ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 1, 1986 Математика

УДК 517.98

А. А. ВАГАРШАКЯН

О ДИСКРЕТНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВИНЕРА-ХОПФА С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ СИМВОЛАМИ

Настоящая статья посвящена исследованию уравнения

$$x_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j}\, x_j,\ k=0, 1, \cdots. \tag{1}$$

Функцию

$$a(z) = 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\, z^j,\ |z| = 1,$$

принято называть символом уравнения (1). Если символ $a(z)$—непрерывная функция и нигде не обращается в нуль, то уравнение (1) достаточно хорошо исследовано, см. [1], [9], [12]. Определенный интерес представляет случай, когда $a(z)$ обращается в нуль. Обзор результатов работ, относящихся к случаю, когда символ уравнения (1) обращается в нуль в конечном числе точек, можно найти в книге З. Прёсдорфа [2] и [10], [11]. К исследованию случая, когда $\alpha(z)$ имеет бесконечно много нулей, посвящено сравнительно мало работ, см. [3], [4] и др. В этих работах разрабатывается вид общего решения уравнения (1).

Настоящая статья посвящена исследованию уравнения (1), символ которого может иметь бесконечно много нулей. В первом параграфе, опираясь на обобщение теоремы Сегё, доказывается, что если $a(z)$ имеет очень «сильные» нули, то уравнение (1) не может иметь нетривиального решения. Во втором параграфе найдены условия, обеспечивающие существование нетривиального решения уравнения (1), причем даны оценки решения, имеющего наименьший рост. В нем приводится также обобщение принципа Фрагмена-Линделефа, которое позволяет доказать теорему о точности оценки роста нетривиального решения.

1°. Как показывают исследования, относящиеся к случаю, когда $a(z)$ обращается в нуль в конечном числе точек, общая картина такова: если $\alpha(z)$ обращается в нуль,, то однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение, причем это решение, как правило, неограниченно возрастает при $j \to +\infty$. В связи с этим, естественно на $a(z)$ наложить такие условия, при которых уравнение (1) имеет смысл для $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$, растущих при $j \to +\infty$. Сначала мы займемся этим вопросом.

Введем некоторые обозначения. Пусть задана последовательность положительных чисел $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям:

1. $M_0 = 1,\ M_n \leqslant M_{n+1}$;

2. для всякого $x \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{M_n} = 0$;

3. $M_n^2 \leqslant M_{n+1} M_{n-1}$, $n \geqslant 1$.

Пусть E—замкнутое множество, лежащее на единичной окружности. Обозначим через $C(E, \{M_n\})$ пространство бесконечно дифференцируемых функций, для которых

$$\max_{z\in E} |f^{(n)}(z)| \leqslant M^n n! M_n, \; n=0, 1, \cdots,$$

где M—число, зависящее от функции f. Наименьшее из чисел M обозначим $\|f\|_{C(E, \{M_n\})}$. В случае, когда E совпадает со всей единичной окружностью ∂D, будем пользоваться также обозначением $C\{M_n\} = C(\partial D, \{M_n\})$. Пространство распределений, порождающих непрерывные линейные функционалы на $C\{M_n\}$, обозначим через $C^*\{M_n\}$.

В силу известной теоремы Т. Карлемана класс $C\{M_n\}$ не квазианалитичен в том и только в том случае, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{n M_{n+1}} < \infty. \tag{2}$$

Следовательно, при выполнении условия (2) имеет смысл говорить о носителе распределений из $C^*\{M_n\}$.

Последовательности M_n, $n=0, 1, \ldots$, которые удовлетворяют всем перечисленным выше условиям, называются допустимыми.

Если $a(z) \in C\{M_n\}$, то уравнение (1) можно записать и в следующей форме:

$$f(z^{-n-1}) = 0, \; f(a(z) z^n) = 0, \; n = 0, 1, \cdots. \tag{3}$$

Здесь неизвестным является распределение $f \in C^*\{M_n\}$, причем x_n — коэффициенты Фурье распределения f.

Естественно возникает следующая задача: какие следует наложить условия на $a(z)$, чтобы уравнение (3) имело только тривиальное решение? Из общей теории, см. [1], следует, что если $a(z)$—непрерывная функция, не обращающаяся в нуль и $\operatorname{ind} a = 0$, то уравнение (1) в пространствах l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ имеет только тривиальное решение. Оказывается, что если $a(z)$ имеет «очень сильные» нули, то уравнение (3) может иметь только тривиальное решение. Действительно, пусть $a(z)$ обращается в нуль на дуге $\Delta \subseteq \partial D$. Предположим, что $f \in C^*\{M_n\}$ является решением уравнения (3). Рассмотрим функцию

$$F(z) = f\left(\frac{a(\zeta)}{\zeta - z}\right), \; z \in \partial D.$$

Из соотношения $f(a(z) z^n) = 0$, $n = 0, 1, \cdots$ следует, что $F(z) \equiv 0$ при $z \in D$. С другой стороны, $F(z)$ аналитически продолжается через дугу Δ. Следовательно, $F(z) \equiv 0$ при $z \in \partial D \setminus \Delta$. Отсюда следует, что распределение $f(a\cdot)$ тождественно обращается в нуль. Если $a(z) \not\equiv 0$, что f сосредоточена там, где $a(z)$ обращается в нуль. Если $a(z) \not\equiv 0$, то существует дуга Δ^*, где f обращается в нуль. Повторяя приведенные выше рассуждения и учитывая соотношения $f(z^{-n-1})=0$, $n=0,1,\cdots$, получаем $f\equiv 0$.

Приведем еще один пример уравнения (3), где наличие сильных нулей у символа $a(z)$ является причиной отсутствия нетривиального решения. Пусть $a(z)$—непрерывная функция, а f—распределение, порожденное конечной мерой. Так как $f(z^{-n-1})=0$, $n=0, 1,\cdots$, то в силу теоремы Рисса, f порождается абсолютно непрерывной мерой. Допустим, что

$$f(g)=\int\limits_{\partial D} f(z)\, g(z)\, dm(z),\ g\in C(\partial D).$$

Тогда второе семейство условий в (3) можно записать в виде:

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\, a(z)\, z^n\, dm(z)=0,\ n=0,\ 1,\cdots.$$

В силу теоремы Сегё для того, чтобы $f(z)\,a(z)\equiv 0$, необходимо и достаточно условие $\log|f(z)\,a(z)|\,\overline{\in}\, L_1(\partial D)$. Так как $\log|f(z)|\in L_1(\partial D)$, то мы проходим к условию $\log|a(z)|\,\overline{\in}\, L_1(\partial D)$.

Приведенная ниже теорема является обобщением известной теоремы Сегё. Она позволяет привести новые классы уравнений вида (3), которые имеют только тривиальное решение.

Теорема 1. *Пусть* $a(z)\in C\{n^{\alpha n}\}$, $f\in C^*\{n^{\alpha n}\}$, $0<\sigma<\infty$, *удовлетворяют условию*

$$f(a(z)\,z^n)=0,\ n=0,\ 1,\cdots.$$

Тогда из существования замкнутого множества $E\subseteq\partial D$ *такого, что* $M_\sigma(E)>0$, $0<\sigma\leqslant 1$ *и*

$$\varliminf_{\delta\to 0}\ \delta^{1-\sigma+\frac{2-\sigma}{\alpha}}\log\|a\|_{C(E_\delta,\{n^{\alpha n}\})}=-\infty,$$

где $E_\delta=\bigcup_{z\in E}\{w,\ w\in\partial D,\ |z-w|\leqslant\delta\}$, *следует включение*

$$\operatorname{supp} f\subseteq\{z,\ z\in\partial D \text{ и } a(z)=0\}.$$

Доказательство. В силу теоремы О. Фростмана, см. [5], существует вероятностная мера $d\mu$, сосредоточенная в E и такая, что для любой дуги $\Delta\subseteq\partial D$ имеет место оценка:

$$\mu(\Delta)\leqslant c\,|\Delta|^\sigma,$$

где $c>0$—постоянное число, а $|\Delta|$—длина дуги Δ. Пусть $\delta>0$—некоторое число. Введем функцию

$$F_\delta(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\,\frac{\mu(x+\delta)-\mu(x-\delta)}{2\delta}\,dx\right\}.$$

Заметим, что эта функция допускает оценку

$$\frac{1}{|F_\delta(z)|}\leqslant\exp\left\{\frac{c}{(2\delta)^{1-\sigma}}\right\},\ |z|<1.$$

Далее, оценим значения функций

$$F(z)=\exp\left\{\int\limits_E \frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\mu(\zeta)\right\}$$

на множестве

$$\Omega=\{z;\ z\in D,\ 1-|z|\leqslant A\,\rho^{2-\sigma}(z,\ E)\},$$

где $\rho(z,\ E)$—расстояние точки z от множества E.

Имеет место неравенство

$$\int\limits_F \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\mu(\zeta)\leqslant 2\,A\,\rho^{2-\sigma}(z,\ E)\int\limits_E \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-\zeta_0|^2+\rho^2(z,E)},$$

где ζ_0 — ближайшая к z точка множества E. Интегрируя по частям, получаем

$$\rho^{2-\sigma}(z,\ E)\int\limits_{x_0}^{x_0+\pi}\frac{\mu(x)-\mu(x_0)}{[(x-x_0)^2+\rho^2(z,E)]^{3/2}}dx\leqslant\rho^{2-\sigma}(z,\ E)\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}\frac{t^\sigma}{(t^2+\rho^2(z,\ E))^{3/2}}\,dt,$$

где $\zeta_0=e^{ix_0}$. Следовательно, функция $F(z)$ ограничена в области Ω, причем число A можно выбрать настолько малым, чтобы имело место неравенство:

$$|F(z)|\leqslant 1+\varepsilon,\quad z\in\Omega,$$

где $\varepsilon>0$—наперед заданное число.

Введем функцию

$$\Phi(z)=F_\delta^n((1-\delta^{2-\sigma})\,z)\,f\left(\frac{a(\zeta)}{(\zeta-z)\,F_\delta^n((1-\delta^{2-\sigma})\,\zeta)}\right),\ |z|<1.$$

Заметим, что эта функция не зависит от n и δ. Далее, имеем

$$|\Phi(z)|\leqslant|F_\delta^n((1-\delta^{2-\sigma})\,z)|\,\|f\|_{C^*\{n^{\alpha n}\}}\|a(\zeta)\,F_\delta^{-n}((1-\delta^{2-\sigma})\,\zeta)\|_{C\{n^{\alpha n}\}}\times$$

$$\times\|(\zeta-z)^{-1}\|_{C\{n^{\alpha n}\}}.$$

Из интегрального представления Коши и неравенства Гарнака следует оценка

$$\left|\frac{d^m}{dz^m}F_\delta^{-n}(z)\right|\leqslant\frac{4^m\,m!}{\delta^{(2-\sigma)\,m}}\max_{|z-w|=\frac{1}{2}\delta^{2-\sigma}}|F_\delta^{-n}(w)|\leqslant\frac{4^m\,m!}{\delta^{(2-\sigma)\,m}}|F_\delta^{-12n}(z)|,$$

где $|z|=1-\delta^{2-\sigma}$. Учитывая ранее полученную оценку для функции $F(z)$ в области Ω, имеем

$$\left|\frac{d^m}{dz^m}F_\delta^{-n}((1-\delta^{2-\sigma})\,z)\right|\leqslant A_0^m\,\frac{m!}{\delta^{(2-\sigma)\,m}}\,e^{cn},$$

где $0<c<1$, $|z|=1$, $\rho(z,\ E)\geqslant\left(1+\frac{1}{A}\right)\delta$. Далее, заметим, что при $|z|=1$ и $\rho(z,\ E)\leqslant\left(1+\frac{1}{A}\right)\delta$ имеет место оценка

$$\left|\frac{d^m}{dz^m}F_\delta^{-n}((1-\delta^{2-\sigma})z)\right| \leqslant \frac{2^m\, m!}{\delta^{(2-\sigma)m}} \max_{|z-\xi|<\frac{1}{2}\delta^{2-\sigma}} \left|F_\delta^{-n}((1-\delta^{2-\sigma})\xi)\right| \leqslant$$

$$\leqslant A_1^m \frac{m!}{\delta^{(2-\sigma)\,m}}\, e^{\frac{n}{(2\delta)^{1-\sigma}}}.$$

Введем еще одну функцию

$$f_{\delta,\,n}(z)=e^{-n}\, a(z)\, F_\delta^{-n}\left((1-\delta^{2-\sigma})\, z\right),\ |z|=1.$$

Для этой функции имеет место следующая оценка:

$$\|f_{\delta,\,n}\|_{C\,\{n^{\alpha n}\}} \leqslant \|a\|_{C\,(E_\delta,\,\{n^{\alpha n}\})}\, \|e^{-n} F_\delta^{-n}\left((1-\delta^{2-\sigma})z\right)\|_{C\,(E_\delta,\,\{n^{\alpha n}\})} +$$

$$+\|a\|_{C\,\{n^{\alpha n}\}}\, \|e^{-n} F_\delta^{-n}\left((1-\delta^{2-\sigma})\, z\right)\|_{C\,(\partial D\setminus E_\delta,\,\{n^{\alpha n}\})} \leqslant$$

$$\leqslant \|a\|_{C\,(E_\delta,\,\{n^{\alpha n}\})} \sup_{m\geqslant 1}\left[\frac{A_1^m}{(2\delta)^{(2-\sigma)\,m}\, m^{\alpha m}}\, e^{\frac{n}{(2\delta)^{1-\sigma}}}\right]^{1/m} +$$

$$+\|a\|_{C\,\{n^{\alpha n}\}} \sup_{m\geqslant 1}\left[\frac{A_0^m}{(2\delta)^{(2-\sigma)\,m}\, m^{\alpha m}}\, e^{-(1-c)\,n}\right]^{1/m} \leqslant$$

$$\leqslant B\,\frac{e^{\frac{n}{(2\delta)^{1-\sigma}}}}{\delta^{2-\sigma}}\, \|a\|_{C\,(E_\delta,\,\{n^{\alpha n}\})} + \frac{B}{\delta^{2-\sigma}}\, \|a\|_{C\,\{n^{\alpha n}\}} \sup_{m\geqslant 1}\left[\frac{e^{-(1-c)\,n}}{m^{\alpha m}}\right]^{1/m}. \qquad (4)$$

Из условия теоремы следует, что можно выбрать такую последовательность δ_n, чтобы $n\delta_n^{\frac{2-\sigma}{\alpha}} \to 0$ при $n\to\infty$ и, кроме этого

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{n}{(2\delta_n)^{1-\sigma}}}}{\delta_n^{2-\sigma}}\, \|a\|_{C\,(E_{\delta_n},\,\{n^{\alpha n}\})} = 0.$$

Подставляя выбранную последовательность в (4), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{\delta_n,\,n}\|_{C\,\{n^{\alpha n}\}} = 0.$$

Следовательно

$$\Phi(0) = F^n_{\delta_n}(0)\, f\left(\frac{a(\zeta)}{\zeta F^n_{\delta_n}((1-\delta_n^{2-\sigma})\,\zeta)}\right) = f\left(\zeta^{-1} f_{\delta_n,\,n}(\zeta)\right) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $F_\delta(0)=e^{-1}$. Аналогичными рассуждениями можно доказать, что $\Phi(z)=0$ при $|z|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — некоторое число. Поэтому $\Phi(z)\equiv 0$ при $|z|<1$. Окончательно получаем, что распределение $f(a\cdot)$ удовлетворяет условию:

$$f(a(z)\, z^n)=0,\ n=0,\ \pm 1,\cdots.$$

Следовательно, $f(a\cdot)\equiv 0$. Откуда следует, что

$$\operatorname{supp} f \subseteq \{z;\ z\in\partial D,\ a(z)=0\}.$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение для уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть* $a(z)\in C\{n^{\alpha n}\}$, $0<\alpha<\infty$, *существует замкнутое множество* $E\subseteq\partial D$ *такое, что* $M_\sigma(E)>0$, $0<\sigma<1$ *и*

$$\varliminf_{\delta\to 0}\ \delta^{1-\sigma+\frac{2-\sigma}{\alpha}}\lim \|a\|_{C(E_\delta,\{n^{\alpha n}\})}=-\infty.$$

Тогда уравнение (1) не может иметь нетривиального решения, допускающего оценку

$$|x_n|<A\,e^{Bn^{\frac{1}{1+\alpha}}},\quad n=0,1,\cdots,\tag{5}$$

где A и B—постоянные числа.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — некоторое решение уравнения (1), допускающее оценку (5). Введем распределение f, которое на функциях z^n, $n=0,\pm1,\cdots$ принимает значения

$$f(z^n)=0,\ n=-1,-2,\cdots,\ f(z^n)=x_n,\ n=0,1,\cdots.$$

Из оценки (5) следует, что $f\in C^*\{n^{\alpha n}\}$, см. С. Мандельбройт [6]. Так как $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ является решением уравнения (1), то $f(a(z)z^n)=0$, $n=0,1,\cdots$. В силу теоремы 1

$$\operatorname{supp} f\subseteq\{z;\ z\in\partial D,\ a(z)=0\}.\tag{6}$$

Пусть $\Delta\subseteq\partial D$—некоторая дуга, где $a(z)$ не обращается в нуль. Построим функцию $\varphi(z)\in C\{n^{\alpha n}\}$ такую, что на Δ она тождественно обращается в нуль, а в некоторой окрестности $\operatorname{supp} f$ равна единице. В силу (6), $f(\varphi\cdot)\equiv f(\cdot)$. Далее, имеем

$$f(\varphi(z)z^n)=f(z^n)|=0,\ n=-1,-2,\cdots.$$

В силу теоремы 1, имеем $\operatorname{supp} f\subseteq\{z;\ \varphi(z)=0\}$. Следовательно, $f\equiv0$.

2°. Таким образом, наличие «сильных» нулей у символа $a(z)$ может стать причиной отсутствия нетривиальных решений уравнения (1). В настоящем параграфе предполагается, что $a(z)$ не имеет «сильных» нулей. В частности, в течение всего параграфа предполагается, что $\log|a(z)|\in L_1(\partial D)$. При некоторых дополнительных ограничениях удается построить нетривиальное решение.

Теорема 3. *Пусть символ уравнения* (1) *удовлетворяет следующим условиям:*

1. $\log|a(z)|\in L_1(\partial D)$, *функция* $\dfrac{a(z)}{|a(z)|}$ *допускает непрерывное продолжение на всю* ∂D *и ее преобразование Гильберта ограничено,* $\operatorname{ind}\dfrac{a(z)}{|a(z)|}=0$;

2. *для некоторой допустимой последовательности* M_n, $n=0,1,\cdots$, $a(z)\in C\{M_n\}$;

3. *существует замкнутое множество*

$$E\subseteq\{z;\ z\in\partial D,\ a(z)=0\}$$

такое, что $M_\alpha(E)>0$, $0<\alpha<1$, *и сходится интеграл*

$$\int_{\partial D} \frac{\sqrt{|a(z)|}}{\rho^{1-\alpha}(z, E)}\, dm(z) < \infty;$$

4. *существует функция* $\lambda(x) \geqslant 1$, $x > 0$, *такая, что*

$$\lambda(x)\,(x\lambda''(x) + \lambda'(x)) \leqslant x\,(\lambda'(x))^2, \quad x^2\lambda(x) \leqslant C \sup_k \frac{x^k}{M_k}, \quad x > 1,$$

и для любой дуги $\Delta \subseteq \partial D$ *имеет место оценка*

$$\frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta} \log \frac{1}{\sqrt{|a(z)|}}\, dm(z) < \log \lambda\left(\frac{1}{|\Delta|}\right) + C.$$

Тогда уравнение (1) имеет нетривиальное решение, допускающее оценку

$$|x_n| \leqslant A n^{\frac{1-\alpha}{2}} \lambda(n).$$

Доказательство. *Факторизуем функцию* $a(z)$. *Определим факторы следующими формулами:*

$$a_+(z) = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} \log a(e^{ix})\,dx\right\}, \quad |z| < 1$$

и

$$a_-(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} \log a(e^{ix})\,dx\right\}, \quad |z| > 1.$$

Заметим, что почти всюду на ∂D имеет место равенство

$$\lim_{r \to 1-0} a_+(r\zeta)\, a_-\left(\frac{\zeta}{r}\right) = \frac{1}{a(\zeta)}.$$

Теперь выясним к какому пространству принадлежит функция $a_+(z)$? Имеем

$$\log|a_+(z)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{ix}-z|^2} \log \frac{1}{|a(e^{ix})|}\,dx + C \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{ix}-z|^2} \left(\frac{1}{2x}\int_{y-x}^{y+x} \log \frac{1}{|a(e^{it})|}\,dt\right) dx + C_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{ix}-z|^2} \log \lambda\left(\frac{1}{2x}\right) dx + C_1 \leqslant \log \lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right) + C_1\; z = |z|\, e^{iy},$$

где C и C_1 — некоторые постоянные числа. Здесь мы воспользовались тем, что $\log \lambda\left(\frac{1}{|z|}\right)$ — супергармоническая функция. Следовательно,

$$|a_+(z)| \leqslant C\lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \quad |z| < 1.$$

Так как $M_\alpha(E) > 0$, то в силу теоремы О. Фростмана, существует вероятностная мера $d\mu$, сосредоточенная в E и допускающая оценку

$$\mu(\Delta) \leqslant C|\Delta|^\alpha$$

для любой дуги $\Delta \subseteq \partial D$.

Решение $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ уравнения (1) мы ищем в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k = a_+(z)\left(1 + a\int_E \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z}\right), \ |z| < 1.$$

Заметим, что интеграл, порожденный мерой $d\mu$, допускает оценку

$$\left|\int_E \frac{d\mu(\xi)}{\zeta - z}\right| \leqslant \frac{M}{(1-|z|)^{1-\alpha}}.$$

Следовательно, для $f(z)$ имеем неравенство

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{(1-|z|)^{1-\alpha}} \lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \ |z| < 1.$$

Из условия 3, наложенного на последовательность $\{M_n\}_{n=0}^\infty$, следует, что граничные значения $f(z)$ порождают непрерывный функционал на $C\{M_n\}$.

Заметим, что если $a(z)$ достаточно быстро стремится к нулю при приближении z к множеству E, то для любого $\varphi \in C\{M_n\}$ имеем

$$f(a(z)\varphi(z)) = \int_{\partial D} f(z)\, a(z)\, \varphi(z)\, dm(z),$$

где $f(\cdot)$—распределение, порожденное граничными значениями $f(z)$. Для этого достаточно, например, выполнения условия $f(z)\,a(z) \in L_1(\partial D)$. Заметим, что при $z \in \partial D \setminus E$ имеет место равенство

$$f(z)\,a(z) = \frac{1}{a_-(z)}\left(1 + a\int_E \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}\right).$$

Так как $\dfrac{1}{a_-(z)} \in L_\infty(\partial D)$, то мы приходим к условию

$$\frac{1}{a_-(z)}\int_E \frac{d\mu(\xi)}{\zeta - z} \in L_1(\partial D).$$

Учитывая, что $|a_-(z)| > C|a(z)|^{-\frac{1}{2}}$, имеем

$$|a(z)|^{1/2}\int_E \frac{d\mu(\xi)}{|\zeta - z|} \in L_1(\partial D). \tag{7}$$

Из условия 3 теоремы следует (7).

При подходящем выборе постоянной a последовательность x_n, $n = 0, 1, \cdots$, где $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$, станет решением уравнения (1). Действительно, для любого $n = 1, 2, \cdots$ имеем

$$f(a(z)z^n)=\int_{\partial D} f(z)a(z)z^n dm(z)=\int_{\partial D} z^n\left(1+a\int_E\frac{d\mu(\xi)}{\zeta-z}\right)\frac{dm(z)}{a_-(z)}=0.$$

Это следует из того, что под последним интегралом стоит аналитическая вне единичного круга функция из пространства H^1. Равенство

$$\int_{\partial D} f(z)\,a(z)\,dm(z)=0$$

достигается с помощью выбора числа a.

Теперь оценим коэффициенты Тейлора функции $f(z)$. Из неравенства

$$|a_+(z)|\leqslant C\lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\ |z|<1$$

следует оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2 r^{2k}\leqslant C^2\lambda^2\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\ r=|z|.$$

Полагая в этом неравенстве $r=1-\frac{1}{n}$, получаем

$$\left(\sum_{k=n}^{2n}|a_k|^2\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{4n}\leqslant C^2\lambda^2(n).$$

Следовательно

$$\sum_{k=n}^{2n}|a_k|^2\leqslant e^4 C^2\lambda^2(n). \tag{8}$$

Теперь оценим коэффициенты Фурье меры $d\mu$. Пусть $\mu(t)$ — неубывающая функция, порождающая меру $d\mu$. Мы знаем, что $\mu(t)\in\mathrm{Lip}_\alpha$ Далее имеем

$$4\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{\mu}_n|^2\sin^2 nt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\mu(x+t)-\mu(x-t)|^2dx,$$

где $\hat{\mu}_n$ — коэффициенты Фурье функции $\mu(t)$. Так как $\sin^2 nt\geqslant\frac{3}{4}$ при $\frac{\pi}{3}\leqslant|nt|\leqslant\frac{2\pi}{3}$, то

$$\sum_{k=n}^{2n}|\hat{\mu}_k|^2\leqslant\frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi}\left|\mu\left(x+\frac{2\pi}{3n}\right)-\mu\left(x-\frac{2\pi}{3n}\right)\right|^2dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{n}\sup_x\left|\mu\left(x+\frac{2\pi}{3n}\right)-\mu\left(x-\frac{2\pi}{3n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n^{1+\alpha}}.$$

Для коэффициентов Фурье μ_n меры $d\mu$ имеем $\mu_n\sim n\hat{\mu}_n$. Поэтому

$$\sum_{k=n}^{2n}|\mu_k|^2\leqslant M\,n^{1-\alpha}. \tag{9}$$

Введем обозначение

$$1+a\int\limits_E \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,\ |z|<1.$$

В силу (9), имеем

$$\sum_{k=n}^{2n} |b_k|^2 \leqslant Mn^{1-\alpha}. \tag{10}$$

Заметим, что $x_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Следовательно

$$|x_n|\leqslant\left|\sum_{k=0}^{n/2} a_k b_{n-k}\right|+\left|\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} a_k b_{n-k}\right|\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n/2}|a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n/2}|b_{n-k}|^2\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=\frac{n}{2}}^{n}|b_{n-k}|^2\right)^{1/2}\leqslant M n^{(1-\alpha)/2}\left(\sum_{k=0}^{n/2}|a_k|^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2k}\right)^{1/2}+$$

$$+\lambda(n)\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{1-\alpha}+\left(\frac{n}{4}\right)^{1-\alpha}+\cdots\right)^{1/2}\leqslant An^{(1-\alpha)/2}\lambda(n).$$

Теперь мы переходим к обсуждению вопроса о точности полученных результатов. С этой целью ниже доказывается одна лемма, которая является обобщением принципа Фрагмена-Линделефа. Заметим, что утверждение леммы 1 верно и в случае, когда $\alpha=1$ (см. Э. Коллингвуд, А. Ловатер [7], стр. 130).

Лемма 1. *Пусть $f(z)$—аналитическая в единичном круге функция, а E — замкнутое множество, лежащее на границе. Предположим, что $f(z)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. $|f(z)|\leqslant\exp\left\{\dfrac{M}{(1-|z|)^{1-\alpha}}\right\},\ |z|<1,\ 0<\alpha<1;$

2. *для любой точки $\zeta\in\partial D\setminus E$ имеет место неравенство*

$$\varlimsup_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} |f(z)|\leqslant 1;$$

3. $M_\alpha(E)=0.$

Тогда всюду в единичном круге имеет место оценка $|f(z)|\leqslant 1$.

Если $M_\alpha(E)>0$, то существует неограниченная аналитическая функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям 1, 2.

Доказательство. Для любого $\varepsilon>0$ множество E можно покрыть непересекающимися интервалами I_k, $k=1, 2,\ldots$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|^\alpha<\varepsilon.$$

Над каждым I_k строим треугольник

$$\widehat{I}_k=\left\{z;\ z\in D,\ 1-|z|\leqslant c\rho\left(\frac{z}{|z|},\ \partial D\setminus I_k\right)\right\},$$

где c—постоянное число. Область, которая получается из D выбрасыванием треугольников $\widehat{I}_k$, обозначим Ω. Гармоническую меру на границе области Ω в точке $z \in \Omega$ обозначим $\omega_\Omega(z, d\zeta)$. Имеет место неравенство

$$\log|f(z)| \leqslant \int_{\partial\Omega} \overline{\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in D}}} (\log|f(z)|)\, \omega_\Omega(z, d\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\partial\Omega\cap D} \log|f(\zeta)|\, \omega_\Omega(z, d\zeta) \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\partial\widehat{I}_k\cap D} (1-|\zeta|)^{\alpha-1}\, \omega_\Omega(z, d\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega_\Omega\left(z; \left\{\zeta; \zeta\in\partial\widehat{I}_k\cap D,\ 1-|\zeta| < \frac{1}{\lambda^{1/1-\alpha}}\right\}\right) d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|^{\alpha-1}\, \omega_\Omega(z; \partial\widehat{I}_k\cap D) +$$

$$+ M \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|I_k|^{\alpha-1}}^{\infty} \omega_\Omega\left(z; \left\{\zeta; \zeta\in\partial\widehat{I}_k\cap D,\ 1-|\zeta| < \frac{1}{\lambda^{1/1-\alpha}}\right\}\right) d\lambda.$$

Рассмотрим гармоническую функцию

$$\omega_\Omega(z; \{\zeta; \zeta\in\partial\widehat{I}_k\cap D,\ 1-|\zeta| < \delta\}).$$

Эта функция принимает значение 1 при $z \in \{\zeta; \zeta \in \partial\widehat{I}_k \cap D, 1-|\zeta| < \delta\}$, а на остальной части границы $\partial\Omega$ тождественно равна нулю. Следовательно, существует число A, не зависящее от k такое, что при $\delta \leqslant |I_k|$ имеет место неравенство

$$\omega_\Omega(z; \{\zeta; \zeta\in\partial\widehat{I}_k\cap D,\ 1-|\zeta| < \delta\}) \leqslant A\delta\left(\frac{1-|z|^2}{|\zeta_k - z|^2} + \frac{1-|z|^2}{|\eta_k - z|^2}\right), \tag{11}$$

при $z \in \partial\Omega$, где ζ_k и η_k—концы дуги I_k. В силу принципа максимума неравенство (11) имеет место всюду в Ω. Далее имеем

$$\log|f(z)| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|^\alpha + M \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|I_k|^{\alpha-1}}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{1/1-\alpha}} \leqslant B\varepsilon,$$

где число B не зависит от ε. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ $|f(z)| \leqslant 1$.

В случае, когда $M_\alpha(E) > 0$, функция

$$f(z) = \exp\left\{\int_E \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta)\right\},$$

где $d\mu$—вероятностная мера с носителем в E, фигурирующая в ранее упомянутой теореме О. Фростмана, дает пример неограниченной функции, которая удовлетворяет условиям 1 и 2 леммы.

Приведенная ниже теорема позволяет судить о точности результатов теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть символ уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям:*

1. $a(z) \geqslant 0$, $\log a(z) \in L_1(\partial D)$;

2. *для некоторой допустимой последовательности* M_n, $n=0, 1, \cdots$ $a(z) \in \{M_n\}$;

3. *существует функция* $\lambda(x) \geqslant 1$, $x \geqslant 1$, *такая, что* $x\lambda(x) \leqslant A \sup\limits_k \frac{x^k}{M_k}$, *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $M = M(\varepsilon)$ *такое, что*

$$\lambda(x) \leqslant M x^{\varepsilon} \lambda\left(\frac{1}{\log^{1+\varepsilon} x}\right);$$

4. *замкнутое множество* $E = \{z;\ z \in \partial D,\ a(z) = 0\}$ *имеет нулевую* α*-хаусдорфову меру, т. е.* $M_\alpha(E) = 0$ *и для любой точки* $\eta \in E$ *имеет место оценка*

$$\int\limits_{\partial D} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} \log \frac{1}{\sqrt{a(\zeta)}}\, dm(\zeta) \geqslant \log \lambda\left(\frac{1}{|\eta - z|}\right) - C,$$

где $\eta \in E$, $z \in D$;

5. *для любой дуги* $\Delta \subseteq \partial D$ *имеет место оценка*

$$\frac{1}{|\Delta|} \int\limits_{\Delta} \log \frac{1}{\sqrt{a(\zeta)}}\, dm(\zeta) \leqslant \frac{C}{|\Delta|^{1-\alpha}}.$$

Тогда уравнение (1) не может иметь нетривиального решения, допускающего оценку

$$|x_n| \leqslant M n^{-\alpha-\varepsilon} \lambda(n), \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{12}$$

где $\varepsilon > 0$ *— любое число.*

Доказательство. Предположим, что существует нетривиальное решение уравнения (1), допускающее оценку (12). Обозначим через $f(\cdot)$ распределение, порожденное граничными значениями аналитической функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n z^n$. Введем функцию

$$F(z) = f\left(\frac{a(\xi)}{\xi - z}\right), \quad |z| > 1.$$

Из условий 2 и 3 следует, что коэффициенты Фурье распределения $f(a\cdot)$ также допускают оценку (12). Следовательно, имеет место неравенство

$$|F(z)| \leqslant A(|z|-1)^{\alpha+\varepsilon-1} \lambda\left(\frac{1}{|z|-1}\right), \quad |z| > 1.$$

Рассмотрим функцию $G(z)$, которая внутри единичного круга равна

$$G(z) = \frac{f(z)}{a_+(z)}, \quad |z| < 1,$$

а вне единичного круга определяется по формуле

$$G(z) = a_-(z)\,F(z),\ |z|>1,$$

где a_+ и a_-—функции, фигурирующие в факторизации символа $a(z)$. Заметим, что граничные значения функции $G(z)$ при приближении к границе изнутри единичного круга порождают то же распределение на $\partial D\setminus E$, что и граничные значения $G(z)$ при приближении к границе извне. Действительно, пусть $\varphi\in C\{M_n\}$, $\operatorname{supp}\varphi\cap E=\varnothing$. Так как $\dfrac{\varphi(z)}{a_+(z)}\in C\{M_n\}$, то

$$\lim_{r\to 1-0}\int_{\partial D}\frac{f(rz)}{a_+(rz)}\,\varphi(z)\,dm(z)=f\left(\frac{\varphi(z)}{a_+(z)}\right)=f\left(a(z)\,a_-(z)\,\varphi(z)\right)=$$

$$=\lim_{r\to 1+0}\int_{\partial D}F(rz)\,a_-(rz)\,\varphi(z)\,dm(z).$$

Следовательно, $G(z)$ является аналитической функцией в области $C\setminus E$. Из условия 5 следует оценка

$$|a_-(z)|\leqslant M\exp\left\{\frac{A}{(|z|-1)^{1-\alpha}}\right\},\ |z|>1.$$

Поэтому

$$|G(z)|\leqslant M\,(|z|-1)^{\alpha+\varepsilon-1}\,\lambda\left(\frac{1}{|z|-1}\right)e^{\frac{A}{(|z|-1)^{1-\alpha}}}\leqslant ce^{\frac{B}{(|z|-1)^{1-\alpha}}}.$$

Из условия 4 следует

$$|G(z)|\leqslant M\,(1-|z|)^{\alpha+\varepsilon-1}\frac{\lambda\left(\dfrac{1}{1-|z|}\right)}{\lambda\left(\dfrac{1}{|\zeta-z|}\right)}\leqslant\frac{D}{(1-|z|)^{1-\alpha}},$$

где $\varepsilon>0$, $r_0<|z|<1$, $|\zeta-z|<(1-|z|)\log^{1+\varepsilon}\dfrac{1}{1-|z|}$, $\zeta\in E$.

Обозначим через Ω область, которая содержит внешность единичного круга и

$$\partial\Omega\subseteq E\cup\left\{z;\ z\in D,\ \rho(z,E)\log^{-1-\varepsilon}\frac{1}{\rho(z,E)}\leqslant 1-|z|\leqslant\rho(z,E)\right\}.$$

Пусть $\varphi(z)$ конформно отображает единичный круг на Ω. Заметим, что границу $\partial\Omega$ можно выбрать так, чтобы $|\varphi'(z)|$ была ограничена сверху и снизу (см. [8]).

Функция $G(z)$ аналитична в области Ω и на границе допускает оценку

$$|G(z)|\leqslant\frac{M}{\rho^{1-\alpha}(z,E)},\ z\in\partial\Omega.$$

Внутри области Ω функция $G(z)$ допускает оценку

$$|G(z)|\leqslant C\exp\left\{\frac{B}{\rho^{1-\alpha}(z,E)}\right\},\ z\in\Omega.$$

Из условий 1 и 2 следует, что $\log \rho(z, E) \in L_1(\partial\Omega)$. Построим в области Ω внешнюю функцию $\psi(z)$ с модулем граничных значений, равных $\rho^{\alpha-1}(z, E)$. Тогда функция

$$\Phi(z) = \frac{G(\varphi(z))}{\psi(\varphi(z))}$$

допускает оценку $|\Phi(z)| \leqslant M$, при $z \in \partial D \setminus \varphi^{-1}(E)$ и $|\Phi(z)| \leqslant \leqslant \exp\left\{\frac{B}{(1-|z|)^{1-\alpha}}\right\}$, при $|z| < 1$.

Заметим, что $M_\alpha(\varphi^{-1}(E)) = 0$. В силу леммы 1, $\Phi(z)$—ограниченная функция. Следовательно

$$|G(z)| \leqslant \frac{M}{\rho^{1-\alpha}(z, E)}, \quad z \overline{\in} E.$$

Так как $M_\alpha(E) = 0$, то $G(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 28.XI.1984

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Վերասերվող սիմվոլով Վիների-Հոպֆի դիսկրետ, համասեռ հավասարումների մասին *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է

$$x_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j} x_j, \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{1}$$

հավասարումը, որի սիմվոլը կարող է ունենալ անվերջ թվով զրոներ։

Հիմնվելով Սեգյոյի թեորեմի ընդհանրացման վրա ապացուցվում է, որ եթե սիմվոլը ունի շատ «ուժեղ» զրոներ, ապա (1) հավասարումը չի կարող ունենալ ոչ տրիվիալ լուծում։ Գտնված են պայմաններ, որոնք ապահովում են ոչ տրիվիալ լուծման գոյությունը, ընդ որում բերվում են գնահատականներ ամենադանդաղ աճող լուծման համար։ Ընդհանրացվում է նաև Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի սկզբունքը, որը թույլ է տալիս ապացուցել թեորեմ ոչ տրիվիալ լուծման գնահատականի ճշտության մասին։

A. A. VAGARSHAKIAN. *On discrete homogeneous Viener—Hopf equations with degenerate symbols* (summary)

The paper considers the equations

$$x_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j} x_j, \quad k = 0, 1, \cdots,$$

where the symbol may have infinitely many zeros. Using a generalization of Szego's theorem, it is shown that if the symbol has very "strong" zeros, then (1) can not have a non trivial solution. Some conditions the existence of non trivial solutions are given together with estimates of the solution which has minimal growth.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Ц. Гохберг, И. А.* Фельдман. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, Изд. «Наука», М., 1971.
2. *З. Прёсдорф.* Некоторые классы сингулярных уравнений, Изд. «Мир», М., 1979.

3. *М. И. Хайкин*. Однородное уравнение Винера-Хопфа в классе функций умеренного роста, Изв. вузов, матем., 8, 1978, 91—103.
4. *E. Asplund*. The Wiener—Hopf equation in an algebra of Beurling, Acta mathematica, 108, 1962, 89—111.
5. *Л. Карлесон*. Избранные проблемы теории исключительных множеств, Изд. «Мир», М., 1971.
6. *Мандельбройт*. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, И. ИЛ, М., 1955.
7. *Э. Коллингвуд, А. Ловатер*. Теория предельных множеств, Изд. «Мир», М., 1971.
8. *А. А. Вагаршакян*. О единственности аналитических функций, растущих вблизи границы, Изв. АН Арм.ССР, Матем., XVI, № 1, 1981, 3—24.
9. *М. Г. Крейн*. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, 1958, 13:5, 3—120.
10. *В. Б. Дыбин, Н. К. Карапетянц*. Применение метода нормализации к одному классу бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Изв. вузов, Матем., 1967, № 10, 39—49.
11. *Г. Н. Чеботарев*. Об одном уравнении типа свертки первого рода. Изв. вузов, Матем., 1967, № 2, 80—92.
12. *Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский*. Уравнения типа свертки. М., «Наука», 1978.