2$. В качестве φ_a теперь можно взять любое состояние на $C(T, A)$, продолжающее φ.

Пусть теперь J—минимальная замкнутая подалгебра $C(T, A)$, содержащая AI. В силу (i) предложения 1.4, J является двусторонним идеалом алгебры $C(T, A)$, и следовательно A-подмодулем $C(T, A)$, удовлетворяющим условию (ii) определения 2.4. Наша ближайшая цель — доказать, что J удовлетворяет условию (i) этого определения.

Пусть $a \in \underline{A} \cap J$ и пусть $\varphi_a \in \Lambda$, так что $\varphi_a(\underline{a}^* \underline{a}) = \|a\|^2$. Для любых $b \in A$ и $h \in J$ имеем

$$|\varphi_a(\underline{b}\,h)|^2 \leqslant \|b\|^2 \varphi_a(h^* h) = 0.$$

Поэтому $\varphi_a|_J = 0$, откуда $\varphi_a(\underline{a}^* \underline{a}) = 0$ и, следовательно, $a = 0$. Таким образом, $\underline{A} \cap J = \{0\}$.

Заметим, что $\underline{A} \oplus J$ есть замкнутая подалгебра $C(T, A)$ (см 1.2.4, [8]) и $C(T, \underline{Z(A)}) = Z(A) \oplus I$ (теорема 2.5). Поэтому, в силу предложения 1.4, $\underline{C(T)} \subset \underline{A} \oplus J$ и, следовательно, $C(T, A) = \underline{A} \oplus J$. Снова по теореме 2.5, J является ядром некоторого условного ожидания $p \in P(T, A)$, более того, A-линейным гомоморфизмом (так как J идеал), продолжающим p.

Чтобы завершить доказательство, напомним (см. доказательство теоремы 3.3), что два условных ожидания, совпадающих на $\underline{C(T)}$, совпадают всюду.

Следствие 3.5. *Пусть C^*-алгебра A имеет тривиальный центр. Тогда*

$$\mathrm{Sp}_A\, C(T, A) = T.$$

Доказательство очевидно.

Для определенного класса алгебр понятие относительного спектра можно сделать более удобным:

Теорема 3.6. *Пусть A — простая C^*-алгебра с единицей, $\mathfrak{M}$ — равномерная A-алгебра, $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. Тогда $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ совпадает с множеством всех нетривиальных A-линейных гомоморфизмов $p : \mathfrak{M} \to A$.*

Доказательство. Достаточно показать, что любой такой гомоморфизм продолжается до условного ожидания на $C(T, A)$.

Пусть $I = \ker p$, тогда I является идеалом, причем, в силу A-линейности p имеем: $I \cap \underline{A} = \{0\}$, $I \oplus \underline{A} = \mathfrak{M}$. Докажем, что $\bar{I} = I$. Отметим, что $\underline{e} \notin \bar{I}$, так как в противном случае в I нашелся бы элемент, достаточно близкий к e и, следовательно, обратимый. Более того, $\bar{I} \cap \underline{A} = \{0\}$, так как для $a \in A \setminus \{0\}$ идеал AaA совпадает с A (в силу простоты A) и если бы $\underline{a} \in I$, то и $A \subset \bar{I}$, в частности $\underline{e} \in \bar{I}$, что неверно. Поэтому $\bar{I} = I$ и, следовательно, p — непрерывен. Покажем, наконец, что $\|p\| = 1$. Пусть $\|p\| > 1$, тогда, очевидно, существует $x \in A$, $\|x\| < 1$, а $\|p(x)\| = 1$. Для $y = p(x)^* x$ имеем: $\|y\| \leqslant \|p(x)\| \cdot \|x\| < 1$, $\|p(g)\| = \|p(x)^* p(x)\| = \|p(x)\|^2 = 1$ и $p(y) = p(x)^* p(x) > 0$. Поэтому $e - p(y)$ не обратим в A, что противоречит тому, что $\underline{e} - y$ обратим в $\mathfrak{M}$ и, следовательно, $\|p\| = 1$.

Обозначим через $U(A)$ множество унитарных элементов A, через $PS(A)$ — множество чистых состояний алгебры A и зафиксируем некоторое $\varphi \in PS(A)$. Тогда $\varphi_p = \varphi \cdot p$ является, очевидно, линейным функционалом на $\mathfrak{M}$ с нормой 1. Пусть Φ — некоторое продолжение φ_p на алгебру $C(T, A)$, сохраняющее норму и являющееся, следовательно, состоянием. Для любого $u \in U(A)$ обозначим через Φ_u состояние, определяемое формулой $\Phi_u(x) = \Phi(u^* x u)$ и пусть

$$J = \bigcap_{u \in U(A)} \ker \Phi_u.$$

Очевидно, что $I \subset J$, причем J является самосопряженным замкнутым линейным подпространством $C(T, A)$. Докажем, что $J \cap A = \{0\}$. Пусть, противное, $0 \neq a_0 \in A$, причем $\varphi_u(a_0) = \varphi(u^* a_0 u) = 0$ для любого $u \in U(A)$.

Обозначим через ψ чистое состояние, для которого $\psi(a_0) \neq 0$. В силу того, что алгебра A проста, состояние ψ аппроксимируется (в слабой топологии) состояниями вида $\varphi_b(a) = \varphi(b^* a b)$ (см. 3.4.3, [2]), откуда следует, что для некоторого b, $\varphi_b(a_0) \neq 0$. Поэтому, по теореме о транзитивности (2.8.3, [2]), для некоторого $u \in U(A)$, $\varphi_u(a_0) \neq 0$, что приводит к противоречию.

Пусть $J_0 = \underline{C(T)} \cap J$. Покажем, что $\underline{A} J_0 \subset J$. Действительно, для любого $u \in U(A)$, $a \in A$, $j_0 \in J_0$, в силу теоремы 1.5

$$\Phi_u(\underline{a} j_0) = \int \varphi_u(\underline{a} j_0(t))\, d\mu(t) = \varphi_u(a) \int j_0(t)\, d\mu(t) = \varphi_u(a)\, \Phi_u(j_0) = 0. \tag{3.1}$$

Покажем теперь, что для любого $a \in A$ и $j_0 \in \underline{A} J_0$

$$\|a\| < \|\underline{a} + j_0\|.$$

В самом деле, пусть ψ — чистое состояние на A, для которого $\psi(a^* a) = \|a\|^2$. Тогда, как уже было отмечено выше, для любого $\varepsilon > 0$ существует $u \in U(A)$ такое, что

$$|\psi(a^* a) - \varphi_u(a^* a)| < \varepsilon.$$

Следовательно, в силу (3.1),

$$\|a\|^2 - \varepsilon = \|a^* a\| - \varepsilon = \psi(a^* a) - \varepsilon \leqslant \varphi_u(a^* a) =$$
$$= \Phi_u(\underline{a}^* (\underline{a} + j)) \leqslant \|\underline{a}^* (\underline{a} + j)\| \leqslant \|a\| \|\underline{a} + j\|,$$

откуда получаем (3.2).

Далее покажем, что $\underline{A} + \underline{A} J_0$ всюду плотно в $C(T, A)$. В силу предложения 1.4, достаточно проверить, что $A + AJ_0 = C_0(T, A)$. Действительно, так как J_0 имеет коразмерность 1 в $\underline{C(T)}$, то для $a \in A$, $f_i \in C(T)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ имеем однозначное представление (с некоторыми $\alpha_i \in \mathbf{C}$, $g_i \in J_0$):

$$\sum \underline{a}_i f_i = \sum \underline{a}_i (\alpha_i \underline{e}_i + g_i) = \sum \alpha_i \underline{a}_i + \sum \underline{a}_i g_i \in \underline{A} + \underline{A} J_0.$$

Итак, на $C_0(T, A)$ определен ограниченный оператор p_0: $C_0(T, A) \to A$, который продолжается на $C(T, A)$ до проектора p с нормой 1, являющегося, по теореме Томияма, условным ожиданием

Для окончания доказательства достаточно проверить, что $J=\ker p$. В самом деле, $\overline{\underline{A}J_0}=\ker p$, откуда $\ker p\subset J$, а поскольку $J\cap \underline{A}=\{0\}$ и, по теореме 2.5, $\ker p+\underline{A}=C(T, A)$, получаем $J\subset\ker p$, и т. д.

Равномерные A-алгебры простой структуры (см. замечание после предложения 1.7) допускают полное описание относительного спектра.

Предложение 3. 7. *Пусть A — простая C^*-алгебра и $\mathfrak{M}$ — равномерная подалгебра $C(T, A)$, порожденная алгебрами $\underline{A}$ и $\underline{M}$, где M — равномерная подалгебра $C(T)$. Тогда $\mathrm{Sp}_A\mathfrak{M}$ совпадает с пространством максимальных идеалов алгебры M.*

Доказательство. Ясно, что любое $p\in\mathrm{Sp}_1\mathfrak{M}$ определяет элемент $\varphi\in\mathrm{Sp}\,M$ (пространство максимальных идеалов алгебры M), как сужение на соответствующую подалгебру: $\varphi(f)\underline{e}=p(\underline{f})$. Обратно, пусть $\varphi\in\mathrm{Sp}\,M$; для $x\in C_0(T, A)\cap\mathfrak{M}$, $x=\sum\underline{a_i}\,\underline{f_i}$ (см. предл. 1.4 и далее), положим

$$p(x)=\sum\underline{a_i}\,\varphi(f_i).$$

Проверим ограниченность этого оператора на $C_0(T, A)\cap\mathfrak{M}$. Пусть $\varepsilon>0$, тогда, по теореме Крейна—Мильмана, найдутся $t_1, t_2,\cdots, t_m\in T$ и $\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_m>0$, $\sum\limits_1^m\alpha_j=1$, такие, что для любого $i=1,2,\cdots, n$,

$$|\varphi(f_i)-\sum_{j=1}^m\alpha_j f_i(t_j)|<\frac{\varepsilon}{n\sum\|a_i\|}.$$

Отсюда, как нетрудно проверить

$$\|p(x)-\sum\alpha_j x(t_j)\|<\varepsilon.$$

Поскольку $\|\sum\alpha_j x(t_j)\|<\|x\|$, то, в силу произвольности ε, p продолжается на все $\mathfrak{M}$ до оператора с нормой 1. Очевидно, p является A-линейным гомоморфизмом и, следовательно, по теореме 3.6, $p\in\mathrm{Sp}_A\mathfrak{M}$. Из самой конструкции p видно, что соответствие между $\mathrm{Sp}\,M$ и $\mathrm{Sp}_A\mathfrak{M}$ есть гомеоморфизм.

В частности, спектр «некоммутативной» диск-алгебры (см. конец §1) совпадает с пространством максимальных идеалов коммутативной (обычной) диск-алгебры—единичным кругом.

§ 4. Представление Гельфанда

Для каждой равномерной алгебры $\mathfrak{M}\subset C(T, A)$ можно определить представление, аналогичное гельфандовскому, с помощью непрерывных сечений на $\mathrm{Sp}_A\mathfrak{M}$: если $x\in\mathfrak{M}$, то положим $\hat{x}(p)=p(x)$, $p\in\mathrm{Sp}_A\mathfrak{M}$. Полученная таким образом алгебра $\hat{\mathfrak{M}}\subset C(\mathrm{Sp}_A\mathfrak{M}, A)$ вообще говоря, не является равномерной по многим причинам. Следующий результат показывает, что для A-алгебр с простым слоем представление Гельфанда обладает свойствами, близкими к классическим.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — равномерная A-алгебра, $\mathfrak{M}\subset C(T, A)$, где A — простая C^*-алгебра. Тогда*:

(i) *представление Гельфанда $\widehat{\mathfrak{M}}$ алгебры $\mathfrak{M}$ есть равномерная A-алгебра на $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$;*

(ii) $\mathrm{Sp}_A \widehat{\mathfrak{M}} = \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$.

Доказательство. В силу теоремы 3.3, $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ — компакт. Очевидно (принимая во внимание топологию $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$), что $\widehat{\mathfrak{M}}$ является подалгеброй $C(\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}, A)$, содержащей $\underline{A}$ $(\widehat{\underline{a}}(p) = p(\underline{a}) = a$, для любого $a \in A$, $p \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M})$. Алгебра $\widehat{\mathfrak{M}}$ замкнута в $C(\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}, A)$, так как если $\widehat{x}_l \in \widehat{\mathfrak{M}}$ фундаментальна, то $x_l \to x \in \mathfrak{M}$, откуда для любого $p \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$,

$$\|\widehat{x}_l(p) - \widehat{x}(p)\| \leqslant \|p(x_l - x)\| \leqslant \|x_l - x\| \to 0.$$

В заключение достаточно показать (см. определение 1.3), что для любых $p_1, p_2 \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$, $p_1 \neq p_2$, существует $x \in \mathfrak{M}$, $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = e$. Действительно, пусть $x_0 \in \mathfrak{M}$, $a_1 = p_1(x_0) \neq p_2(x_0) = a_2$, тогда $A(a_2 - a_1)A$ есть двусторонний замкнутый идеал A и, следовательно, совпадает с A. Поэтому для некоторых b_i, $c_j \in A$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, $\sum_{i,j=1}^{n} b_i(a_2 - a_1)c_j = e$. Пусть $x = \sum_{i,j=1}^{n} \underline{b}_i(x_0 - \underline{a}_1)\underline{c}_j$. Тогда $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = e$, откуда следует (i).

Для доказательства (ii) заметим, что в силу теоремы 3.6, гельфандово представление индуцирует непрерывное отображение

$$\tau : \mathrm{Sp}_A \widehat{\mathfrak{M}} \to \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$$

по формуле

$$(\tau p)(x) = p(\widehat{x}), \quad p \in \mathrm{Sp}_A \widehat{\mathfrak{M}}, \ x \in \mathfrak{M},$$

которое, как легко проверить, является биекцией. Таким образом теорема доказана.

При рассмотрении гельфандова представления естественным является изучение связи между обратимостью элемента x исходной алгебры и ее представляющей функции $\widehat{x}$, в частности, совпадение спектра x с множеством значений функции $\widehat{x}$. В отличие от классической теории, положение в некоммутативном случае более сложное. Конечно, в силу изоморфизма алгебры $\mathfrak{M}$ и ее гельфандова представления, $\mathrm{Sp}\, x = \mathrm{Sp}\, \widehat{x}$, однако вместо множества значений $\widehat{x}$ приходится рассматривать иной объект, который мы назовем относительным спектром элемента x.

Определение 4.2. *Пусть $\mathfrak{M}$-равномерная алгебра $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. Относительным (или A-) спектром элемента $x \in \mathfrak{M}$ называется множество*

$$\mathrm{Sp}_A x = \bigcup \mathrm{Sp}\, p(x),$$

где объединение берется по всем $p \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$.

Предложение 4.3. *Пусть* $\mathfrak{M}$*-равномерная алгебра,* $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$, *где* A — *проста. Тогда для любого* $x \in \mathfrak{M}$, $\mathrm{Sp}_A x$ *является подкомпактом* $\mathrm{Sp}\, x$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathrm{Sp}_A x \subset \mathrm{Sp}\, x$. Докажем, что $\overline{\mathrm{Sp}_A x} = \mathrm{Sp}_A x$. Пусть $\lambda_0 \in \overline{\mathrm{Sp}_A x}$, тогда для некоторой последовательности $\lambda_n \in \mathrm{Sp}_A x$, $\lambda_n \to \lambda_0$.

Пусть $\lambda_n \in \mathrm{Sp}\, p_n(x)$. В силу компактности $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ (теорема 3.3) существует подпоследовательность $p_{n_k} \to p_0$, $p_0 \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$. Покажем, что $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}\, p_0(x)$. Если предположить противное, т. е. обратимость элемента $p_0(x) - \lambda_0 e \in A$, то в некоторой его окрестности все элементы также обратимы. Однако это противоречит тому, что $p_{n_k}(x) - \lambda_{n_k} e \to p_0(x) - \lambda_0 e$.

Следующий результат выделяет класс алгебр, для которых обратимость элемента эквивалентна поточечной обратимости его представляющей функции.

Предложение 4.4. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *равномерная алгебра* $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. *Для того, чтобы* A*-спектр любого элемента алгебры* $\mathfrak{M}$ *совпадал с его спектром необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $x \in \mathfrak{M}$ *из обратимости в* A *всех* $p(x)$, $p \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ *следовала обратимость* x.

Доказательство. Пусть для любого $x \in \mathfrak{M}$, $\mathrm{Sp}_A x = \mathrm{Sp}\, x$. Тогда если для любого $p \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ существует $p(x)^{-1}$, то $0 \overline{\in} \mathrm{Sp}\, p(x)$, следовательно $0 \overline{\in} \mathrm{Sp}\, x$.

Обратно, пусть обратимость $p(x)$ для любого p влечет обратимость x и пусть $\lambda \overline{\in} \mathrm{Sp}_A x$. Тогда для любого $p \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$, $\lambda \overline{\in} \mathrm{Sp}\, p(x)$, т. е. $p(\lambda \underline{e} - x)$ обратим в A. По условию $\lambda \underline{e} - x$ обратим в $\mathfrak{M}$ и, следовательно, $\lambda \overline{\in} \mathrm{Sp}\, x$.

Примером алгебры, удовлетворяющей условиям предыдущего предложения, служит равномерная алгебра с матричным слоем (см. предл. 1.8).

Предложение 4.5. *Пусть* $A = M_n\mathbb{C}$, $\mathfrak{M}$ — *равномерная* A*-алгебра,* $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. *Тогда для любого* $x \in \mathfrak{M}$, $\mathrm{Sp}_A x = \mathrm{Sp}\, x$.

Доказательство. В силу предложения 4.4 достаточно проверить, что если $x \in \mathfrak{M}$ и для любого $p \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$, $p(x)$ обратим в A, то x обратим в $\mathfrak{M}$. Пусть M — равномерная подалгебра $C(T)$ такая, что $\underline{M}$ вместе с $\underline{A}$ порождает алгебру $\mathfrak{M}$ (см. предложение 1.8). В обозначениях доказательства предложения 1.8 элемент x представляется в виде

$$x = \sum_{i, j=1}^{n} e_{ij} \underline{f}_{ij}.$$

Из предложения 3.7 имеем $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M} = \mathrm{Sp}\, M$, причем для любого $p \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$

$$p(x) = \sum_{i, j=1}^{n} e_{ij} \varphi(f_{ij}), \text{ где } \varphi \in \mathrm{Sp}\, M.$$

Очевидно, что $\det x \in M$ и, как легко видеть,

$$\det p(x) = \varphi(\det x).$$

Это означает, что обратимость $p(x)$ для любого $p \in \mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ эквивалентна обратимости $\det x$ как элемента M, что, в свою очередь, влечет обратимость x.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26.X.1984

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Օպերատորային դաշտերի հավասարաչափ հանրահաշիվների սպեկտրը *(ամփոփում)*

Աշխատանքը նվիրված է ոչ կոմուտատիվ հավասարաչափ հանրահաշիվներին, որոնք իրենցից ներկայացնում են T *կոմպակտից* A *ֆիքսած* C*-*հանրահաշվին անընդհատ արտապատկերումների* C(T,A) C*-*հանրահաշվի փակ ենթահանրահաշիվներ (հաստատուններ պարունակող և կետեր տարբերող)։ Այդպիսի հանրահաշվի համար մտցվում և ուսումնասիրվում է հարաբերական սպեկտր (մաքսիմալ իդեալների տարածության ընդհանրացում), սահմանվող որպես* A-*ի մեջ այդպիսի հոմոմորֆիզմների բազմություն, որոնք շարունակվում են մինչև* C(T,A)-*ից պայմանական սպասում իր* A-*ին իզոմորֆ ենթահանրահաշվի վրա։ Մանրակրկիտ ուսումնասիրված է այն հավասարաչափ հանրահաշիվների կառուցվածքը և հատկությունները, որոնք հանդիսանում են* A*— բիմոդուլ* C(T,A)-*ի* A-*ենթամոդուլ։*

V. A. ARZUMANIAN, S. A. GRIGORIAN. *The spectrum of uniform algebras of operator fields* (summary)

The paper is devoted to the non-commutative uniform algebras, i. e. closed subalgebras (which separates the points and contains the constants) of the C^*-algebra $C(T, A)$ of all continuous maps of a compact T to some fixed unital C^*-algebra A. For such an algebra we introduce and study the relative spectrum (a generalization of the notion of maximal ideal space) defined as a set of all homomorphisms into A, which may be extended up to a conditional expectation of $C(T, A)$ onto the subalgebra, isomorphic to A. The structure and properties of the uniform algebras which are A-submodules of the A-bimodule $C(T, A)$ are investigated in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Fell.* The structure of algebras of operator fields, Acta Math., 106, 3–4, 1961, 233—280.
2. *Ж. Диксмье.* С*-алгебры и их представления, М., 1974.
3. *D. C. Taylor.* Interpolation in algebras of operator fields, J. of Funct. Anal., 10, 2, 1972, 159—190.
4. *D. C. Taylor.* A general Hoffman- Wermer theorem for algebras of operator fields, Proc. of A. M. S., 52, 1975, 212—216.
5. *A. Sallaz.* Une extension d'un theorem de K. Hoffman et J. Wermer aux algèbres de champe continus d'operateurs, C. R. Acad. Sc. de Paris, ser. A, 284, 17, 1977, 1049—1051.
6. *В. А. Арзуманян, С. А. Григорян.* Равномерные алгебры операторных полей, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 123, 1983, 185—189.
7. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, М., 1973.
8. *S. Sakai.* C*-algebras and W*-algebras, Springer—Verlag, 1971.
9. *S. Strătilă.* Modular theory in Operator Algebras, Editura Academiei and Abacus Press, 1981.