ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 1, 1986 Математика

УДК 517.955

Р. Г. АЙРАПЕТЯН

О СВЕДЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ К СИММЕТРИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Рассмотрим уравнение

$$Pv(t, x)=f(t, x), \ (t>0, \ x\in R^n), \tag{0.1}$$

где P—t-гиперболический (по И. Г. Петровскому) оператор порядка m.

Известно, что при $m=2$ это уравнение может быть сведено к симметрической гиперболической (по К. Фридрихсу) системе дифференциальных уравнений первого порядка. Сведение это часто используется, поскольку симметрические гиперболические системы обладают рядом известных преимуществ. При этом компонентами искомой вектор-функции являются функция v и ее производные.

С. К. Годуновым была поставлена задача о симметризации такого типа для гиперболического уравнения произвольного порядка, а также предложен подход к ее решению, основанный на использовании тождества Хермандера. С помощью этого подхода в работах С. К. Годунова и В. И. Костина [1] и Т. Ю. Михайловой [2] задача эта решена в следующих частных случаях: для уравнения с двумя пространственными переменными доказана принципиальная возможность симметризации ([1]), а для уравнений, инвариантных относительно вращений, построена конкретная симметризация ([2]). Однако в общем случае задача о такой симметризации оказалась неразрешимой. Это стало ясно из недавней работы В. В. Иванова [11], где показано, что не для всякого гиперболического по Петровскому дифференциального уравнения такая симметризация возможна. Более того, уже тогда, когда порядок уравнения и число пространственных переменных равны четырем, возникает целая область операторов, не допускающих подобной симметризации даже при их малых возмущениях.

Ниже изложен другой подход, основанный на рассмотрении некоторой вспомогательной задачи о продолжении оператора с граничного многообразия. Решение последней задачи сводится к изучению серии симметрических, гиперболических по Фридрихсу систем дифференциальных уравнений первого порядка, что дает возможность подойти к проблеме симметризации с новой точки зрения. Такая (косвенная) симметризация оказывается осуществимой уже для любого гиперболического по Петровскому оператора. Сама же задача о построении слабо коммутирующих продолжений операторов представляет самостоятельный интерес и может быть применена ,скажем, при изучении смешанных задач.

§1. Постановка задачи о построении слабо коммутирующего продолжения оператора

Обозначим через $\mathfrak{M}_{k_1, k_2}$ класс линейных операторов — дифференциальных по t и псевдодифференциальных по x $(x \in R^n)$ — допускающих следующее представление

$$P = \sum_{j=0}^{k_1} P_j D_t^j, \text{ где } D_t = -i\frac{\partial}{\partial t},$$

а P_j — псевдодифференциальный оператор по x порядка $k_2 - j$, символ которого — $p_j(t, x, \xi)$ — гладкая функция на кокасательном расслоении $R_+^1 \times T^* R^n$. Вместо $\mathfrak{M}_{k,k}$ будем писать $\mathfrak{M}_k$.

Пусть заданы операторы $P \in \mathfrak{M}_m$, $Q \in \mathfrak{M}_{m-1}$, $S \in \mathfrak{M}_{m-1}$, причем P_m — эллиптический и символ оператора S не зависит от t.

Задача. *Найти операторы* $B \in \mathfrak{M}_{m-1}$ и $C \in \mathfrak{M}_{m-1}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$[P, B] = CP + QB + T, \quad T \in \mathfrak{M}_{2m-1, -\infty}, \tag{1.1}$$

$$B|_{t=0} = S. \tag{1.2}$$

Замечание 1. Частный случай этой задачи $(m=2)$ рассматривался в работах [3]—[6] при исследовании смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка.

Определение. *Оператор* B, *удовлетворяющий соотношениям* (1.1)—(1.2), *назовем слабо коммутирующим с* P *продолжением оператора* S.

Приведем схему сведения задачи Коши для уравнения (0.1) к задаче (1.1)—(1.2).

Пусть P—строго гиперболический оператор, задающий левую часть уравнения (0.1), а L_j — однородные псевдодифференциальные операторы первого порядка, символы которых, соответственно, $\lambda_j(t, x, \xi)$ — — корни главного символа $p_0(t, x, \tau, \xi)$ оператора P. Тогда

$$P - P_m \prod_{j=1}^{m} (D_t - L_j) \in \mathfrak{M}_{m-1}.$$

Обозначим этот оператор через Q. В качестве S возьмем какой-нибудь строго гиперболический оператор порядка m—1. Пусть B — слабо коммутирующее с P продолжение оператора S. Тогда в некоторой окрестности гиперплоскости $t=0$ оператор B будет строго гиперболическим. Применим к уравнению (0.1) оператор B. Воспользовавшись соотношением (1.1), получаем уравнение

$$P_m \prod_{j=1}^{m} (D_t - L_j) Bv = (B + C) f + Tv. \tag{1.3}$$

Оператор P_m —эллиптический, следовательно, для него существует левый регуляризатор (параметрикс). Подействовав этим регуляризатором на обе части уравнения (1.3) и решая последовательно задачи Коши для m однородных псевдодифференциальных уравнений первого порядка, получаем гиперболическое уравнение (m—1)-го порядка

$$Bv = f_1 + T_0 v, \tag{1.4}$$

где $T_0 \in \mathfrak{M}_{m-1, -\infty}$.

Таким образом, задача Коши для уравнения порядка m свелась к аналогичной задаче для уравнения порядка $m-1$. Осуществляя индукцию по порядку уравнения, приходим к легко обращаемому уравнению нулевого порядка.

§ 2. О главных минорах безутианты

Для дальнейшего нам понадобится формула, выражающая главные миноры безутианты двух полиномов через корни этих полиномов.

Согласно [7], каждым двум полиномам $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$ и $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$ $(a_m \neq 0)$ сопоставим симметрическую матрицу $B(f, g) = \|b_{ij}\|_{i, j=1}^{m}$, определяемую равенством

$$\frac{f(x)\,g(y) - f(y)\,g(x)}{x-y} = \sum_{i, j=1}^{m} b_{ij} x^{i-1} y^{j-1}$$

и называемую безутиантой полиномов f и g. В случае, если порядок полинома g меньше m, этот полином достраивается до полинома порядка m нулями при старших степенях.

Как показано в работе [8], безутианта выражается через коэффициенты полиномов посредством следующей формулы

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_m \\ \vdots & & \\ a_m & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_{m-1} \\ & & \vdots \\ 0 & & b_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_m \\ \vdots & & \\ b_m & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_{m-1} \\ & & \vdots \\ 0 & & a_0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

в правой части которой стоят треугольные теплицевы и ганкелевы матрицы.

Пусть $x_1, \cdots, x_m$ — корни полинома f, а $y_1, \cdots, y_m$ — корни полинома g. Обозначим через $|b_{ij}|_{i, j=k+1}^{m}$, $k = 1, \cdots, m$, главные миноры безутианты, отсчитываемые от правого нижнего угла.

Лемма. *Пусть все корни полинома f — простые. Тогда*

$$|b_{ij}|_{i, j=k+1}^{m} = a_m^{2(m-k)} \sum_{\substack{(l_1, \cdots, l_{m-k}) \subset (1, \cdots, m) \\ l_1 < l_2 < \cdots < l_{m-k}}} \frac{g(x_{l_1}) \cdots g(x_{l_{m-k}})}{f'(x_{l_1}) \cdots f'(x_{l_{m-k}})} \times$$

$$\times \prod_{\substack{(j_1, j_2) \subset (l_1, \cdots, l_{m-k}) \\ j_1 < j_2}} (x_{j_1} - x_{j_2})^2. \tag{2.2}$$

Замечание 2. Формула для главных миноров безутианты приведена в предположении, что хотя бы один из полиномов имеет простые корни. В известной автору литературе она не встречается. Выражение для случая, когда оба полинома имеют кратные корни, получается из (2.2) предельным переходом и имеет несколько громоздкий вид.

Доказательство. Как показано в работе [8]

$$|b_{ij}|_{i,\,j-k+1}^{m}=(-1)^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}}\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_m\cdots & & a_{k+1} & a_k\cdots & & a_{2k-m+1}\\ & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & & a_m & a_{m-1}\cdots & & a_k\\ \hline b_m\cdots & & b_{k+1} & b_k\cdots & & b_{2k-m+1}\\ & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & & b_m & b_{m-1}\cdots & & b_k \end{array}\right|.$$

Очевидно, что этот определитель равен следующему

$$(-1)^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}}\left|\begin{array}{ccc} a_m\cdots & a_0 & 0\\ 0 & a_m\cdots & a_0\\ \hline b_m\cdots & b_0 & 0\\ 0 & b_m\cdots & b_0\\ \hline 0 & & I_k \end{array}\right|, \tag{2.3}$$

где I_k — единичная матрица размера $k\times k$.

Умножим определитель (2.3) на следующий определитель Вандермонда:

$$\left|\begin{array}{ccccc} x_1^{2m-k-1}\cdots & x_m^{2m-k-1} & y_1^{2m-k-1} & \cdots & y_{m-k}^{2m-k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1\ \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{m(m-k)}{2}}}{a_m^{m-k}}f(y_1)\cdots f(y_{m-k})\prod_{1\le i_1<i_2\le m}(x_{i_1}-x_{i_2})\prod_{1\le j_1<j_2\le m-k}(y_{j_1}-y_{j_2}). \tag{2.4}$$

В результате получаем определитель

$$(-1)^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}}\times$$

$$\times\left|\begin{array}{ccc|ccc} & 0 & & y_1^{m-k-1}f(y_1)\cdots & & y_{m-k}^{m-k-1}f(y_{m-k})\\ & & & \vdots & & \vdots\\ & & & f(y_1) & \cdots & f(y_{m-k})\\ \hline x_1^{m-k-1}g(x_1)\cdots & & x_m^{m-k-1}g(x_m) & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ g(x_1) & \cdots & g(x_m) & & & \\ \hline x_1^{k-1} & \cdots & x_m^{k-1} & y_1^{k-1} & \cdots & y_{m-k}^{k-1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right|=$$

$$=(-1)^{m(m-k)+\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}} f(y_1)\cdots f(y_{m-k}) \prod_{\substack{1\le j_1<j_2\le m-k\\ j_1<j_2}} (y_{j_1}-y_{j_2})\times$$

$$\times \sum_{\substack{(l_1,\cdots,l_{m-k})\subset(1,\cdots,m)\\ l_1<l_2<\cdots<l_{m-k}}} (-1)^{l_1+\cdots+l_{m-k}+\frac{(m-k)(m-k+1)}{2}} g(x_{l_1})\cdots g(x_{l_{m-k}})\times$$

$$\times \prod_{\substack{(p_1,p_2)\subset(l_1,\cdots,l_{m-k})\\ p_1<p_2}} (x_{p_1}-x_{p_2}) \prod_{\substack{(q_1,q_2)\subset(1,\cdots,m)\diagdown(l_1,\cdots,l_{m-k})\\ q_1<q_2}} (x_{q_1}-x_{q_2}).$$

Отсюда и из (2.4) получаем равенство

$$|b_{i,j}|_{i,j=k+1}^{m} = a_m^{m-k}(-1)^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}} \sum_{\substack{(l_1,\cdots,l_{m-k})\subset(1,\cdots,m)\\ l_1<l_2<\cdots<l_{m-k}}} g(x_{l_1})\cdots g(x_{l_{m-k}})\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{\substack{j_1\in(l_1,\cdots,l_{m-k})\\ j_2\in(1,\cdots,m)\diagdown(l_1,\cdots,l_{m-k})}} (x_{j_1}-x_{j_2})\Bigg)^{-1},$$

из которого следует формула (2.2).

§ 3. Сведение задачи о построении слабо коммутирующего продолжения оператора к симметрическим системам

Будем исходить из асимптотического разложения

$$p_j(t, x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k}(t, x, \xi), \tag{3.1}$$

где $p_{j,k}(t, x, \xi)$ — гладкая функция, однородная степени $m-j-k$ по ξ. Аналогичные разложения имеют место для символов b_j, q_j, s_j, c_j операторов B_j, Q_j, S_j, C_j.

Обозначим через Ω_1 верхнетреугольную теплицеву матрицу

$$\begin{pmatrix} p_{m,0} & \cdots & p_{1,0}\\ & & \vdots\\ 0 & & p_{m,0}\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

через b^k и s^k — векторы $(b_{0,k}, \cdots, b_{m-1,k})^{tr}$ и $(s_{0,k}, \cdots, s_{m-1,k})^{tr}$, а через u_k и φ_k — векторы $(u_{1,k}, \cdots, u_{m,k})^{tr}$ и $(\varphi_{1,k}, \cdots, \varphi_{m,k})^{tr}$, получающиеся из b^k и s^k преобразованием

$$u_k = \Omega_1^{-1} b^k,\ \varphi_k = \Omega_1^{-1} s^k. \tag{3.3}$$

Пусть M—некоторая квадратная матрица. Обозначим через $M^{\#}$ матрицу, получающуюся из M транспонированием относительно второй диагонали, т. е. $M^{\#} = (JMJ)^{tr}$, где $J=\|\delta_{i,n+1-j}\|$.

Теорема 1. *Задача* (1.1)—(1.2) *эквивалентна следующей последовательности задач Коши для систем первого порядка на кокасательном расслоении*

$$A_0\frac{\partial u_k}{\partial t}=\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\frac{\partial u_k}{\partial x_\nu}+\sum_{\nu=1}^{n}A^\nu\frac{\partial u_k}{\partial \xi_\nu}+Au_k+$$

$$+F_k(t,\ x,\ \xi;\ u_0,\ \cdots,\ u_{k-1}),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{3.4}$$

$$u_k(0,\ x,\ \xi)=\varphi_k(x,\ \xi). \tag{3.5}$$

Все матрицы, входящие в (3.4), размера $m\times m$ и гладкие по t, x, ξ. Матрицы A_0, A_ν, A^ν — симметрические:

$$A_0=B\left(p_0(t,\ x,\ \tau,\ \xi),\ \frac{\partial}{\partial\tau}p_0(t,\ x,\ \tau,\ \xi)\right)^{\#}, \tag{3.6}$$

$$A_\nu=-B\left(p_0(t,\ x,\ \tau,\ \xi),\ \frac{\partial}{\partial\xi_\nu}p_0(t,\ x,\ \tau,\ \xi)\right)^{\#}, \tag{3.7}$$

$$A^\nu=B\left(p_0(t,\ x,\ \tau,\ \xi),\ \frac{\partial}{\partial x_\nu}p_0(t,\ x,\ \tau,\ \xi)\right)^{\#}. \tag{3.8}$$

Из теоремы 1 и леммы следует, что главные миноры Δ_k матрицы A_0 оказываются равными величинам:

$$\Delta_1=mp_{m,0}^2,\ \Delta_k=p_{m,0}^{2k}\sum_{\substack{(l_1,\cdots,l_k)\subset(1,\cdots,m)\\ l_1<\cdots<l_k}}\ \prod_{\substack{(j_1\, j_2)\subset(l_1,\cdots,l_k)\\ j_1<j_2}} \tag{3.9}$$

$$(\lambda_{j_2}-\lambda_{j_1})^2,\ k=2,\ \cdots,\ m.$$

Отсюда следует

Теорема 2. *Если оператор P—строго гиперболический, то тогда матрица A_0—положительно определенная и, следовательно, система (3.4) — симметрическая гиперболическая (по Фридрихсу).*

Для того, чтобы выписать матрицу A введем некоторые вспомогательные матрицы.

Пусть Ω_2 и Ω_3—ганкелевы матрицы

$$\Omega_2=\begin{pmatrix} p_{m-1,0} & \cdots & p_{0,0}\\ \vdots & & \\ p_{0,0} & & 0\end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\Omega_3=\begin{pmatrix} mp_{m,0} & (m-1)\,p_{m-1,0} & \cdots & p_{1,0}\\ (m-1)\,p_{m-1,0} & & & \\ \vdots & & & \\ p_{1,0} & & & 0\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

и Ω_4—верхнетреугольная теплицева матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & mp_{m,0} & \cdots & 2p_{2,0}\\ & & & \vdots\\ & & & mp_{m,0}\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Обозначим, далее

$$\Omega_5 = \begin{pmatrix} 0 & D_t p_{m,0} & 2D_t p_{m-1,0} & \cdots & (m-1) D_t p_{2,0} \\ & & 2D_t p_{m,0} & \cdots & (m-1) D_t p_{3,0} \\ & & & & \vdots \\ & 0 & & & (m-1) D_t p_{m,0} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

и

$$\Omega_6 = \begin{pmatrix} 0 & D_t p_{m-1,0} & \cdots & (m-1) D_t p_{1,0} \\ 0 & D_t p_{m-2,0} & \cdots & (m-1) D_t p_{0,0} \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & D_t p_{0,0} & & \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

а также

$$\mathrm{R}^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} R_{m-1} & \cdots & R_0 \\ \vdots & & \\ R_0 & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{R}^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} R_m & \cdots & R_1 \\ & & \vdots \\ 0 & & R_m \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

где $R_j = (j+1) p_{j+1,0} D_t - i\{p_{j,0}, \cdot\} - q_{j,0}$, $j = 0, 1, \cdots, m-1$, $R_m = -i\{p_{m,0}, \cdot\}$, $\{\ ,\ \}$ — скобка Пуассона.

Как будет показано ниже (§ 4), матрица A выражается следующей формулой:

$$A = -i(R^{\mathrm{I}} - \Omega_2 \Omega_1^{-1} R^{\mathrm{II}} + \Omega_2 \Omega_1^{-1} \Omega_5 - \Omega_6) \Omega_1. \tag{3.16}$$

§ 4. Доказательство теоремы 1

Вычислим сначала коммутатор

$$[P, B] = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m-1} [P_k D_t^k, B_l D_t^l]. \tag{4.1}$$

Имеет место равенство

$$[P_k D_t^k, B_l D_t^l] = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{j}{k} P_k (D_t^{k-j} B_l) D_t^{l+j} - \\ - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{j}{l} B_l (D_t^{l-j} P_k) D_t^{k+j} + [P_k, B_l]. \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1) и меняя порядок суммирования, получаем

$$[P, B] = \sum_{k=0}^{2(m-1)} \sum_{j=\max(0,k+1-m)}^{\min(m-1,k)} \sum_{l=1}^{m-j} \binom{l}{l+j} P_{l+j} (D_t^l B_{k-j}) D_t^k - \\ - \sum_{k=0}^{2(m-1)} \sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(k,m-2)} \sum_{l=1}^{m-1-j} \binom{l}{l+j} B_{l+j} (D_t^l P_{k-j}) D_t^k + \\ + \sum_{k=0}^{2m-1} \sum_{j=\max(0,k-m+1)}^{\min(k,m)} [P_j, B_{k-j}] D_t^k.$$

С другой стороны

$$CP = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} C_k (D_t^{k-j} P_l) D_t^{l+j}$$

или, изменив порядок суммирования

$$CP=\sum_{k=0}^{2m-1}\sum_{j=\max(0,\,k-m)}^{\min(m-1,\,k)}\sum_{l=0}^{m-1-j}\binom{l}{l+j}C_{l+j}(D_t^l P_{k-j})\,D_t^{*}.$$

Аналогично

$$QB=\sum_{k=0}^{2m-2}\sum_{j=\max(0,\,k+1-m)}^{\min(m-1,\,k)}\sum_{l=0}^{m-1-j}\binom{l}{l+j}Q_{l+j}(D_t^l B_{k-j})\,D_t^{*}.$$

Приравняв в равенстве (1.1) коэффициенты при одинаковых степенях D_t, получаем следующую систему из $2m$ операторных равенств

$$\sum_{j=\max(0,\,k+1-m)}^{\min(k,\,m-1)}\sum_{l=1}^{m-j}\binom{l}{l+j}P_{l+j}(D_t^l B_{k-j})-$$

$$-\sum_{j=\max(0,\,k-m)}^{\min(k,\,m-2)}\sum_{l=1}^{m-1-j}\binom{l}{l+j}B_{l+j}(D_t^l P_{k-j})+$$

$$+\sum_{j=\max(0,\,k-m+1)}^{\min(m,\,k)}[P_j,\,B_{k-j}]-$$

$$-\sum_{j=\max(0,\,k-m)}^{\min(m-1,\,k)}\sum_{l=0}^{m-j-1}\binom{j}{l+j}C_{l+j}(D_t^l\,P_{k-j})-$$

$$-\sum_{j=\max(0,\,k+1-m)}^{\min(m-1,\,k)}\sum_{l=0}^{m-j-1}\binom{j}{l+j}Q_{l+j}(D_t^l B_{k-j})=0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M}_{0,\,-\infty}),$$

$$k=0,1,\cdots,2m-2,$$

$$[P_m,\,B_{m-1}]=C_{m-1}P_m.$$

Приведенные выше равенства псевдодифференциальных операторов перепишем в виде равенств для их символов. Используя асимптотические разложения символов, последовательно получаем системы уравнений, сначала на главные символы, а затем на следующие члены разложения. Для того, чтобы получить главную часть равенства, надо положить $l=1$ в левой части и $l=0$ в правой. Получаем

$$\sum_{j=\max(0,\,k+1-m)}^{\min(m-1,\,k)}(j+1)\,p_{j+1,0}D_t b_{k-j,\,\nu}-$$

$$-\sum_{j=\max(0,\,k-m)}^{\min(k,\,m-2)}(j+1)\,b_{j+1,\,\nu}D_t p_{k-j,\,0}-$$

$$-i\sum_{j=\max(0,\,k-m+1)}^{\min(k,\,m)}\{p_{j,0},\,b_{k-j,\,\nu}\}-\sum_{j=\max(0,\,k-m)}^{\min(m-1,\,k)}c_{j,\,\nu}\,p_{k-j,0}-$$

$$-\sum_{j=\max(0,\,k-m+1)}^{\min(m-1,\,k)}q_{j,0}\,b_{k-j,\,\nu}=F_k(t,\,x,\,\xi;\,b_0,\cdots,b_{\nu-1};\,c_0,\cdots,c_{\nu-1})$$

для $k=0,\,1,\,2,\cdots,2m-2$,

$$-i\{p_{m,0},\,b_{m-1,\,\nu}\}-c_{m-1,\,\nu}\,p_{m,0}=F_{2m-1}(t,\,x,\,\xi;\,b_0,\cdots,b_{\nu-1};\,c_0,\cdots,c_{\nu-1}),$$

где $\nu=0,\,1,\,2,\cdots$.

Для удобной записи этих уравнений воспользуемся операторами (3.15). Рассмотрим сначала последние m уравнений, т. е. когда $k \geqslant m$. Они выглядят следующим образом:

$$\sum_{j=k+1-m}^{m} R_j\, b_{k-j,\nu} - \sum_{j=k-m}^{m-2} (j+1)\, b_{j+1,\nu} D_l\, p_{k-j,0} -$$

$$- \sum_{j=k-m}^{m-1} c_{j,\nu}\, p_{k-j,0} = F_k(t, x, \xi;\, b_0, \cdots, b_{\nu-1};\, c_0, \cdots, c_{\nu-1}),$$

$$k = m,\, m+1, \cdots, 2m-2,$$

$$-i\,\{p_{m,0},\, b_{m-1,\nu}\} - c_{m-1,\nu}\, p_{m,0} = F_{2m-1}(t, x, \xi;\, b_0, \cdots, b_{\nu-1};\, c_0, \cdots, c_{\nu-1}).$$

Оставшиеся m уравнений $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ записываются так:

$$\sum_{j=0}^{k} R_j\, b_{k-j,\nu} - \sum_{j=0}^{\min(k,\, m-2)} (j+1)\, b_{j+1,\nu} D_l\, p_{k-j,0} -$$

$$- \sum_{j=0}^{k} c_{j,\nu}\, p_{k-j,0} = F_k(t, x, \xi;\, b_0, \cdots, b_{\nu-1};\, c_0, \cdots, c_{\nu-1}).$$

Для дальнейшего исследования полученной системы удобно переписать ее в матричном виде, разбив предварительно на две системы. Используя обозначения (3.2), (3.10)—(3.15), получаем

$$\mathrm{R}^{\mathrm{II}}\, b^\nu - \Omega_1 c^\nu - \Omega_5 b^\nu = \Phi_1(t, x, \xi;\, b_0, \cdots, b_{\nu-1};\, c_0, \cdots, c_{\nu-1}),$$

$$\mathrm{R}^{\mathrm{I}}\, b^\nu - \Omega_2 c^\nu - \Omega_6 b^\nu = \Phi_2(t, x, \xi;\, b_0, \cdots, b_{\nu-1};\, c_0, \cdots, c_{\nu-1}),$$

где $\Phi_1 = (F_m, \cdots, F_{2m-1})^{\mathrm{tr}}$, $\Phi_2 = (F_0, \cdots, F_{m-1})^{\mathrm{tr}}$.

По предположению, оператор P_m—эллиптический, следовательно

$$\det \Omega_1 = p_{m,0}^m \neq 0.$$

Из первой системы определим вектор

$$c^\nu = \Omega_1^{-1} \mathrm{R}^{\mathrm{II}}\, b^\nu - \Omega_1^{-1} \Omega_5 b^\nu - \Omega_1^{-1} \Phi_1,$$

подставим его во вторую и произведем замену неизвестной функции (3.3). В результате система запишется следующим образом:

$$(\mathrm{R}^{\mathrm{I}} \Omega_1 - \Omega_2 \Omega_1^{-1} \mathrm{R}^{\mathrm{II}} \Omega_1 + \Omega_2 \Omega_1^{-1} \Omega_5 \Omega_1 - \Omega_6 \Omega_1)\, u_\nu = \Phi_2 - \Omega_2 \Omega_1^{-1} \Phi_1.$$

Расписав в этой системе операторы R_j и использовав тот простой факт, что теплицевы верхнетреугольные матрицы коммутируют, получаем систему (3.4), где

$$A_0 = \Omega_3 \Omega_1 - \Omega_2 \Omega_4, \tag{4.3}$$

$$A_\nu = \Omega_2 \Omega_{1\xi_\nu} - \Omega_{2\xi_\nu} \Omega_1, \tag{4.4}$$

$$A^\nu = \Omega_{2x_\nu} \Omega_1 - \Omega_2 \Omega_{1x_\nu}, \tag{4.5}$$

и матрица A определяется выражением (3.16). Из этих соотношений и из (2.1) следуют равенства (3.6)—(3.8).

§ 5. Оператор второго порядка

Рассмотрим пару операторов $P = D_t^2 + P_1 D_t + P_0$ и $Q = Q_1 D_t + Q_0$. Задача (1.1) — (1.2) эквивалентна задаче Коши для системы (3.4), где, в силу (4.3) — (4.5) и (3.16)

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & p_{1,0} \\ p_{1,0} & p_{1,0}^2 - 2p_{0,0} \end{pmatrix},$$

$$A_\nu = -\begin{pmatrix} p_{1,0_{\xi_\nu}} & p_{0,0_{\xi_\nu}} \\ p_{0,0_{\xi_\nu}} & p_{1,0}p_{0,0_{\xi_\nu}} - p_{0,0}p_{1,0_{\xi_\nu}} \end{pmatrix},$$

$$A^\nu = \begin{pmatrix} p_{1,0_{x_\nu}} & p_{0,0_{x_\nu}} \\ p_{0,0_{x_\nu}} & p_{1,0}p_{0,0_{x_\nu}} - p_{0,0}p_{1,0_{x_\nu}} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} iq_{1,0} & iq_{0,0} - p_{1,0_t} \\ iq_{0,0} & iq_{0,0}\, p_{1,0} - iq_{1,0}\, p_{0,0} + p_{0,0_t} - p_{1,0}p_{1,0_t} - \{p_{0,0}, p_{1,0}\} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + a_0 u_t + \sum_{j=1}^{n} a_j u_{x_j} + au = f, \tag{5.1}$$

где $\|a_{ij}\|$ — симметрическая матрица.

Оператор, задающий это уравнение, имеет следующий вид:

$$P = D_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{x_i} D_{x_j} - ia_0 D_t - i\sum_{j=1}^{n} a_j D_{x_j} - a$$

и, следовательно, $p_{1,0} = 0$, $p_{0,0} = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$.

Оператор Q находим из условия

$$P = (D_t - L_1)(D_t - L_2) + Q, \tag{5.2}$$

где L_1, L_2—однородные псевдодифференциальные операторы первого порядка, символы которых

$$\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = -\lambda, \text{ где } \lambda = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j}.$$

Из (5.2) следуют равенства

$$P_1 + L_1 + L_2 = Q_1,$$
$$P_0 - L_1 L_2 + [D_t, L_2] = Q_0.$$

Переписав эти операторные равенства в виде равенств для символов, получаем первые члены асимптотических разложений операторов Q_1 и Q_0:

$$q_{1,0} = -ia_0,$$

$$q_{0,0} = -i\sum_{j=1}^{n} a_j\xi_j + i\frac{\partial\lambda}{\partial t} - i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_j}\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}.$$

Таким образом, из вышеизложенного следует, что задача Коши для уравнения (5.1) сводится к последовательности задач Коши для симметрических гиперболических систем:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \end{pmatrix}\frac{\partial u_k}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{n}\begin{pmatrix} 0 & 2\sum\limits_{j=1}^{n} a_{\nu j}\xi_j \\ 2\sum\limits_{j=1}^{n} a_{\nu j}\xi_j & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u_k}{\partial x_\nu} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\begin{pmatrix} 0 & -\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\nu}\xi_i\xi_j \\ -\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\nu}\xi_i\xi_j & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u_k}{\partial \xi_\nu} + \tag{5.3}$$

$$+\begin{pmatrix} a_0 & -\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{n}\left(a_j\xi_j + \frac{\partial\lambda}{\partial\xi_j}\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\right) \\ -\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{n}\left(a_j\xi_j + \frac{\partial\lambda}{\partial\xi_j}\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\right) & \sum\limits_{i,j=1}^{n}\left(a_0 a_{ij} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\xi_i\xi_j \end{pmatrix} u_k + F_k.$$

Интересно сравнить предложенный способ сведения уравнения (5.1) к симметрическим системам с методом К. Фридрихса, приводящим к следующей симметрической гиперболической системе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{1\nu} & \cdots & a_{n\nu} \\ 0 & a_{1\nu} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n\nu} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_\nu} -$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} u + F. \tag{5.4}$$

Бросаются в глаза следующие два признака, отличающие системы (5.4) и (5.3). Во-первых, матрицы, входящие в систему (5.4), имеют размеры $(n+2)\times(n+2)$, в то время как матрицы, входящие в систему (5.3),—размера 2×2. И вообще, при симметризации (3.4) число уравнений всегда равно порядку исходного уравнения.

Во-вторых, в систему (5.4) входит столько же независимых переменных, сколько их было в исходном уравнении, а в системе (5.3) число независимых переменных удваивается. Существенным является то обстоятельство, что пространственные и двойственные к ним переменные в системе (3.4), по существу, равнозначны.

По всей вероятности, предложенный подход может быть использован при построении коротковолновых асимптотик. В связи с этим было бы небезынтересно выяснить его связ с методом канонического оператора В. П. Маслова (см., например, [9], [10]).

В заключение автор выражает благодарность А. Б. Нерсесяну за плодотворные обсуждения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26.X.1984

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդրի բերումը սիմետրիկ համակարգերին *(ամփոփում)*

Առաջարկվում է նոր մոտեցում հիպերբոլական հավասարումների համար սիմետրիզացման խնդրում, որը թույլ է տալիս կամայական կարգի հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդիրը բերել սիմետրիկ հիպերբոլական (ըստ Ֆրիդրիխսի) համակարգերի շարքին։

R. G. AIRAPETYAN. *Reduction of the Cauchy problem for a hyperbolic equation to symmetric systems* (symmary)

The paper describes a new approach to the problem of symmetrization of hyperbolic equations, permitting to reduce the study of the Cauchy problem for a hyperbolic equation of arbitrary order to the study of series of symmetric hyperbolic systems of the differential equations of first order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. К. Годунов, В. И. Костин.* Приведение гиперболического дифференциального уравнения к симметрической гиперболической системе в случае двух пространственных переменных, Сиб. мат. ж., 21, № 6, 1980, 3—20.
2. *Т. Ю. Михайлова.* Симметризация инвариантных гиперболических уравнений, ДАН СССР, 270, № 3, 1983, 546—550.
3. *С. К. Годунов, В. М. Гордиенко.* Смешанная задача для волнового уравнения, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, Препринт № 46, 1977, с. 30.
4. *С. К. Годунов, В. М. Гордиенко.* Смешанная задача для волнового уравнения, Дифференциальные уравнения с частными производными, Труды семинара С. Л. Соболева, № 2, 1977, 5—31.
5. *Р. Г. Айрапетян.* Смешанная задача для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка при нарушении равномерного условия Лопатинского, ДАН Арм.ССР, 65, № 1, 1977, 3—9.
6. *Р. Г. Айрапетян.* Об эквивалентных формах условия Лопатинского для гиперболических уравнений второго порядка, ДАН Арм.ССР, 67, № 1, 1978, 18—24.
7. *М. Г. Крейн, М. А. Неймарк.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений, Харьков, 1936, с. 44.
8. *Ф. И. Ландер.* Безутианта и обращение ганкелевых и теплицевых матриц, Математические исследования, Кишинев, 9, № 2 (32), 1974, 69—87.
9. *В. П. Маслов, М. В. Федорюк.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., Наука, 1976.
10. *А. С. Мищенко, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов.* Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., Наука, 1978.
11. *В. В. Иванов.* Строго гиперболические полиномы, не допускающие гиперболической симметризации, Новосибирск, Институт математики СО АН СССР, Препринт № 77, 1984, с. 15.