

УДК 517.954

С. Г. ХАЧАТРЯН

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ НЕСУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть

$$LU = f(M), M \in R^n \quad (1)$$

—линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в R^n . В случаях, когда правая часть этого уравнения принадлежит классам $D'(R^n)$, $S'(R^n)$, $C^\infty(R^n)$, то в работах [1] — [3] доказано существование решения уравнения (1), принадлежащее соответствующим классам.

Для исследования краевых задач в классе функций, имеющих разрывы в конечном числе точек и полиномиальный рост в бесконечности, возникает необходимость строить частные решения уравнений

$$\Delta U(M) = f(M), M \in R^3, \quad (2)$$

$$\Delta U(M) + \mu U(M) = f(M), M \in R^3, \mu = \text{const} < 0, \quad (3)$$

где $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, когда $f(M)$ также имеет особенности и полиномиальный рост в бесконечности.

Пусть r —расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $O(0, 0, 0)$, c, c', α —постоянные числа. В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $f(M)$ удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности любой точки и

$$|f(M)| \leq c(1+r)^\alpha, M \in R^3, \alpha \geq 0, \quad (4)$$

тогда существует решение $U^0(M)$ уравнения (2) такое, что

$$|U^0(M)| \leq c'(1+r)^{\alpha+2}(1+\delta(\alpha)\ln(e+r)), \quad (5)$$

где $\delta(\alpha) = 0$, если α —нецелое число и $\delta(\alpha) = 1$, если α целое число.

Теорема 2. Пусть функция $f(M)$ финита ($f(M) \equiv 0, r \geq r_0$), удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности любой точки $M \in R^3 \setminus \{O\}$ и

$$|f(M)| \leq c r^{-\alpha}, \alpha > 0, \quad (6)$$

тогда существует решение $U^0(M)$ уравнения (2) (уравнения (3)) в $R^3 \setminus \{O\}$, стремящееся к нулю при $r \rightarrow \infty$ и удовлетворяющее неравенству

$$|U^0(M)| \leq c_1 r^{-\alpha+2}(1+\delta(\alpha)|\ln r|), \text{ при } r \leq r_0, \quad (7)$$

где c_1, c_2 — постоянные, а $\delta(\alpha)$ то же, что и в теореме 1.

Теорема 3. В предположениях теоремы 1 существует решение $U^0(M)$ уравнения (3), удовлетворяющее неравенству (4).

Теорема 4. Пусть $f(M)$ удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности любой точки $M \in R^3$ и

$$|f(M)| \leq c e^{\lambda r}, \quad (8)$$

тогда существует решение уравнения (2) в R^3 такое, что

$$|U(M)| \leq c' e^{\lambda_k r \ln(c+r)}, \quad (9)$$

где c, c', k, λ_k — некоторые положительные постоянные.

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно предположить, что $f(M) \equiv 0$, при $r \leq r_0 = \text{const}$.

Пусть (r, θ, φ) и (ρ, θ, φ) — сферические координаты точек $M(x, y, z)$ и $M'(\xi, \eta, \zeta)$ соответственно, и пусть $t = \frac{1}{r\rho} (\xi x + \eta y + \zeta z)$.

Известно ([4], с. 490), что

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho t + \rho^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \frac{r^k}{\rho^k}, \quad \text{при } \frac{r}{\rho} < q < 1,$$

где $P_k(t)$ — полином Лежандра степени k , q — некоторая положительная постоянная, причем каждая функция $P_k(t) \frac{r^k}{\rho^k}$ является гармонической относительно (x, y, z) при фиксированном $(\xi, \eta, \zeta) \neq (0, 0, 0)$.

Обозначим

$$I_n = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho t + r^2}} - \sum_{k=0}^n P_k(t) \frac{r^k}{\rho^{k-1}}. \quad (10)$$

Так как

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=q} \frac{dz}{z^{k+1} \sqrt{1 - 2zt + z^2}},$$

то

$$P_k(t) \leq \frac{c(q)}{q^k},$$

где

$$c(q) = \max_{|z| < q} \left| \frac{1}{\sqrt{1 - 2zt + z^2}} \right|, \quad |t| \leq 1.$$

Следовательно

$$|I_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |P_k(t)| \frac{r^k}{\rho^{k-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c(q)}{q^k} \frac{r^k}{\rho^{k-1}} \leq c_0 \frac{r^{n+1}}{\rho^n}, \quad (11)$$

при $\frac{r}{\rho} \leq q_0 < q$, c_0 — постоянная, зависящая от q и q_0 .

Из (10) следует, что функция

$$U^0(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^\infty f(\rho, \theta, \varphi) \frac{1}{|\rho|^{1/2}} \sin \theta d\rho d\varphi d\theta, \quad (12)$$

где $[\alpha]$ — целая часть α , является решением уравнения (2) в R^3 .

Выясним поведение функции $U^0(M)$ в окрестности бесконечности.

Представим $U^0(M)$ в виде

$$U^0(M) = U_1^0(M) + U_2^0(M) + U_3^0(M),$$

где

$$U_1^0(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_N f(\rho, \theta, \varphi) I_{[\alpha]+2} \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta,$$

$$U_2^0(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^N f(\rho, \theta, \varphi) \frac{\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos \theta + r^2}} \, d\rho \, d\varphi \, d\theta,$$

$$U_3^0(M) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^N f(\rho, \theta, \varphi) \sin \theta \sum_{k=0}^{[\alpha]+2} p_k(t) \frac{r^k}{\rho^{k-1}} \, d\rho \, d\varphi \, d\theta.$$

(Здесь N — некоторая постоянная, заключенная между $\frac{r}{q_0}$ и $2\frac{r}{q_0}$).

Используя оценки (4) и (11), нетрудно убедиться, что функции $U_i^0(M)$, $i=1, 2, 3$ удовлетворяют неравенству (4). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если в теореме 1 условие (4) заменить условием

$$|f(M)| \leq c(1+r)^\alpha \ln^{-\beta}(e+r),$$

где $\beta > 1$ — постоянное число, то в неравенстве (4) можно заменить $\delta(\alpha)$ нулем.

Замечание 2. В предположениях теоремы 1 общее решение уравнения (2), удовлетворяющее неравенству (5), определяется формулой

$$U(M) = U^0(M) + \sum_{n=0}^{[\alpha]+2} \sum_{k=-n}^n c_n^k \gamma_n^k(\theta, \varphi) r^n, \quad (13)$$

где $U^0(M)$ дается формулой (11), $\{\gamma_n^k(\theta, \varphi)\}_{k=-n}^n$ — полная система линейно независимых сферических функций порядка n , c_n^k — произвольные постоянные.

Рассмотрим примеры уравнений

$$\Delta U = x^\alpha, \quad (14)$$

$$\Delta U = r^n \sin^{n+2} \theta \sin(n+2)\varphi, \quad (15)$$

где n — целое неотрицательное число, α — нецелое положительное число.

Непосредственно проверяется, что функции

$$V_1 = \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}, \quad V_2 = \frac{1}{2n+5} r^{n+2} \sin^{n+2} \theta \sin(n+2)\varphi \ln r$$

являются решениями уравнений (14) и (15) соответственно. Из этих примеров и из замечания 2, в частности, следует, что теорему 1 нельзя улучшить.

Теорема 2 для уравнения (2) сводится к теореме 1 с помощью преобразования обратных радиусов-векторов ([4]). Нетрудно заметить, что функция

$$U^0(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} f(\rho, \Theta, \varphi) J_{[x]-3} \sin \Theta \, d\rho d\varphi d\Theta, \quad (16)$$

где

$$J_n = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho t + r^2}} - \sum_{k=0}^n P_k(t) \frac{\rho^{k+2}}{r^{k+1}}$$

является решением уравнения (2), удовлетворяющем требованиям теоремы 2.

Замечание 3. В предположениях теоремы 2 общее решение уравнения (2) в $R^3 \setminus \{0\}$, ограниченное в окрестности бесконечности и удовлетворяющее неравенству (7), определяется формулой

$$U(M) = U^0(M) + \sum_{n=0}^{l-1} \sum_{k=-n}^n c_n^k \gamma_n^k(\Theta, \varphi) \frac{1}{r^{n+1}} + c,$$

где $U^0(M)$ определяется формулой (16), $[\gamma_n^k(\Theta, \varphi)]_{k=-n}^n$ — полная система линейно независимых сферических функций порядка n , с и c_n^k — произвольные постоянные.

Докажем теорему 2 для уравнения (3) при $\mu = -\lambda^2$.

Очевидно, что функция

$$G(r, t, z) = \frac{e^{-\lambda r \sqrt{1-t} z + z^2}}{\sqrt{1-2tz+z^2}}$$

аналитична относительно комплексной переменной z в круге $|z| < 1$ при $|t| \leq 1$. Следовательно, она разлагается в ряд Тейлора

$$G(r, t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(r, t) z^k \text{ при } |z| < 1, |t| \leq 1,$$

где

$$g_k(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=q < 1} \frac{G(r, t, z)}{z^{k+1}} dz.$$

Ясно, что

$$|g_k(r, t)| \leq \frac{c(q, r)}{q^{k+1}},$$

где

$$c(q, r) = \max_{|z| < q} |G(r, t, z)|, |t| \leq 1.$$

Пусть

$$G_n(r, \rho, t) = \frac{e^{-\lambda \sqrt{\rho^2 - 2r\rho t + r^2}}}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho t + r^2}} - \sum_{k=0}^n g_k(r, t) \frac{\rho^k}{r^{k+1}}.$$

Ясно, что

$$|G_n(r, \rho, t)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |g_k(r, t)| \frac{\rho^k}{r^{k+1}} \leq c(q, r) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{(qr)^{k+1}} \leq c_1 \frac{\rho^{n+1}}{r^{n+2}},$$

при $\frac{\rho}{r} < q_0 < q$.

Нетрудно доказать, что каждая функция $\frac{1}{r^{k+1}} g_k(r, t)$ является решением однородного уравнения (3) ($f(M) \equiv 0$), при $\mu = -\lambda^2$, $(x, y, z) \neq 0$. Следовательно, функция

$$U^0(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} f(\rho, \theta, \varphi) G_{[a]-3}(r, \rho, t) \rho^3 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \quad (17)$$

является решением уравнения (3) при $\mu = -\lambda^2$.

Представим $U^0(M)$ в виде

$$U^0(M) = U_1^0(M) + U_2^0(M) + U_3^0(M),$$

где

$$\begin{aligned} U_1^0(M) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{q_0 r} f(\rho, \theta, \varphi) G_{[a]-3}(r, \rho, t) \rho^3 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta, \\ U_2^0(M) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{q_0 r}^{r_0} f(\rho, \theta, \varphi) \frac{e^{-\lambda \sqrt{r^2 - 2r\rho t + \rho^2}}}{\sqrt{r^2 - 2r\rho t + \rho^2}} \rho^3 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta, \\ U_3^0(M) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{q_0 r}^{r_0} f(\rho, \theta, \varphi) \sin \theta \sum_{k=0}^{[a]-3} g_k(r, t) \frac{\rho^{k+2}}{r^{k+1}} d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Аналогично, как и в первой теореме, доказываем, что $U_i^0(M)$, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют неравенству (7).

З а м е ч а н и е 4. Если в теореме 2 заменить условие (6) условием

$$|f(M)| \leq c r^{-\alpha} |\ln r|^{-\beta}, \quad \beta > 1,$$

то в неравенстве (7) можно взять $\delta(\alpha) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 3 очевидно.

Докажем теперь теорему 4. Будем предполагать, что $f(M) \equiv 0$,

при $r \leq \frac{e^3}{q}$, $q = \text{const} < 1$.

Пусть $\{\psi_n(M)\}_{n=0}^\infty$ — последовательность бесконечно дифференцируемых функций, заключенных между нулем и единицей, таких, что

$$\begin{aligned} \psi_0(M) &= \begin{cases} 1, & r < 2, \\ 0, & r > 3, \end{cases} \\ \psi_n^1(M) &= \begin{cases} 1 - \psi_{n-1}(M), & 2n < r < 2n+1, \\ 1, & 2n+1 < r < 2n+2, \\ 0, & r \in (2n, 2n+3), \quad n=1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Ясно, что $\{\psi_n(M)\}_{n=0}^\infty$ образуют разложение единицы в R^3 .

Пусть

$$U_n(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \theta, \varphi) \psi_n(M) I_{(2n+3)k} \sin \theta \, d\rho d\varphi d\theta,$$

где I_n определяется равенством (10).

Из (II) следует, что

$$|U_n(M)| \leq c_1 r e^{-(2n+3)k}, \text{ при } n > \frac{e^2 r}{2q}, \quad c_1 = \text{const.} \quad (18)$$

Из неравенства (18) следует, что ряд

$$U(M) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(M) \quad (19)$$

равномерно сходится. Ясно, что функция $U(M)$ является решением уравнения (2) в R^3 .

Далее нетрудно видеть, что

$$|U_n(M)| \leq c_2 r, \text{ при } n > \frac{er}{2q}, \quad c_2 = \text{const.} \quad (20)$$

Рассмотрим теперь сумму первых $m = \left\lfloor \frac{er}{2q} \right\rfloor$ членов ряда (19)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^m U_n(M) \right| &\leq c_1 \sum_{n=0}^m \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\rho, \theta, \varphi) \rho^3 \sin \theta|}{\sqrt{\rho^2 - 2r\rho t + r^2}} \, d\rho d\varphi d\theta + \\ &+ c_2 \sum_{n=0}^m \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho, \theta, \varphi)| \sum_{j=0}^{(2n+3)k} |P_j(t)| \frac{r^j}{\rho^{j-1}} \, d\rho d\varphi d\theta \leq \\ &\leq c_3 r e^{\left(\frac{e}{q}r+3\right)k} + c_4 r^{\frac{e}{q}kr}, \end{aligned} \quad (21)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — некоторые постоянные.

Из неравенств (18), (20), (21) следует оценка (8), где $\lambda_k = \frac{e}{q}k$.

Теорема 4 доказана.

Исследуем теперь поведение производных решения $U^\circ(M)$ уравнения (2) в предположении, что $f(M)$ — бесконечно дифференцируемая функция всюду в R^3 , кроме конечного числа точек разрыва.

Пусть

$$m = (m_1, m_2, m_3), \quad |m| = m_1 + m_2 + m_3, \quad D^m = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^{m_1} \partial y^{m_2} \partial z^{m_3}}.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5. Если функции $D^m f(M)$, $|m| = 0, 1, \dots$, непрерывны всюду в R^3 и

$$|D^m f(M)| \leq c_m (1+r)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad c_m = \text{const}, \quad |m| = 0, 1, \dots,$$

то решение $U^\circ(M)$ уравнения (2), определенное формулой (12), удовлетворяет неравенствам

$$|D^m U^0(M)| \leq c_m (1+r)^{\alpha+2}, \quad c_m = \text{const}, \quad |m| = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Теорема 6. Пусть $f(M) \equiv 0$, при $r \geq r_0$. Если производные $D^m f(M)$, $|m|=0, 1, \dots$, непрерывны в R^3 кроме точки O и

$$|D^\alpha f(M)| \leq \frac{c_m}{r^{\alpha+|m|}}, \quad c_m = \text{const}, \quad |m|=0, 1, \dots, \quad \alpha > 0, \quad (23)$$

то производные решения $U^0(M)$ уравнения (2) (уравнения (3)), определенного формулой (16) ((17)), стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$ и удовлетворяют неравенству

$$|D^m U^0(M)| \leq \frac{c_m}{r^{\alpha+|m|-2}} (1 + \delta(\alpha) |\ln r|), \quad \text{при } r \leq r_0. \quad (24)$$

где $\delta(\alpha) = 0$, если α — нецелое число, $\delta(\alpha) = 1$, если α — целое число.

Докажем теорему 5. Теорема 6 доказывается аналогично.

Из (10) следует, что

$$|D^m I_n| \leq b_m \frac{r^{\alpha-|m|+1}}{\rho^\alpha}, \quad \text{при } \frac{r}{\rho} < q_0 < q, \quad |m| = 1, 2, \dots,$$

где b_m — некоторые постоянные. Следовательно

$$|D^m U_1^0(M)| \leq b_m r^{\alpha-|m|+2} + \bar{b}_m, \quad |m| = 1, 2, \dots,$$

где $\bar{b}_m$, b_m — некоторые постоянные.

Пусть $D_N = \{M \in R^3, r_0 \leq r < N\}$, S_N — поверхность, ограничивающая D_N

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} U_2^0(M) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{D_N} f(\xi, \eta, \zeta) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \right) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{D_N} f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \right) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_N} f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\cos(n, \xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dS - \\ &- \frac{1}{4\pi} \iiint_{D_N} \frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}, \end{aligned}$$

где (n, ξ) — угол между осью $O\xi$ и нормалью к поверхности S_N .

Из полученного равенства следует, что функция $\frac{\partial}{\partial x} U_2^0(M)$ удовлетворяет неравенству (22), при $|m|=1$. Аналогично доказывается, что функции $D^m U_2^0(M)$ удовлетворяют неравенству (22), при $|m|=2, 3, \dots$.

Неравенства (22) для функций $D^m U_3^0(M)$, $|m|=1, 2, \dots$, доказываются без труда. Теорема 5 доказана.

Замечание 5. Если заменить в теореме 6 условие (23) условием

$$|D^m f(M)| \leq \frac{C_m}{r^{2-|m|}} |\ln r|^{-\beta_m}, \quad |m| = 0, 1, \dots,$$

где $\beta_m > 1$ — постоянные числа, то в неравенстве (24) можно взять $\delta(\alpha) \equiv 0$.

Отметим, что случай, когда $f(M)$ имеет разрывы в конечном числе точек, легко приводится к рассмотренным выше случаям.

В работе [5] исследованы задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа с разрывными граничными данными. Используя полученные здесь решения уравнения (2), можно эти результаты распространить и на уравнения Пуассона.

Применим полученные результаты к решению краевых задач для уравнения (3) при $\mu = -\lambda^2$.

1. Пусть D — трехмерная область, ограниченная гладкой поверхностью Ω и содержащая начало координат.

Задача 1. В предположениях теоремы 2 требуется найти решение уравнения (3) в области $D \setminus \{0\}$, удовлетворяющее неравенству (7) и краевому условию

$$U(M)|_{M \in \Omega} = \Phi(M), \quad (25)$$

где $\Phi(M)$ — заданная на Ω непрерывная функция.

Пусть $W^0(M)$ — решение уравнения

$$\Delta U(M) - \lambda^2 U(M) = 0 \quad (26)$$

в области D с краевым условием

$$W^0(M) = \Phi(M) - U^0(M)|_{M \in \Omega},$$

где $U^0(M)$ — определяется равенством (17).

Ясно, что функция

$$V^0(M) = W^0(M) + U^0(M)$$

удовлетворяет неравенству (7) и является решением уравнения (3) с граничным значением (25). Следовательно, задача 1 сводится к следующей однородной задаче.

Найти решение уравнения (26) в области $D \setminus \{0\}$, удовлетворяющее неравенству (7) и краевому условию

$$U(M)|_{M \in \Omega} = 0. \quad (27)$$

Пусть Ω_ϵ — сфера радиуса ϵ с центром в точке O , целиком лежащая в области D . С помощью формулы Грина доказывается, что произвольное решение $V(M)$ уравнения (26), удовлетворяющее неравенству (7) в области, ограниченной поверхностями Ω_ϵ и Ω , представляется в виде

$$V(M) = V_\epsilon(M) + V_D(M), \quad (28)$$

где $V_\epsilon(M)$ и $V_D(M)$ — решения уравнения (26) в областях $r > \epsilon$ и D соответственно, причем $V_\epsilon(M)$ стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Из представления (28) следует, что функция

$$\omega(M) = V(M) - V_D(M) \quad (29)$$

продолжается как решение уравнения (26) вне области D и стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Так как $V(M)$ удовлетворяет неравенству (7), то $\omega(M)$ также удовлетворяет этому неравенству. Известно [4], что такое решение уравнения (26) представляется в виде

$$\omega(M) = \sum_{n=0}^{[\alpha]-3} \sum_{k=-n}^n c_n^k V_n^k(M), \quad (30)$$

где

$$V_n^k(M) = r^n \frac{d^n}{(r dr)^n} \left(\frac{e^{-\lambda r}}{r} \right) \gamma_n^k(\theta, \varphi), \quad (31)$$

$\{\gamma_n^k\}_{k=-n}^n$ — система линейно независимых сферических функций порядка n , c_n^k — постоянные числа.

Из (28) следует, что в области $D \setminus \{O\}$ решение уравнения (26), удовлетворяющее неравенству (7), представляется в виде

$$V(M) = W(M) + \omega(M), \quad (32)$$

где $W(M)$ — решение уравнения (26) в области D . Подставляя (32) в граничное условие (27), получим

$$W(M)|_{M \in \Sigma} = -\omega(M)|_{M \in \Sigma}. \quad (33)$$

Следовательно, решение поставленной задачи приводится к решению задачи (26) — (33) в области D , которая имеет единственное решение для произвольной правой части в (33).

Пусть $W_n^k(M)$ — решения уравнения (26) в области D с краевыми условиями

$W_n^k(M)|_{M \in \Sigma} = V_n^k(M)$, $k = -n, \dots, 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, \dots, [\alpha] - 3$, соответственно. Ясно, что общее решение задачи (26) — (27) будет

$$V(M) = \sum_{n=0}^{[\alpha]-3} \sum_{k=-n}^n c_n^k (V_n^k(M) - W_n^k(M)).$$

Итак, получили следующую теорему.

Теорема 7. Однородная задача 1 (задача (26) — (27)) имеет $([\alpha] - 2)^3$ линейно независимых решений, а неоднородная задача 1 всегда разрешима.

2. Рассмотрим теперь уравнение (3) в R^3 . Предполагается, что $f(M)$ удовлетворяет условию Гельдера в окрестности любой точки $M \in R^3 \setminus \{O\}$ и

$$\begin{aligned} |f(M)| &\leq c_1 r^{-\alpha}, \text{ при } r < r_0, \alpha > 0, \\ |f(M)| &\leq c_2 r^{\beta}, \text{ при } r > r_0, \beta > 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Задача 2. Требуется найти решение уравнения (3) в $R^3 \setminus \{O\}$, удовлетворяющее неравенствам

$$\begin{aligned} |U(M)| &\leq c r^{-\alpha+2} (1 + \delta(\alpha) |\ln r|), \text{ при } r \leq r_0, \\ |U(M)| &\leq c r^{\beta}, \text{ при } r > r_0. \end{aligned} \quad (35)$$

Пусть $T(M)$ — непрерывно дифференцируемая функция, заключенная между нулем и единицей и равная единице при $r \leq r_1 < r_0$ и нулю, при $r \geq r_0$.

Пусть далее

$$V^1(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} [1 - T(\rho, \theta, \varphi)] f(\rho, \theta, \varphi) \frac{e^{-\lambda \sqrt{r^2 - 2r\rho t' + \rho^2}}}{\sqrt{r^2 - 2r\rho t' + \rho^2}} \times \\ \times \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Обозначим через $\bar{V}^0(M)$ функцию, которая получается из (17) заменой $f(\rho, \theta, \varphi)$ на $T(\rho, \theta, \varphi) f(\rho, \theta, \varphi)$. Ясно, что функция

$$\bar{W}^0(M) = V^1(M) + \bar{V}^0(M)$$

будет решением уравнения (3) в $R^3 \setminus \{O\}$, удовлетворяющее неравенствам (35).

Из представления (28) следует, что решение однородного уравнения (26), удовлетворяющее неравенствам (35) представляется в виде (29). Следовательно, общее решение задачи 2 будет:

$$U(M) = \bar{W}^0(M) + V_0(M),$$

где $V_0(M)$ определяется равенством (30).

Итак, справедлива следующая

Теорема 8. *Однородная задача 2 ($f(M) \equiv 0$) имеет $([z] - 2)$ линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.*

3. Пусть D — трехмерная конечная область, ограниченная гладкой поверхностью Ω . Предполагается, что точка O лежит на поверхности Ω и в достаточно малой r_0 -окрестности этой точки Ω представляет плоскость $z=0$.

Задача 3. Пусть $\varphi(M)$ — непрерывная всюду на Ω функция, кроме точки O , удовлетворяющая неравенству

$$|\varphi(M)| \leq cr^{-\alpha}, \quad M \in \Omega, \quad \alpha > 0. \quad (36)$$

Требуется найти решение $U(M)$ однородного уравнения (26) в D , удовлетворяющее неравенству

$$|U(M)| \leq cr^{-\alpha} (1 + \delta(z) |\ln r|) \quad (37)$$

и краевому условию

$$U(M)|_{M \in \Omega} = \varphi(M). \quad (38)$$

Пусть $t' = \cos(\varphi - \varphi') \sin \theta'$.

Рассмотрим функцию

$$H = \frac{e^{-\lambda \sqrt{r^2 - 2r\rho t' + \rho^2}}}{(r^2 - 2r\rho t' + \rho^2)^{3/2}} + \lambda \frac{e^{-\lambda \sqrt{r^2 - 2r\rho t' + \rho^2}}}{r^2 - 2r\rho t' + \rho^2}.$$

Аналогично, как и выше, разлагая H в ряд по степеням ρ , получим

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(r, t') \rho^k, \text{ при } \frac{\rho}{r} < q < 1,$$

где

$$h_k(r, t') = \frac{1}{2\pi i r^{k+3}} \int_{|z|=q} \frac{e^{-ir\sqrt{1-2zt'+z^2}}}{(1-2zt'+z^2)^{3/2} z^{k+1}} dz + \frac{\lambda}{2\pi i r^{k+2}} \times \\ \times \int_{|z|=q} \frac{e^{-ir\sqrt{1-2zt'+z^2}}}{(1-2zt'+z^2) z^{k+1}} dz.$$

Обозначим

$$H_n = H - \sum_{k=0}^n h_k(r, t') \rho^k.$$

Ясно, что функция

$$U^0(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} f(\rho, \varphi) H_{|a|-2} \rho \cos \Theta' d\rho d\varphi \quad (39)$$

является решением уравнения (26) в D , удовлетворяет неравенству (37) и граничному условию (38) в окрестности начала координат. Далее нетрудно найти все функции, определенные равенством (30) и обращающиеся в нуль на плоскости $z=0$. Число таких функций для любого n равно n . Пусть $\{V_n^k\}_{k=1}^n$ — эти функции. Аналогично, как и в первой задаче, можно показать, что любое решение задачи 3 представляется в виде

$$U(M) = U^0(M) + \sum_{n=0}^{|a|-1} \sum_{k=1}^n c_n^k V_n^k + W(M), \quad (40)$$

где $U^0(M)$ определяется равенством (39), $W(M)$ — решение уравнения (26) в области D , непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$. Подставляя (40) в граничное условие (38) для определения $W(M)$, получим уравнение (26) с граничным условием

$$W(M)|_{M \in \Omega} = \varphi(M) - U^0(M)|_{M \in \Omega} - \sum_{n=0}^{|a|-1} \sum_{k=1}^n c_n^k V_n^k(M)|_{M \in \Omega}. \quad (41)$$

Ясно, что правая часть в равенстве (41) — непрерывная функция на Ω . Решая задачу (26) — (41), получим все решения задачи 3. Отсюда, в частности, следует

Теорема 9. Однородная задача 3 ($\varphi(M) = 0, M \neq 0$) имеет $\frac{[a]([a]-1)}{2}$ линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима.

4. Пусть $\varphi(x, y)$ — непрерывная на плоскости $z=0$ функция, удовлетворяющая неравенству (4).

Задача 4. Требуется найти в полупространстве $z > 0$ решение уравнения

$$L(U) = \Delta U + 2a_1 \frac{\partial U}{\partial x} + 2a_2 \frac{\partial U}{\partial y} + 2a_3 \frac{\partial U}{\partial z} - kU = 0, \quad k > 0, \quad (42)$$

удовлетворяющее неравенству (4) в полупространстве $z > 0$ и граничному условию

$$U(x, y, 0) = \varphi(x, y). \quad (43)$$

Пусть

$$E(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{-a_1 x - a_2 y - a_3 z - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Обозначим

$$F(x, y, z, \xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \xi} [E(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) - E(\xi - x, \eta - y, \zeta + z)]_{\zeta=0}.$$

Ясно, что функция

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

является решением задачи 4 в случаях, когда $k > 0$ и $k = 0$, $a_3 \neq 0$. Единственность этой задачи в рассматриваемом классе, когда $k > 0$, или когда $k = 0$, $a_3 < 0$ доказана в работах [6], [7].

В случае, когда $k = 0$, $a_3 > 0$ в работе (7) доказано, что решение однородной задачи 4 ($\varphi(x, y) = 0$) в рассматриваемом классе имеет вид

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^{[a]} \sum_{l=0}^{[z]-k} x^k y^l T_{k,l}(z). \quad (44)$$

Подставляя (44) в уравнение (42) и в однородные граничные условия (43) ($\varphi(x, y) = 0$) и приравнявая соответствующие коэффициенты при $x^k y^l$, $k + l \leq [a]$, получим

$$T_{k,l}(z) + 2a_3 T_{k,l}(z) = 0, \quad k + l = [a],$$

$$T_{k,l}(z) + 2a_3 T_{k,l}(z) + 2a_1(k+1) T_{k+1,l}(z) + 2a_2(l+1) T_{k,l+1}(z) = 0, \\ k + l = [z] - 1,$$

$$T_{k,l}(z) + 2a_3 T_{k,l}(z) + (k+1)(k+2) T_{k+2,l}(z) + (l+1)(l+2) T_{k,l+2}(z) + \\ + 2a_1(k+1) T_{k+1,l}(z) + 2a_2(l+1) T_{k,l+1}(z) = 0, \quad k + l \leq [a] - 2,$$

$$l_{k,l}(0) = 0, \quad k + l \leq [a].$$

Эта система имеет $\frac{([z]+1)([z]+2)}{2}$ линейно независимых решений полиномиального роста по z , при $z \rightarrow +\infty$, причем они удовлетворяют оценкам

$$|T_{k,l}(z)| \leq c_1 (1+z)^{[a]-k-l}, \quad k + l \leq [a].$$

При $k > 0$ однородная задача имеет бесконечное число линейно независимых ограниченных решений.

Из предыдущих рассуждений следует

Теорема 10. Неоднородная задача 4 (при $k > 0$, или $k = 0$, $a_3 \neq 0$) всегда разрешима. Однородная задача 4 ($\varphi(x, y) = 0$) не имеет

нетривиальных решений при $k > 0$, или $k = 0$, $a_3 < 0$ и имеет $\frac{([z] + 1)([z] + 2)}{2}$ линейно независимых решений, при $k = 0$, $a_3 > 0$.

В заключение выражаю благодарность профессору Товмасяну Н. Е., под руководством которого выполнена работа.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 26. V. 1984

Ս. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ եզրային խնդիրներ երկրորդ կարգի էլիպտիկ հավասարումների համար
և հանգստության ֆունկցիաների դասում (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկված են եզրային խնդիրներ

$$\Delta U = f,$$

$$\Delta U + \mu U = f, \mu = \text{const} < \zeta.$$

Հավասարումների համար, որտեղ Δ -ն Լապլասի օպերատորն է R^3 -ում, f -ը և եզրային ֆունկցիան ունեն եզակիություններ վերջավոր թվով կետերում և աստիճանային կարգ անվերջությունում: Կառուցված են անհամասեռ խնդիրների մասնավոր լուծումներ և գտնված են համասեռ խնդիրների գծորեն անկախ լուծումները համապատասխան դասերում: Ստացված են ճշգրիտ գնահատականներ այդ լուծումների համար:

S. G. KHACHATRIAN. Boundary problems for the second order elliptical equations in the classes of nonintegrable functions (summary)

Boundary problems for the equations

$$\Delta U = f(M),$$

$$\Delta U(M) + \mu U(M) = f(M), \mu = \text{const} < 0,$$

where Δ denotes Laplacian in R^3 , are considered, when $f(M)$ and the boundary function have peculiarities in finitely many points and power-type order at infinity. Partial solutions for heterogeneous problems are constructed. Linearly independent solutions for homogeneous problems are found in the corresponding classes. Precise estimates for these solutions are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Трев. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, М., Мир, 1969.
2. Л. Хермандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., Мир, 1965.
3. В. П. Паломодов. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., Наука, 1967.
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики, М., Наука, 1972.
5. Н. Е. Товмасян. О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классах функций, имеющих особенности на границе области, Сибирский мат. журнал, т. 11, № 2, 1961.
6. Г. В. Дикополов. О крайних задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве. Мат. сборник, 1962, т. 59 (101). № 2, 215—228.
7. Н. Е. Товмасян. Общая граничная задача для системы дифференциальных уравнений в полуплоскости с нарушением условия Я. Б. Лопатнянского, Диф. уравнения, 1984, т. 20, № 1.