ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXI, № 1, 1986 Математика

УДК 517.984

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОПЕРАТОРАХ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПАРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть A и B—самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, для которых существуют сильные пределы

$$U_{\pm}(A, B) = \underset{\xi\to\pm\infty}{s\text{-lim}}\; e^{i\xi A}\; e^{-i\xi B} P_B,$$

где P_B—ортопроектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора B. Операторы $U_{\pm}(A, B)$ называются волновыми операторами для упорядоченной пары (A, B), а

$$S(A, B) = U_+^*(A, B)\, U_-(A, B)$$

—оператором рассеяния (см. [1], стр. 335, и [2], стр. 28). Аналогично определяются волновые операторы $U_{\pm}(B, A)$ и оператор рассеяния $S(B, A)$.

В настоящей заметке рассматривается в $L^2(0, \infty)$ некоторый класс самосопряженных дифференциальных операторов порядка $2n>2$ с убывающими на бесконечности коэффициентами. Доказывается, что для любой пары операторов L и L_0 из рассматриваемого класса существуют операторы рассеяния $S(L, L_0)$ и $S(L_0, L)$. Выводятся формулы для волновых операторов и операторов рассеяния* и, тем самым, выявляется связь с операторами рассеяния введенных автором в [3] данных рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков. На примерах показано, что при фиксированном L_0 оператор L не определяется однозначно по операторам рассеяния в рассматриваемом классе (в общем случае эта неоднозначность указана в [4], стр. 96, и [5]).

Рассмотрим на полуоси $0<x<\infty$ заданную по формуле

$$l[y(x)] \equiv \frac{1}{i^{2n}} y^{(2n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{i^{2k}} [p_{2k}(x)\, y^{(k)}(x)]^{(k)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2i^{2k+1}} \{[p_{2k+1}(x)\, y^{(k)}(x)]^{(k+1)} + [p_{2k+1}(x)\, y^{(k+1)}(x)]^{(k)}\} \qquad (1)$$

дифференциальную операцию l порядка $2n>2$, где $p_k(x)$—вещественные функции, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1 x^{2n-1-k} |p_k(x)|\, dx + \int_1^{\infty} |p_k(x)|\, dx < \infty, \quad k=0, 1, \cdots, 2n-2. \qquad (2)$$

---

* Аналогичное исследование выполнено В. С. Буслаевым [16] для эллиптических дифференциальных операторов порядка $2n$ в $L^2(\Omega)$, где Ω — внешность ограниченной области в R^m.

Пусть L—некоторый самосопряженный оператор, порожденный дифференциальной операцией l в пространстве $L^2(0, \infty)$ (см. [3], [6], [7]). Область определения оператора L описывается при помощи n краевых условий в точке $x=0$ (их вид не является существенным). Непрерывный спектр оператора L совпадает с полуосью $[0, \infty)$, а точечный спектр ограничен снизу и не имеет отличной от нуля конечной точки сгущения. Обозначим через T множество всех чисел λ ($\lambda \geqslant 0$ или $\arg \lambda = -\pi/2n$) таких, что λ^{2n} являются собственными значениями оператора L.

При каждом $\lambda > 0$ ($\lambda \bar{\in} T$) дифференциальное уравнение

$$l[y(x)] = \lambda^{2n} y(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{3}$$

имеет одно решение $u(x, \lambda)$, обладающее асимпототикой

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [S_0(\lambda) e^{ix\lambda} + e^{-ix\lambda} + o(1)], \quad x \to \infty$$

и удовлетворяющее краевым условиям, соответствующим оператору L. Функции $u(x, \lambda)$ и $S_0(\lambda)$ непрерывны на множестве $\lambda > 0$, $\lambda \bar{\in} T$ и по непрерывности могут быть определены также для значений $\lambda \in T$ ($\lambda > 0$). При этом $|S_0(\lambda)| \equiv 1$. Более того, для любой функции $f \in L^2(0, \infty)$ интеграл

$$(Uf)(\lambda) = \int_0^\infty \bar{u}(x, \lambda) f(x)\, dx, \quad 0 < \lambda < \infty, \tag{4}$$

сходится по метрике $L^2(0, \infty)$ и определяет частично изометрический оператор U в $L^2(0, \infty)$, переводящий оператор L в оператор умножения на λ^{2n}. При этом

$$UU^* = I, \quad U^* U = I - P,$$

где I—единичный оператор, а P—ортопроектор на замыкании линейной оболочки всех собственных функций оператора L. Решение $u(x, \lambda)$ будем называть нормирванной обобщенной собственной функцией оператора L.

Пусть E_μ ($-\infty < \mu < \infty$)—непрерывная слева спектральная функция (разложение единицы) оператора L. При каждом μ ортопроектор E_μ является интегральным оператором. Ядро $E(x, t; \mu)$ $(0 < x,\ t < \infty)$ оператора E_μ абсолютно непрерывно по μ на каждом конечном отрезке, не содержащем собственных значений оператора L. При этом имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} E(x, t; \lambda^{2n}) = u(x, \lambda)\, \bar{u}(t, \lambda), \quad \lambda > 0,\ \lambda \bar{\in} T. \tag{5}$$

Из приведенных утверждений следует, что абсолютно непрерывный спектр оператора L совпадает с полуосью $[0, \infty)$, а абсолютно непрерывное подпространство—с ортогональным дополнением линейной оболочки всех собственных функций оператора L.

Для оператора L данные рассеяния вводятся при предположении, что $0 \bar{\in} T$ и уравнение (3) имеет для всех λ ($\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$) решение $y(x, \lambda)$, которое обладает асимптотикой

$$y(x, \lambda) = e^{ix\lambda}[1 + o(1)], \quad x \to \infty,$$

и при каждом $x > 0$ как функция от λ голоморфно в верхней полуплоскости и непрерывно вплоть до вещественной оси. При указанном предположении функция $u(x, \lambda)$ представляется в виде

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} S_k(\lambda)\, y(x, \lambda\omega_k), \quad 0 < x, \lambda < \infty, \tag{6}$$

где $\omega_k = \exp(i\pi k/n)$ и $S_n(\lambda) \equiv 1$, а при каждом $\mu = \lambda^{2n}$ $(\lambda \in T)$ ядро ортопроектора $E_{\mu+0} - E_\mu$ представляется в виде

$$E(x, t; \lambda^{2n}+0) - E(x, t; \lambda^{2n}) = \sum_{k, j=1}^{n_\lambda} N_{kj}(\lambda)\, y(x, \lambda\omega_k)\, \overline{y}(t, \lambda\omega_j),$$

где $n_\lambda = n-1$ при $\lambda > 0$ и $n_\lambda = n$ при $\arg\lambda = -\pi/2n$. Возникающие при этом набор непрерывных на полуоси $\lambda > 0$ функций $S_k(\lambda)$ $(k=0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1)$ и набор эрмитовых неотрицательно определенных матриц

$$N(\lambda) = (N_{kj}(\lambda))_{k, j=1}^{n_\lambda}, \quad \lambda \in T,$$

вместе с множеством T образуют данные рассеяния оператора L. Функции $S_k(\lambda)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ условимся называть функциями рассеяния оператора L.

Будем говорить, что дифференциальная операция l обладает оператором преобразования, если существует функция $K(x, t)$ $(0 < x \leqslant t < \infty)$ (ядро оператора преобразования), удовлетворяющая следующим условиям:

1) функция $K_1(x) = K(x, x)$ имеет абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$ производные до порядка $2n-2$ включительно, а разность $K(x, t) - K_1\left(\frac{x+t}{2}\right)$ имеет непрерывные в области $0 < x \leqslant t < \infty$ частные производные до порядка $2n-1$ включительно и, кроме того, выполняются оценки

$$\left|\frac{\partial^k K(x, t)}{\partial x^\nu \partial t^{k-\nu}}\right| \leqslant \frac{1}{x^k} \psi_k(x+t), \quad 0 \leqslant \nu \leqslant k \leqslant 2n-1,$$

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \left\{\left|\frac{\partial}{\partial x} K(x, t)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t} K(x, t)\right|\right\} dt\, dx < \infty,$$

где $\psi_k(x)$ $(0 \leqslant k \leqslant 2n-2)$ — невозрастающие и вместе с $\psi_{2n-1}(x)$ суммируемые на полуоси $(0, \infty)$ функции;

2) при всех λ $(\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0)$ определенная по формуле

$$y(x, \lambda) = e^{ix\lambda} + \int_x^\infty e^{it\lambda} K(x, t)\, dt, \quad 0 < x < \infty, \tag{7}$$

функция $y(x, \lambda)$ является решением уравнения (3).

При этом оператором преобразования называется действующий в каком-либо пространстве $L^p(0, \infty)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ оператор $I+K$, где K — интегральный оператор с указанным выше ядром $K(x, t)$:

$$(Kf)(x) = \int_x^\infty K(x, t) f(t)\, dt, \ 0 < x < \infty.$$

Отметим, что при существовании оператора преобразования коэффициенты $p_k(x)$ в (1) имеют при $k \geqslant 1$ абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$ производные до порядка $k-1$ включительно и удовлетворяют условиям

$$\int_0^\infty x^{2n-1-k+\nu} |p_k^{(\nu)}(x)|\, dx < \infty, \ 0 \leqslant \nu \leqslant k \leqslant 2n-2.$$

Кроме того, число отрицательных собственных значений оператора L конечно, а множество положительных собственных значений ограничено, причем нуль не является собственным значением.

Заметим, что оператор преобразования существует, например (см. [8]), если коэффициенты $p_k(x)$ дифференциальной операции l аналитически продолжаются с полуоси $(0, \infty)$ в сектор

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}$$

и удовлетворяют оценкам

$$\int_0^\infty x^{2n-2-k} |p_k(x+z)|\, dx \leqslant h(\operatorname{Re} z), \ k = 0, 1, \cdots, 2n-2, \tag{8}$$

где $h(x)$—невозрастающая суммируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция (в связи с точностью области голоморфности, см. пример в [9], а в связи с вопросом о необходимости условия голоморфности см. [10]). Заметим еще, что при условиях (8) функции рассеяния $S_k(\lambda)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ стремятся к конечным пределам при $\lambda \to \infty$.

Лемма. *Пусть дифференциальная операция l обладает оператором преобразования. Тогда при любых положительных числах $\alpha < \beta$ функции рассеяния оператора L удовлетворяют неравенству*

$$\int_\Delta \left\{ \max_{\alpha < \mu < \beta} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k \pm \mu} \right|^2 \right\} d\lambda < \infty, \tag{9}$$

где

$$\Delta = \left(0, \frac{\alpha}{2}\right) \cup (2\beta, \infty).$$

Доказательство. Обозначим

$$v(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} S_k(\lambda)\, e^{ix\lambda\omega_k}, \tag{10}$$

$$w(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{n-1} S_k(\lambda)\, e^{ix\lambda\omega_k}. \tag{11}$$

Используя представления (6) и (7), получим

$$u(x, \lambda)=v(x, \lambda)+\int_x^\infty K(x, t)\, v(t, \lambda)\, dt. \tag{12}$$

Заметим, что в силу оценки ядра $K(x, t)$ оператор преобразования $I+K$ имеет ограниченный обратный $I+H=(I+K)^{-1}$ в любом из пространств $L^p(0, \infty)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, причем H есть интегральный оператор вида

$$(Hf)(x)=\int_x^\infty H(x, t) f(t)\, dt,\ 0<x<\infty,$$

где ядро $H(x, t)$ имеет все те свойства ядра $K(x, t)$, которые указаны выше в условии 1). Учитывая это, из равенства (12) получим

$$v(x, \lambda)=u(x, \lambda)+\int_x^\infty H(x, t)\, u(t, \lambda)\, dt.$$

В силу этого равенства при любой функции $f\in L^2(0, \infty)$ интеграл

$$(Vf)(\lambda)=\int_0^\infty \bar{v}(x, \lambda) f(x)\, dx,\ 0<\lambda<\infty, \tag{13}$$

сходится по метрике $L^2(0, \infty)$ и определяет ограниченный оператор V в $L^2(0, \infty)$. Но тогда с учетом равенств $|S_0(\lambda)|=S_n(\lambda)=1$ и

$$w(x, \lambda)=v(x, \lambda)-S_0(\lambda)\, e^{ix\lambda}-e^{-ix\lambda}$$

по формуле

$$(Wf)(\lambda)=\int_0^\infty \bar{w}(x, \lambda) f(x)\, dx,\ 0<\lambda<\infty, \tag{14}$$

определяется ограниченный оператор W в $L^2(0, \infty)$. Следовательно, при любом $f\in L^2(0, \infty)$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \left|\int_0^\infty \bar{w}(x, \lambda) f(x)\, dx\right|^2 d\lambda<\infty. \tag{15}$$

Обозначим

$$\Phi_\nu(\lambda)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k(\lambda)}{(1-i\lambda\omega_k)^\nu},\ \nu=1, 2,\cdots, n-1.$$

Положив в (15) $f(x)=x^{\nu-1}e^{-x}$, убеждаемся, что

$$\int_0^\infty |\Phi_\nu(\lambda)|^2\, d\lambda<\infty,\ \nu=1, 2,\cdots, n-1. \tag{16}$$

Функции $\varphi_\nu(\mu, \lambda)$ $(\nu=1, 2,\cdots, n-1)$ определим из системы уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\varphi_\nu(\mu, \lambda)}{(1-i\lambda\omega_k)^\nu} = \frac{1}{\lambda\omega_k+\mu}, \quad k=1, 2, \cdots, n-1.$$

Нетрудно убедиться, что функции $\varphi_\nu(\pm\mu, \lambda)$ ограничены на множестве $\alpha\leqslant\mu\leqslant\beta$, $\lambda\in\Delta$. Поэтому с учетом (16) из очевидного равенства

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k\pm\mu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \varphi_\nu(\pm\mu, \lambda)\, \Phi_\nu(\lambda)$$

получаем требуемое неравенство (9).

Теорема 1. *Рассмотрим вместе с l аналогичную дифференциальную операцию l_0 порядка $2m>2$ и предположим, что обе они обладают операторами преобразования. Пусть L и L_0—некоторые самосопряженные операторы в $L^2(0, \infty)$, порожденные дифференциальными операциями l и l_0 соответственно и не имеющие отрицательных собственных значений, $u(x, \lambda)$ и $u_0(x, \lambda)$ — нормированные обобщенные собственные функции, а $S_k(\lambda)$ ($k=0, 1, \cdots, n-1$) и $S_k^0(\lambda)$ ($k=0, 1, \cdots, m-1$)—функции рассеяния этих операторов. Тогда для пары операторов*

$$A=\sqrt[2n]{L}, \quad A_0=\sqrt[2m]{L_0}$$

существуют все волновые операторы и справедливы формулы

$$U_+(A, A_0)\, f(x) = \int_0^\infty u(x, \lambda)\, \frac{S_0^0(\lambda)}{S_0(\lambda)} \int_0^\infty \overline{u_0}(t, \lambda)\, f(t)\, dt d\lambda, \tag{17}$$

$$U_-(A, A_0) f(x) = \int_0^\infty u(x, \lambda) \int_0^\infty \overline{u_0}(t, \lambda)\, f(t)\, dt d\lambda, \tag{18}$$

$$S(A, A_0)\, f(x) = \int_0^\infty u_0(x, \lambda)\, \frac{S_0(\lambda)}{S_0^0(\lambda)} \int_0^\infty \overline{u_0}(t, \lambda)\, f(t)\, dt d\lambda, \tag{19}$$

а также аналогичные формулы для операторов $U_\pm(A_0, A)$ и $S(A_0, A)$, где $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0, \infty)$.

Доказательство. Имеем

$$L = \int_0^\infty \mu\, dE_\mu, \quad e^{i\xi A} = \int_0^\infty e^{i\xi\lambda}\, dE_{\lambda^{2n}} \tag{20}$$

и аналогичные формулы для операторов L_0 и A_0.

Для простоты мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда операторы L и L_0 не имеют собственных значений. В этом случае

$$U_\pm(A, A_0) = \operatorname*{s-lim}_{\xi\to\pm\infty} e^{i\xi A}\, e^{-i\xi A_0}. \tag{21}$$

Пусть $f\in L^2(0, \infty)$ и

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \overline{u_0}(x, \lambda)\, f(x)\, dx, \quad 0<\lambda<\infty. \tag{22}$$

В силу (5) и (20) соотношение (21) может быть записано в виде

$$U_\pm (A, A_0) f(x) =$$

$$= \operatorname*{s-lim}_{\xi\to\pm\infty} \int_0^\infty u(x, \lambda) \int_0^\infty \overline{u}(t, \lambda) \int_0^\infty e^{i\xi(\lambda-\mu)} u_0(t, \mu) F(\mu)\, d\mu dt d\lambda. \tag{23}$$

Поскольку по формуле (4) определяется унитарный оператор, то существование пределов (23) эквивалентно существованию следующих пределов:

$$G_\pm(\lambda) = \operatorname*{s-lim}_{\xi\to\pm\infty} \int_0^\infty \overline{u}(t, \lambda) \int_0^\infty e^{i\xi(\lambda-\mu)} u_0(t, \mu) F(\mu)\, d\mu dt. \tag{24}$$

По аналогии с (10) и (11) введем функции $v_0(x, \lambda)$ и $w_0(x, \lambda)$, соответствующие оператору L_0, а по аналогии с (4), (13) и (14) введем операторы U_0, V_0 и W_0. Обозначим через $K_0(x, t)$ ядро оператора преобразования, соответствующего дифференциальной операции l_0.

Соотношение (24) напишем в виде

$$G_\pm(\lambda) = \operatorname*{s-lim}_{\xi\to\pm\infty} \sum_{\nu=1}^{5} G_\nu(\xi, \lambda), \tag{25}$$

где

$$G_1(\xi, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty F(\mu) e^{i\xi(\lambda-\mu)} [\overline{S}_0(\lambda) e^{-it\lambda} + e^{it\lambda}][S_0^0(\mu) e^{it\mu} + e^{-it\mu}]\, d\mu dt,$$

$$G_2(\xi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty F(\mu) e^{i\xi(\lambda-\mu)} [S_0^0(\mu) e^{it\mu} + e^{-it\mu}]\, d\mu \times \right.$$

$$\left. \times \int_t^\infty \overline{v}(\eta, \lambda) \overline{K}(t, \eta)\, d\eta \right\} dt,$$

$$G_3(\xi, \lambda) = \int_0^\infty \overline{u}(t, \lambda) \int_0^\infty e^{i\xi(\lambda-\mu)} F(\mu) \int_t^\infty v_0(\eta, \mu) K_0(t, \eta)\, d\eta d\mu dt,$$

$$G_4(\xi, \lambda) = \int_0^\infty \overline{u}(t, \lambda) \int_0^\infty e^{i\xi(\lambda-\mu)} F(\mu) w_0(t, \mu)\, d\mu dt,$$

$$G_5(\xi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \overline{w}(t, \lambda) \int_0^\infty e^{i\xi(\lambda-\mu)} [S_0^0(\mu) e^{it\mu} + e^{-it\mu}] F(\mu)\, d\mu dt.$$

Имеем

$$\operatorname*{s-lim}_{\xi\to\pm\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty F(\mu) \overline{S_0}(\lambda) S_0^0(\mu) e^{i\xi(\lambda-\mu)} e^{-it(\lambda-\mu)}\, d\mu dt =$$

$$= \underset{\xi\to\pm\infty}{\text{s-lim}} \frac{1}{2\pi} \overline{S_0}(\lambda) \int_{-\xi}^{\infty} e^{-i\eta\lambda} \int_0^{\infty} e^{i\eta\mu} F(\mu) S_0^0(\mu)\, d\mu d\eta =$$

$$= \begin{cases} \overline{S_0}(\lambda) S_0^0(\lambda) F(\lambda) \text{ при } \xi\to+\infty, \\ 0 \text{ при } \xi\to-\infty, \end{cases}$$

$$\underset{\xi\to\pm\infty}{\text{s-lim}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} F(\mu)\, e^{i\xi(\lambda-\mu)} e^{it(\lambda-\mu)}\, d\mu dt =$$

$$= \underset{\xi\to\pm\infty}{\text{s-lim}} \frac{1}{2\pi} \int_{\xi}^{\infty} e^{i\eta\lambda} \int_0^{\infty} e^{-i\eta\mu} F(\mu)\, d\mu d\eta = \begin{cases} 0 \quad \text{при } \xi\to+\infty, \\ F(\lambda) \text{ при } \xi\to-\infty, \end{cases}$$

$$\underset{\xi\to\pm\infty}{\text{s-lim}} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} F(\mu)\, \overline{S_0}(\lambda)\, e^{i\xi(\lambda-\mu)} e^{-it(\lambda+\mu)}\, d\mu dt =$$

$$= \underset{\xi\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\, \overline{S_0}(\lambda)\, e^{i2\xi\lambda} \int_{\xi}^{\infty} e^{-i\eta\lambda} \int_0^{\infty} e^{-i\eta\mu} F(\mu)\, d\mu d\eta = 0,$$

$$\underset{\xi\to\pm\infty}{\text{s-lim}} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} F(\mu)\, S_0^0(\mu)\, e^{i\xi(\lambda-\mu)} e^{it(\lambda+\mu)}\, d\mu dt =$$

$$= \underset{\xi\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\, e^{i2\xi\lambda} \int_{-\xi}^{\infty} e^{i\eta\lambda} \int_0^{\infty} e^{i\eta\mu} F(\mu)\, S_0^0(\mu)\, d\mu d\eta = 0.$$

Следовательно,

$$\underset{\xi\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\ G_1(\xi, \lambda) = \begin{cases} \overline{S_0}(\lambda) S_0^0(\lambda) F(\lambda) \text{ при } \xi\to+\infty, \\ F(\lambda) \text{ при } \xi\to-\infty. \end{cases} \tag{26}$$

Докажем соотношения

$$\underset{\xi\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\ G_\nu(\xi, \lambda) = 0, \quad \nu = 2, 3, 4, 5. \tag{27}$$

Обозначим

$$\varphi_1(t) = \int_0^{\infty} e^{it\mu} F(\mu)\, S_0^0(\mu)\, d\mu, \quad \varphi_2(t) = \int_0^{\infty} e^{-it\mu} F(\mu)\, d\mu.$$

Тогда

$$\sqrt{2\pi}\, G_2(\xi, \lambda) = e^{i\xi\lambda} \int_0^{\infty} [\varphi_1(t-\xi) + \varphi_2(t+\xi)] \int_t^{\infty} \overline{v}(\eta, \lambda) \overline{K}(t, \eta)\, d\eta dt =$$

$$= e^{i\xi\lambda} \int_0^{\infty} \overline{v}(\eta, \lambda) \int_0^{\eta} \overline{K}(t, \eta) [\varphi_1(t-\xi) + \varphi_2(t+\xi)]\, dt d\eta, \tag{28}$$

причем законность перестановки порядка интегрирования в (28) доказывается использованием оценок ядра $K(x, t)$. В силу ограниченности оператора V имеем

$$\int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\overline{v}(\eta,\lambda)\int_0^{\eta}\overline{K}(t,\eta)[\varphi_1(t-\xi)+\varphi_2(t+\xi)]\,dt\,d\eta\right|^2 d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant\|V\|^2\int_0^{\infty}\left|\int_0^{\eta}\overline{K}(t,\eta)[\varphi_1(t-\xi)+\varphi_2(t+\xi)]\,dt\right|^2 d\eta\leqslant$$

$$\leqslant 2\|V\|^2\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\eta}|K(t,\eta)|^2dt\right)\left(\int_{-\xi}^{\eta-\xi}|\varphi_1(\tau)|^2\,d\tau+\int_{\xi}^{\eta+\xi}|\varphi_2(\tau)|^2\,d\tau\right)d\eta, \qquad (29)$$

где $\|V\|$ — норма оператора V. Из равенства (28) и неравенства (29) легко следует справедливость соотношения (27) с $\nu=2$.

Очевидно, что

$$\int_0^{\infty}|G_3(\xi,\lambda)|^2\,d\lambda=\int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty}e^{-i\xi\mu}F(\mu)\int_t^{\infty}v_0(\eta,\mu)K_0(t,\eta)\,d\eta\,d\mu\right|^2 dt. \qquad (30)$$

Однако

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\left|F(\mu)\int_t^{\infty}v_0(\eta,\mu)K_0(t,\eta)\,d\eta\right|d\mu\right)^2 dt\leqslant$$

$$\leqslant\|F\|^2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\int_t^{\infty}v_0(\eta,\mu)K_0(t,\eta)\,d\eta\right|^2 d\mu\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\|F\|^2\|V_0\|^2\int_0^{\infty}\int_t^{\infty}|K_0(t,\eta)|^2\,d\eta\,dt<\infty, \qquad (31)$$

где $\|F\|$ и $\|V_0\|$ — нормы функции $F(\mu)$ и оператора V_0 соответственно. Из равенства (30) с учетом (31) следует соотношение (27) с $\nu=3$.

Пусть $\varepsilon>0$ — некоторое число. Конечный отрезок $\delta_1=[\alpha,\beta]$ $(0<\alpha<\beta)$ выберем так, чтобы на множестве $\delta_2=(0,\alpha)\cup(\beta,\infty)$ выполнялось неравенство

$$\int_{\delta_2}|F(\mu)|^2\,d\mu<\frac{\varepsilon}{4}(\|W\|^2+\|W_0\|^2)^{-1}, \qquad (32)$$

где $\|W\|$ и $\|W_0\|$ — нормы операторов W и W_0. Положим

$$\Delta_1=\left[\frac{\alpha}{2},\ 2\beta\right],\ \Delta_2=\left(0,\ \frac{\alpha}{2}\right)\cup(2\beta,\ \infty)$$

и введем обозначения

$$a=\sin\frac{\pi}{m},\quad b=\sin\frac{\pi}{2n}, \qquad (33)$$

$$M=\max_{0<k<n,\ \lambda\in\delta_1}|S_k(\lambda)|,\ M_0=\max_{0<k<m,\ \lambda\in\Delta_1}|S_k^0(\lambda)|. \qquad (34$$

Очевидно, что

$$\int_0^\infty |G_4(\xi, \lambda)|^2 d\lambda = \int_0^\infty \left| \int_0^\infty e^{-i\xi\mu} F(\mu)\, w_0(t, \mu)\, d\mu \right|^2 dt. \tag{35}$$

Докажем соотношение

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \int_0^\infty \left| \int_0^\infty e^{-i\xi\mu} F(\mu)\, w_0(t, \mu)\, d\mu \right|^2 dt = 0. \tag{36}$$

Действительно, в силу (32)

$$\int_0^\infty \left| \int_{\delta_2} e^{-i\xi\mu} F(\mu)\, w_0(t, \mu)\, d\mu \right|^2 dt \leqslant \|W_0^*\|^2 \int_{\delta_2} |F(\mu)|^2 d\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{37}$$

Кроме того, с учетом (33) и (34) имеем

$$\int_0^\infty \left(\int_{\delta_1} |F(\mu)\, w_0(t, \mu)|\, d\mu \right)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant M_0^2 (m-1)^2 \int_0^\infty \left(\int_{\delta_1} |F(\mu)|\, e^{-a\mu t} d\mu \right)^2 dt < \infty.$$

В силу последнего неравенства

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \int_0^\infty \left| \int_{\delta_1} e^{-i\xi\mu} F(\mu)\, w_0(t, \mu)\, d\mu \right|^2 dt = 0.$$

Но тогда существует число $\xi_0 > 0$ такое, что при $\xi > \xi_0$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \left| \int_{\delta_1} e^{-i\xi\mu} F(\mu)\, w_0(t, \mu)\, d\mu \right|^2 dt < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{38}$$

Используя неравенства (37) и (38), получим, что при $\xi > \xi_0$

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty e^{-i\xi\mu} F(\mu)\, w_0(t, \mu)\, d\mu \right|^2 dt \leqslant 2 \sum_{\nu=1}^{2} \int_0^\infty \left| \int_{\delta_\nu} e^{-i\xi\mu} F(\mu)\, w_0(t, \mu)\, d\mu \right|^2 dt < \varepsilon.$$

Тем самым, соотношение (36) доказано. Учытывая равенство (35), из (36) получаем соотношение (27) с $\nu_j = 4$.

Нетрудно убедиться, что функцию $G_5(\xi, \lambda)$ можно представить в виде

$$G_5(\xi, \lambda) = \Psi_1(\xi, \lambda) + \Psi_2(\xi, \lambda), \tag{39}$$

где

$$\Psi_1(\xi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta_1} e^{i\xi(\lambda-\mu)} F(\mu) \int_0^\infty \overline{w}(t, \lambda) \left[S_0^0(\mu)\, e^{it\mu} + e^{-it\mu} \right] dt\, d\mu, \tag{40}$$

$$\Psi_2(\xi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \overline{w}(t, \lambda) \int_{\xi_1} e^{i\xi(\lambda-\mu)} F(\mu) \left[S_0^0(\mu) e^{it\mu} + e^{-it\mu}\right] d\mu dt. \quad (41)$$

В силу (32) и (40)

$$\int_0^{\infty} |\Psi_2(\xi, \lambda)|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \|W\|^2 \int_0^{\infty} \left| \int_{\xi_1} e^{-i\xi\mu} F(\mu) \left[S_0^0(\mu) e^{it\mu} + e^{-it\mu}\right] d\mu \right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \|W\|^2 \int_{\xi_1} |F(\mu)|^2 d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (42)$$

Заметим, что

$$\int_0^{\infty} \overline{w}(t, \lambda) \left[S_0^0(\mu) e^{it\mu} + e^{-it\mu}\right] dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\overline{S}_k(\lambda)}{i\lambda\overline{\omega}_k + i\mu} + S_0^0(\mu) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\overline{S}_k(\lambda)}{i\lambda\overline{\omega}_k - i\mu}. \quad (43)$$

С учетом (33) и (34) имеем

$$\int_{\Delta_1} \left\{ \int_{\xi_1} |F(\mu)| \left(\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k + \mu} \right| + \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k - \mu} \right| \right) d\mu \right\}^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{b^2} M^2 (n-1)^2 \int_{\Delta_1} \left(\int_{\xi_1} \frac{|F(\mu)|}{\lambda + \mu} d\mu \right)^2 d\lambda < \infty. \quad (44)$$

Кроме того, в силу доказанной выше леммы

$$\int_{\Delta_2} \left\{ \int_{\xi_1} |F(\mu)| \left(\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k + \mu} \right| + \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\lambda)}{\lambda\omega_k - \mu} \right| \right) d\mu \right\}^2 d\lambda < \infty. \quad (45)$$

Однако в силу равенств (41), (43) и неравенств (44), (45)

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \int_0^{\infty} |\Psi_1(\xi, \lambda)|^2 d\lambda = 0.$$

Поэтому существует число $\xi_1 > 0$ такое, что при $\xi > \xi_1$

$$\int_0^{\infty} |\Psi_1(\xi, \lambda)|^2 d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (46)$$

Из равенства (39) и неравенств (42), (46) следует, что при $\xi > \xi_1$

$$\int_0^{\infty} |G_5(\xi, \lambda)|^2 d\lambda < 2\varepsilon.$$

Тем самым, соотношение (27) с $\nu = 5$ также доказано.

В силу соотношений (26) и (27) из (25) получаем равенства

$$G_+(\lambda) = \overline{S_0}(\lambda)\, S_0^0(\lambda)\, F(\mu), \quad G_-(\lambda) = F(\lambda). \tag{47}$$

Однако, согласно (23) и (24),

$$U_\pm(A, A_0) f(x) = \int_0^\infty u(x, \lambda)\, G_\pm(\lambda)\, d\lambda.$$

Отсюда с учетом (22) и (47) получаем справедливость формул (17) и (18), из которых легко получается также формула (19).

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть дифференциальные операции l и l_0 имеют одинаковый порядок и обладают операторами преобразования, а L и L_0 — некоторые самосопряженные операторы в $L^2(0, \infty)$, порожденные этими операциями соответственно. Тогда для пары L и L_0 существуют все волновые операторы и справедливы формулы*

$$U_+(L, L_0) f(x) = \int_0^\infty u(x, \lambda) \frac{S_0^0(\lambda)}{S_0(\lambda)} \int_0^\infty \overline{u_0}(t, \lambda) f(t)\, dt\, d\lambda,$$

$$U_-(L, L_0) f(x) = \int_0^\infty u(x, \lambda) \int_0^\infty \overline{u_0}(t, \lambda) f(t)\, dt\, d\lambda,$$

$$S(L, L_0) f(x) = \int_0^\infty \overline{u}(x, \lambda) \frac{S_0(\lambda)}{S_0^0(x)} \int_0^\infty \overline{u_0}(t, \lambda) f(t)\, dt\, d\lambda,$$

а также аналогичные формулы для операторов $U_\pm(L_0, L)$ и $S(L_0, L)$, где $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0, \infty)$.

Заметим, что в случае, когда операторы L и L_0 не имеют отрицательных собственных значений, теорема 2 может быть получена из теоремы 1 применением принципа инвариантности (см. [2], стр. 59).

Из полученных формул для операторов рассеяния следует, что $U_0 S(L, L_0) U_0^*$ и $U S(L_0, L) U^*$ суть операторы умножения на $S_0(\lambda) \times \times \overline{S_0^0}(\lambda)$ и $S_0^0(\lambda) \overline{S_0}(\lambda)$ соответственно. Тем самым, в данных рассеяния операторов L и L_0 только лишь функции $S_0(\lambda)$ и $S_0^0(\lambda)$ связаны с операторами рассеяния $S(L, L_0)$ и $S(L_0, L)$. Поэтому на основании результатов работы [3] естественно ожидать, что при фиксированном L_0 в рассматриваемом классе оператор L не определяется однозначно по операторам рассеяния даже при отсутствии собственных значений. Действительно, пусть оба оператора L и L_0 порождены дифференциальной операцией d^4/dx^4, причем L соответствует краевым условиям $y''(0) = y'''(0) = 0$, а L_0 — условиям $y(0) = y'(0) = 0$. Легко убедиться, что в данном случае $S_0(\lambda) = S_0^0(\lambda) = i$. Поэтому $S(L, L_0) = S(L_0, L) = = S(L_0, L_0) = I$.

Покажем, что если вместе с оператором L_0 фиксировать и краевые условия, то опять оператор L не определится однозначно по операторам рассеяния. Действительно, пусть оператор L_0 тот же, что и в указанном выше примере. Рассмотрим на полуоси $\lambda > 0$ функции

$$S_0(\lambda) = \varepsilon\lambda e^{-\lambda} + i\sqrt{1 - \varepsilon^2\lambda^2 e^{-2\lambda}}, \quad S_1(\lambda) = -1 - i + \delta\lambda e^{-\lambda}\varphi(\lambda), \tag{48}$$

где $\varphi(\lambda)$ — полином или финитная функция, имеющая абсолютно непрерывные производные до четвертого порядка включительно, а ε и δ — — произвольные числа (ε вещественно). Используя результаты работ [3], [11], [12], можно доказать, что при достаточно малых ε и δ функции (48) являются функциями рассеяния некоторого самосопряженного дифференциального оператора L четвертого порядка, которому соответствуют краевые условия $y(0) = y'(0) = 0$. При этом коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (8) с $n = 2$, и, кроме того, оператор L не имеет собственных значений. Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ $S_0(\lambda) = i$ и, следовательно, $S(L, L_0) = S(L_0, L) = I$. Полагая в (48) $\varepsilon = 0$ и меняя число δ, мы получим различные операторы L, имеющие с L_0 одинаковые операторы рассеяния.

В связи с приведенным примером укажем некоторый общий случай, когда дифференциальный оператор не имеет собственных значений. С этой целью предположим, что коэффициенты $p_k(x)$ в (1) удовлетворяют условиям (2), и введем на полуоси $(0, \infty)$ функцию

$$Q(\xi) = \sum_{k=0}^{2n-2} C \left\{ \int_0^{\xi b_k} \left(\frac{x}{b_k}\right)^{2n-1-k} |p_k(x)|\, dx + \xi^{2n-1-k} \int_{\xi b_k}^{\infty} |p_k(x)|\, dx \right\},$$

где

$$b_k^{2n-1-k} = \frac{\left(n - \left[\frac{k}{2}\right]\right)!\left(n - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)!}{n - \frac{k}{2}}, \quad k = 0, 1, \cdots, 2n-2,$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k, j=0}^{n-1} \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^{n-1} \left| \frac{\omega_s + \omega_k}{\omega_s - \omega_j} \right|.$$

Мы не исключаем случай $n = 1$ и в этом случае полагаем $C = 1$. Очевидно, что $Q(+0) = 0$. Кроме того, $Q'(\xi) \geqslant 0$ и, следовательно, функция $Q(\xi)$ неубывающая.

Следующая теорема несколько усиливает результат, анонсированный автором в [13].

Теорема 3. *Пусть оператор L соответствует краевым условиям $y^{(k)}(0) = 0$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$. Тогда, если $Q(\infty) > 1$, то собственные значения оператора L заключаются в интервале $(-\xi_0^{-2n}, \xi_0^{-2n})$, где ξ_0 — наибольший корень уравнения $Q(\xi) = 1$, а если $Q(\infty) \leqslant 1$, т. е.*

$$\sum_{k=0}^{2n-2} C \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{b_k}\right)^{2n-1-k} |p_k(x)|\, dx \leqslant 1, \tag{49}$$

то оператор L не имеет собственных значений.

Отметим, что в случае $n=1$ указанное условие (49), при котором оператор L не имеет собственных значений, известно (см., например, [14], стр. 699), а указанная снизу оценка собственных значений (при $n=1$ оператор L не имеет положительных собственных значений) уточняет оценку, полученную в [15], стр. 181.

В заключение автор благодарит В. Б. Лидского и Л. А. Сахновича за полезные обсуждения результатов.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 18.II.1985

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների զույգին համապատասխանող ցրման օպերատորների մասին *(ամփոփում)*

$L^2(0, \infty)$ *տարածությունում դիտարկվում է անվերջությունում նվազող գործակիցներով* $2n>2$ *կարգի ինքնահամալուծ դիֆերենցիալ օպերատորների որոշ դաս։ Ապացուցվում է, որ դիտարկվող դասի կամայական* L *և* L_0 *օպերատորների զույգի համար գոյություն ունեն ցրման* $S(L, L_0)$ *և* $S(L_0, L)$ *օպերատորները։ Արտածվում են բանաձևեր ալիքային օպերատորների և ցրման օպերատորների համար։ Ցույց է տրվում, որ դիտարկվող դասում ֆիքսած* L_0 *օպերատորի դեպքում* L *օպերատորը միարժեքորեն չի որոշվում ցրման օպերատորներով։*

I. G. KHACHATRIAN. *On scattering operators for a pair of differential operators of higher order* (summary)

A class of self-adjoint differential operators of order $2n>2$ in the space $L^2(0, \infty)$ is considered. It is proved that for any pair of operators L and L_0 from this class there exists a scattering operator $S(L, L_0)$ and $S(L_0, L)$. Formulas for wave operators and scattering operators are derived. Example are given which show that in this class for fixed L_0 it is impossible to define the operator L uniquelly by means of scattering operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман*. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1966.
2. *М. Рид, Б. Саймон*. Методы современной математической физики, т. 3, М., «Мир», 1982.
3. *И. Г. Хачатрян*. О некоторых обратных задачах для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси, Функц. анализ и его прилож., 17, № 1, 1983, 40—52.
4. *Л. Д. Фаддеев*. Обратная задача квантовой теории рассеяния, Итоги науки и техники, серия Современные проблемы математики, М., ВИНИТИ, 3, 1974, 93—180.
5. *М. Волленберг, В. Д. Кошманенко*. О структуре волновых операторов, ДАН СССР, 244, № 2, 1979, 265—269.
6. *М. А. Наймарк*. Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
7. *И. Г. Хачатрян*. О некоторых формулах следов, ДАН Арм.ССР, 78, № 1, 1984, 23—27.
8. *И. Г. Хачатрян*. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 14, № 6, 1979, 424—445.
9. *И. Г. Хачатрян*. Об одной обратной задаче для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 18, № 5, 1983, 394—402.

10. *М. М. Маламуд.* К вопросу об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений, Препринт 84. 12, Киев, Ин-т матем. АН УССР, 1984.
11. *И. Г. Хачатрян.* Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси, ДАН Арм.ССР, 77, № 2, 1983, 55—58.
12. *И. Г. Хачатрян.* Об одной формуле следов, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 20, № 1, 1985, 41—52.
13. *И. Г. Хачатрян.* Изучение точечного спектра обыкновенного дифференциального оператора, ДАН Арм.ССР, 76, № 3, 1983, 103—105.
14. *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов, М., «Мир», 1972.
15. *В. А. Марченко.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1977.
16. *В. С. Буслаев.* Рассеянные плоские волны, спектральные асимптотики и формулы следа во внешних задачах, ДАН СССР, 197, № 5, 1971, 999—1002.