

УДК 517.51

А. А. ТАЛАЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

В в е д е н и е

Вопросами единственности кратных тригонометрических рядов занимались много математиков.

В отличие от теории единственности одномерных тригонометрических рядов, которую можно считать в основном завершенной, теория единственности двойных и, в особенности, кратных тригонометрических рядов разработана далеко не полно. Приведенные ниже две теоремы, установленные в работах [2], [6], можно считать наиболее важными в указанной теории.

Теорема 1°. (В. Шапиро [6]). Пусть задан кратный тригонометрический ряд

$$\sum a_m e^{i(m \cdot x)}, \quad m = (m_1, \dots, m_k), \quad x = (x_1, \dots, x_k), \quad (1)$$

где a_m — произвольные комплексные числа, и пусть q — некоторая точка, принадлежащая $T^k = [0, 2\pi]^k$.

Если выполнены условия

$$1) \quad \sum_{R-1 < |m| < R} |a_m| = o(R) \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty$$

и

2) функции

$$f^*(x) = \limsup_{t \rightarrow 0} \sum a_m e^{i(m \cdot x) - |m| \cdot t}, \quad f_*(x) = \liminf_{t \rightarrow 0} \sum a_m e^{i(m \cdot x) - |m| \cdot t}$$

конечны для всех $x \in T^k - \{q\}$ и $f_*(x) \in L_1(T^k)$, то ряд (1) является рядом Фурье функции $f_*(x)$.

Теорема 2° (Эш и Уелланд [2]). Если двойной тригонометрический ряд

$$\sum a_{nm} e^{i(ax + my)} \quad (2)$$

сходится по Прингсхейму (по всем прямоугольным частичным суммам) всюду на T^2 , кроме одной точки, к конечной интегрируемой на T^2 функции $f(x, y)$, то он является рядом Фурье-Лебега функции $f(x, y)$.

В доказательстве теоремы 2° основную роль играет установленная в той же работе теорема (см. [2], теорема 2.2) о том, что, если кратный тригонометрический ряд (1) сходится по Прингсхейму на множестве положительной меры, то его коэффициенты a_m удовлетворяют условиям

$$|a_m| \leq M, \forall m = (m_1, m_2, \dots, m_k); \lim_{|m| \rightarrow \infty} |a_m| = 0, \quad (3)$$

где $|m| = \min(|m_1|, |m_2|, \dots, |m_k|)$.

В двумерном случае, т. е. при $k=2$, из условия (3) вытекает, что коэффициенты a_m удовлетворяют условию 1) теоремы Шапиро и доказательство теоремы 2° при помощи сравнительно простых лемм сводится к теореме 1° (см. [2], стр. 423).

В настоящей работе исследуются некоторые вопросы единственности для двойных рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} e^{2\pi i (nx + my)}, \quad (4)$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$|a_{nm}| \leq M, \forall |m| \geq 0, |n| \geq 0, \quad (5)$$

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |a_{nm}| = 0 \forall |m| \geq 0; \lim_{|m| \rightarrow \infty} |a_{nm}| = 0 \forall |n| \geq 0. \quad (6)$$

Ясно, что коэффициенты указанных рядов могут не удовлетворять как условию 1) теоремы Шапиро, так и условию (3), в которых взяты $k=2$.

Установленные теоремы единственности отличаются от теорем 1° и 2° тем, что в них вместо обычной сходимости всех средних Абеля или всех прямоугольных частичных сумм требуются равномерная сходимость в точке (см. определение 4.1, § 4), зависящей от точки последовательности средних Абеля

$$A_{t_n}(x) = \sum_m a_m e^{2\pi i (m \cdot x)} \cdot e^{-t_n |m|} \quad (7)$$

или же равномерную сходимость в точке (x, y) , зависящей от точки последовательности прямоугольных частичных сумм

$$\sigma_{N_j, M_j}(x, y) = \sum_{n=-N_j}^{N_j} \sum_{m=-M_j}^{M_j} a_{nm} e^{2\pi i (nx + my)}. \quad (8)$$

При этом исключительное множество, вне которого требуется сходимость этих подпоследовательностей, может быть любым множеством $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$, состоящим из счетного числа параллельных координатным осям прямых (см. теоремы 4.2 и 4.3 в § 4). Из этих теорем, в частности, вытекает следующее

Утверждение 1. Пусть $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — любое замкнутое множество, состоящее из счетного числа отрезков, каждый из которых параллелен либо оси абсцисс, либо оси ординат. Пусть, далее, существует последовательность прямоугольных частичных сумм $\sigma_{N_k, M_k}(x, y)$. $N_k \uparrow +\infty, M_k \uparrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, ряда (4) с условиями (5) и (6), которая при $k \rightarrow \infty$ сходится к интегрируемой функции $f(x, y)$ равномерно внутри множества $(0, 1) \times (0, 1) \setminus E$ (т. е. равномерно сходится к $f(x, y)$ на любом замкнутом множестве $F \subset (0, 1) \times (0, 1) - E$). Тогда ряд (4) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.

Аналогичный факт верен и для средних Абеля, т. е. в утверждении 1 вместо подпоследовательности прямоугольных частичных

сумм можно взять любую подпоследовательность $A_{t_n}(x, y)$ средних Абеля, где $t_n \rightarrow 0$.

Отметим также следующее утверждение (оно является следствием доказанной в последнем параграфе теоремы 5.1).

Утверждение 2. Пусть тригонометрический ряд (4) с условиями (5) и (6) обладает тем свойством, что для некоторых возрастающих последовательностей $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$, $M_j > (N_j)^{20}$, имеем $a_{nm} = 0$ при $N_j < \max(|n|, |m|) < M_j$, $j \geq 1$.

Тогда, если $f(x, y)$ — конечная интегрируемая на $[0, 1]^2$ функция и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{N_j N_j}(x, y) = f(x, y) \quad (9)$$

всюду вне некоторого множества $E \subset [0, 1]^2$, состоящего из счетного числа параллельных координатным осям прямых, то

$$a_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{2\pi i n x} \cdot e^{2\pi i m y} dx dy. \quad (10)$$

В этом утверждении степень 20 можно уменьшить, но здесь важно то обстоятельство, что существует возрастающая функция $\psi(z) \uparrow +\infty$ при $z \rightarrow +\infty$ (в частности $t(z) = z^{20}$), для которой из существования чисел $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$ таких, что $M_j > \psi(N_j)$ и из того, что $a_{nm} = 0$, при $N_j < \max(|n|, |m|) < M_j$, мы можем из выполнения (9) получить формулы (10). Аналогичные утверждения верны и для последовательностей круговых частичных сумм, а также для последовательностей $A_{t_j}(x, y)$, $t_j \downarrow 0$, средних Абеля.

Как утверждения 1 и 2, так и более общие теоремы 4.1—4.4 и 5.1 являются следствиями доказанной в § 3 основной теоремы 3.1 настоящей статьи.

Эта теорема фактически утверждает, что если тригонометрический ряд (4) с условиями (5), (6) суммируется к интегрируемой функции методом, аналогичным обычному методу Лебега, в котором, однако, производные отношения взяты в узлах случайных двоичных решеток, то ряд (4) является рядом Фурье—Лебега своей суммы. Аналогичная теорема несколько другим методом, представляющем некоторый интерес, доказана отдельно в § 2 для одномерного случая (см. теорему 2.1). При доказательстве этих результатов используются некоторые теоремы единственности рядов по системе Хаара.

§ 1. О некоторых теоремах единственности рядов по системе Хаара

Сначала напомним определение системы Хаара $\{\chi_k(x)\}$. Полагается

$$X_1(x) \equiv 1, x \in [0, 1], X_2(x) = 1, x \in [0, 1/2), X_2(x) = -1, x \in (1/2, 1]$$

и если

$$2^n + 1 \leq k \leq 2^n, n \geq 1, \text{ то}$$

$$X_k(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & (2k-2) 2^{-n-1} < x < (2k-1) 2^{-n-1} \\ -\sqrt{2^n}, & (2k-1) 2^{-n-1} < x < 2k 2^{-n-1} \\ 0, & x \in [2^{-n} \cdot (k-1), 2^{-n} \cdot k]. \end{cases} \quad (1.1)$$

В точках разрыва функция $X_k(x)$ полагается равной среднему арифметическому ее правого и левого пределов.

В работе [1] была установлена

Теорема 1. Пусть ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \quad (1.2)$$

удовлетворяет условиям:

А) Для любой точки $x_0 \in [0, 1]$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k}}{\max |X_{n_k}|} = 0, \quad (1.3)$$

где $n_k = n_k(x_0)$ — все те номера, для которых $X_{n_k}(x_0) \neq 0$.

В) Некоторая подпоследовательность частичных сумм $S_{n_k}(x)$ ряда (1.2) сходится к конечной суммируемой функции $f(x)$ всюду на $[0, 1]$, кроме, быть может, счетного множества точек.

Тогда ряд (1.2) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x)$, т. е.

$$a_n = \int_0^1 f(x) X_n(x) dx. \quad (1.4)$$

В дальнейшем в ряде работ (см., напр., [4], [8]) были установлены теоремы, представляющие обобщения этой теоремы и были получены также ее аналоги в многомерном случае (см. [3], [6]). В работе [3] установлен точный аналог теоремы 1 в двумерном (фактически и в многомерном) случае при идентичном с условием А) требовании на поведение коэффициентов, а именно, требуется, чтобы коэффициенты двойного ряда Хаара

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} X_i(x) X_k(y) \quad (1.5)$$

удовлетворяли условиям:

для каждого фиксированного k и $x_0 \in [0, 1]$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i,k}}{\max |X_{i,k}|} = 0, \quad (1.6)$$

где i_k — все те номера, для которых $X_{i_k}(x_0) \neq 0$;

для каждого фиксированного i и $y_0 \in [0, 1]$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{i,k}}{\max |X_{i,k}|} = 0, \quad (1.7)$$

где k_i — все те номера, для которых $X_{k_i}(y_0) \neq 0$.

Для применения системы Хаара в рассмотренных в настоящей статье вопросах единственности тригонометрических рядов нам нуж-

ны следующие несколько усиленные варианты теоремы 1 и ее двукратного аналога, доказанного в [3].

Теорема 1.1. Пусть некоторая подпоследовательность $S_{n_k}(x)$ частичных сумм ряда (1.2) по мере на $[0, 1]$ сходится к суммируемой функции $f(x)$ и всюду на $[0, 1]$, кроме, быть может, счетного числа точек, выполняется условие

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |S_{n_k}(x)| < +\infty. \quad (1.8)$$

Пусть, далее, коэффициенты ряда (1.2) удовлетворяют условию:

$A_1)$ Для любой возрастающей последовательности натуральных чисел i_k , $k > 1$, $i_1 \geq 3$, удовлетворяющей условию

$$\Delta_{i_k} \supset \Delta_{i_{k+1}}, \quad \mu(\Delta_{i_{k+1}}) = 1/2 \cdot \mu(\Delta_{i_k}), \quad k \geq 1, \quad (1.9)$$

где Δ_{i_k} — носитель функции $X_{i_k}(x)$, выполняется равенство

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{i_k}|}{\max |X_{i_k}|} = 0. \quad (1.10)$$

Тогда ряд (1.2) является рядом Фурье функции $f(x)$, т. е. коэффициенты a_n определяются равенствами (1.4).

Теорема 1.2. Пусть некоторая подпоследовательность $S_{n_k m_k}(x, y)$, $n_k \uparrow +\infty$, $m_k \uparrow +\infty$ прямоугольных частичных сумм двойного ряда (1.5) по системе Хаара сходится по мере на единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ к суммируемой функции $f(x, y)$ и всюду на этом квадрате, кроме точек некоторого множества, состоящего из не более, чем счетного числа единичных отрезков, параллельных координатным осям, выполняется условие

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |S_{n_k m_k}(x, y)| < +\infty. \quad (1.11)$$

Пусть, далее, коэффициенты этого ряда удовлетворяют условию:

$A_2)$ Если $X_{i_k}(x)$, $i_k \geq 3$ — такие функции Хаара, что их носители Δ_{i_k} удовлетворяют условию

$$\Delta_{i_k} \supset \Delta_{i_{k+1}}, \quad \mu(\Delta_{i_{k+1}}) = 1/2 \cdot \mu(\Delta_{i_k}), \quad (1.12)$$

то из последовательности $\{i_k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{l_s\}$, для которой

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_{l_s k}}{\max |X_{l_s}|} = 0 \quad (1.13)$$

для любого $k \geq 1$, и то же самое свойство имеет место относительно функций $X_k(y)$.

Тогда ряд (1.5) является рядом Фурье функции $f(x, y)$ т. е.

$$a_{l_s k} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) X_{l_s}(x) X_k(y) dx dy, \quad i, k \geq 1. \quad (1.14)$$

Доказательство этих теорем по существу не отличается от доказательства теоремы 1° работы [1], но мы считаем необходимым привести здесь доказательство теоремы 1.2. Оно основано на следующей лемме.

Лемма 1.1. Пусть коэффициенты ряда (1.5) удовлетворяют условию A_2 и его частичная сумма $S_{n_0 m_0}(x, y)$ на некотором из своих прямоугольников постоянства $\Delta' \times \Delta''$ отлична от нуля. Тогда для любой точки $x_0 \in [0, 1]$ существует $n > n_0$ такое, что частичная сумма $S_{n m_0}$ на некотором прямоугольнике постоянства $\Delta''' \times \Delta''$, $\Delta''' \subset \Delta'$ тоже отлична от нуля и при этом замыкание $\bar{\Delta}''' \times \bar{\Delta}''$ этого прямоугольника не имеет общих точек с отрезком $\{(x_0, y), 0 \leq y \leq 1\}$.

Доказательство. Заметим, что Δ' — один из тех n_0 штук максимальных интервалов, представляющих разбиение отрезка $[0, 1]$, на каждом из которых постоянны все функции $X_i(x)$, $1 \leq i \leq n_0$, а интервал Δ'' таковым является для функций $X_k(y)$, $1 \leq k \leq m_0$. Все прямоугольники постоянства суммы $S_{n m_0}(x, y)$ получаются декартовыми произведениями интервалов первой группы с интервалами второй группы. Этим фактом в дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться.

Для определенности допустим, что

$$S_{n_0 m_0}(x, y) = d > 0, (x, y) \in \Delta' \times \Delta''. \quad (1.15)$$

Обозначим

$$\sum_{k=1}^{m_0} a_{ik} X_k(y) = d_i(y), i \geq n_0 \quad (1.16)$$

и заметим, что $d_i(y)$ постоянны на прямоугольнике $\Delta' \times \Delta''$.

Пусть $X_{i_{v_0}}(x)$ — та функция, носителем которой является интервал Δ' , а $\Delta'_{i_{v_0}}$ — та половина Δ' , для которой

$$d_{i_{v_0}}(y) X_{i_{v_0}}(x) \geq 0, (x, y) \in \Delta'_{i_{v_0}} \times \Delta''. \quad (1.17)$$

Обозначив через $X_{i_{v_0+1}}(x)$ функцию с носителем $\Delta'_{i_{v_0}}$, возьмем ту половину $\Delta'_{i_{v_0+1}}$ интервала $\Delta'_{i_{v_0}}$, для которой

$$d_{i_{v_0+1}}(y) X_{i_{v_0+1}}(x) \geq 0, (x, y) \in \Delta'_{i_{v_0+1}} \times \Delta''. \quad (1.18)$$

Продолжая эти рассуждения, мы определим последовательности интервалов Δ'_{i_v} , $v \geq v_0$

$$\Delta' \supset \Delta'_{i_{v_0}}, \Delta'_{i_{v_0}} \supset \Delta'_{i_{v_0+1}}, \mu(\Delta'_{i_{v_0+1}}) = 1/2 \cdot \mu(\Delta'_{i_{v_0}}), \quad (1.19)$$

и функций $X_{i_v}(x)$ с носителями Δ'_{i_v} , $v \geq v_0$

$\Delta'_{i_{v_0-1}} = \Delta'$ такие, что

$$d_{i_v}(y) X_{i_v}(x) > 0, (x, y) \in \Delta'_{i_v} \times \Delta'', v \geq v_0. \quad (1.20)$$

Обозначим

$$\Delta'_v = \Delta'_{i_{v-1}} \setminus \Delta'_{i_v}, v \geq v_0, \Delta'_{i_{v_0}} = \Delta' \setminus \Delta'_{i_{v_0}}. \quad (1.21)$$

Имеем

$$d_{i_v}(y) X_{i_v}(x) \leq 0, (x, y) \in \Delta'_v \times \Delta'', v \geq v_0. \quad (1.22)$$

Предположение, что для всех $l \geq v_0$ выполнено равенство

$$d + \sum_{i=1}^l d_{i,}(y) X_{i,}(x) = 0, (x, y) \in \Delta_{i,}^* \times \Delta'', \quad (1.23)$$

приводит к противоречию. В самом деле, так как $d_{i,}(y) X_{i,}(x)$ постоянны на прямоугольниках $\Delta_{i,}^* \times \Delta'', \Delta_{i,}^* \times \Delta'', v \geq v_0$, то из (1.21), (1.23) и из определения функций $X_{i,}(x)$ вытекает, что

$$|d_{i,}(y)| \cdot \max |X_{i,}(x)| = d 2^{v-v_0+1}, y \in \Delta'', v \geq v_0. \quad (1.24)$$

Согласно условия A_2 существует подпоследовательность $\{i_{v,}\} \subset \{i_{,}\}_{v=v_0}^\infty$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{i_{v,},k}}{\max |X_{i_{v,},}|} = 0, \forall k \geq 1. \quad (1.25)$$

С другой стороны, из (1.24) и (1.16) следует, что для каждого $v \geq v_0$ существует число $k_v, 1 \leq k_v \leq m_0$, для которого

$$|a_{i_{v,},k_v}(y)| \cdot \max |X_{i_{v,},}| \geq \frac{1}{m_0} 2^{v-v_0+1}, y \in \Delta'' \quad (1.26)$$

и, следовательно,

$$\frac{|a_{i_{v,},k_v}|}{\max |X_{i_{v,},}|} \geq C \cdot 2^{v-v_0+1}/2^v = C/2^{v_0-1}, \quad (1.27)$$

где C — положительная константа, зависящая только от m_0 и n_0 . Применяя (1.27) к индексам $i_{v,}$ и учитывая, что при этом $1 \leq k_v \leq m_0$, мы определим число $k, 1 \leq k \leq m_0$, для которого неравенство

$$\frac{|a_{i_{v,},k}|}{\max |X_{i_{v,},}|} \geq \frac{C}{2^{v_0-1}} \quad (1.28)$$

выполняется для бесконечного числа индексов $i_{v,}$. Это противоречит равенству (1.25).

Пусть $l \geq v_0$ — наименьшее число, для которого равенство (1.23) не выполняется. Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{m_0} a_{i,k} X_i(x) X_k(y), \quad (1.29)$$

совпадающая с левой частью (1.23) на прямоугольниках $\Delta_{i,}^* \times \Delta''$ и $\Delta_{i,}^* \times \Delta''$ на этих прямоугольниках, которые вместе с тем являются ее прямоугольниками постоянства, принимает отличные от нуля значения. Если замыкание одного из этих прямоугольников не пересекается с отрезком $\{(x_0, y), 0 \leq y \leq 1\}$, т. е. $x_0 \notin \overline{\Delta_{i,}^*}$ или $x_0 \notin \overline{\Delta_{i,}^*}$, то сумма (1.26) удовлетворяет требованиям леммы. Если же x_0 принадлежит замыканию обоих интервалов, то тогда x_0 является их общим концом. В этом случае, проведя все вышеприведенные рассуждения, взяв в качестве Δ' один из этих двух интервалов, мы найдем внутри него другой интервал Δ'' такой, что замыкание прямоугольника $\Delta''' \times \Delta''$, являющегося прямоугольником постоянства некоторой частичной суммы

$S_{nm}(x, y)$, $n > i$, уже не пересекается с отрезком $[x_0, y]$; $0 \leq y \leq 1$, и $S_{nm}(x, y)$ отлична от нуля на $\Delta''' \times \Delta''$.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть ряд (1.5) удовлетворяет условиям теоремы 1.2, а ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} X_i(x) X_k(y) \quad (1.30)$$

является рядом Фурье функции $f(x, y)$. Легко видеть, что коэффициенты этого ряда удовлетворяют условиям

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{c_{ik}}{\max |X_i|} = 0, \quad \forall k \geq 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{ik}}{\max |X_k|} = 0, \quad \forall i \geq 1, \quad (1.31)$$

и поэтому коэффициенты ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} X_i(x) X_k(y), \quad b_{ik} = a_{ik} - c_{ik} \quad (1.32)$$

удовлетворяют условию A_2). Мы должны доказать, что $b_{ik} = 0$. Обозначим через $S_{nm}(x, y)$, $\sigma_{nm}(x, y)$ и $A_{nm}(x, y)$, соответственно, частичные суммы рядов (1.5), (1.30) и (1.32). Обозначим также, для краткости, $[x] = \{(x, y); 0 \leq y \leq 1\}$, $[y] = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1\}$. Рассмотрим последовательности $[x_k]$, $[y_k]$, содержащие все отрезки, указанные в формулировке теоремы 1.2, а также все отрезки, проходящие через двоично рациональные точки.

Пусть не все b_{ik} равны нулю. Тогда, очевидно, существует прямоугольная частичная сумма $A_{n_0 m_0}(x, y)$ ряда (1.32), которая на некотором прямоугольнике постоянства $\Delta^{(1)} \times \Delta^{(2)}$ отлична от нуля. Применяя лемму, мы можем определить частичную сумму $A_{nm}(x, y)$, $n > m_0$ и ее прямоугольник постоянства $\Delta' \times \Delta^{(2)} \subset \Delta^{(1)} \times \Delta^{(2)}$, такие, что

$$[x_1] \cap \bar{\Delta}' \times \bar{\Delta}^{(2)} = \emptyset, \quad A_{nm}(x, y) \neq 0, \quad (x, y) \in \Delta' \times \Delta^{(2)}. \quad (1.33)$$

Второй раз применяя лемму к сумме $A_{nm}(x, y)$, мы можем определить сумму $A_{nm}(x, y)$, $m > m_0$, и прямоугольник постоянства этой суммы $\Delta' \times \Delta''$, такие, что

$$\Delta' \times \Delta'' \subset \Delta' \times \Delta^{(2)}, \quad [y_1] \cap \bar{\Delta}' \times \bar{\Delta}'' = \emptyset, \quad (1.34)$$

$$A_{nm}(x, y) = d \neq 0, \quad (x, y) \in \Delta' \times \Delta''. \quad (1.35)$$

Рассмотрим теперь частичные суммы $S_{n_k m_k}$, $\sigma_{n_k m_k}$, $A_{n_k m_k}$, $n_k > n$, $m_k > m$ на прямоугольнике $\Delta' \times \Delta''$. Заметим, что прямоугольник $\Delta' \times \Delta''$ разбивается на конечное число прямоугольников, на каждом из которых эти частичные суммы принимают постоянные значения, при этом

$$\int_{\Delta' \times \Delta''} X_i(x) X_j(y) = 0, \quad i > n \text{ или } j > m, \quad (1.36)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta' \times \Delta''} |\sigma_{n_k m_k}(x, y) - f(x, y)| dx dy = 0. \quad (1.37)$$

Из (1.37) следует, что частичные суммы $s_{n_k m_k}$, $n_k > n$, $m_k > m$ на прямоугольнике $\Delta' \times \Delta''$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Теперь покажем, что для любого $M_1 > 0$ и целого $N > 0$ существует $k_1 > N$ и прямоугольник постоянства $\Delta_{k_1}' \times \Delta_{k_1}'' \subset \Delta' \times \Delta''$ суммы $S_{n_{k_1} m_{k_1}}$ такие, что

$$|S_{n_{k_1} m_{k_1}}(x, y)| > M_1 + |s_{n_{k_1} m_{k_1}}(x, y)|, (x, y) \in \Delta_{k_1}' \times \Delta_{k_1}''. \quad (1.38)$$

В самом деле, в обратном случае частичные суммы $S_{n_k m_k}$ тоже имели бы равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на $\Delta' \times \Delta''$ и в силу того, что они сходятся к $f(x, y)$ по мере на этом прямоугольнике, имело бы место равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta' \times \Delta''} |A_{n_k m_k}(x, y)| dx dy = 0. \quad (1.39)$$

Это противоречит равенствам (1.25) и (1.36), ибо из них следует, что

$$\int_{\Delta' \times \Delta''} A_{n_k m_k}(x, y) dx dy = c \neq 0, \text{ если } n_k > n \text{ или } m_k > m. \quad (1.40)$$

Таким образом, для любых $x_1 \in [0, 1]$, $y_1 \in [0, 1]$, $M_1 > 0$ и натурального N можно определить k_1 и прямоугольник постоянства суммы $S_{n_{k_1} m_{k_1}}$ такие, что

$$[x_1] \cap \bar{\Delta}_{k_1}' \times \bar{\Delta}_{k_1}'' = \emptyset, [y_1] \cap \bar{\Delta}_{k_1}' \times \bar{\Delta}_{k_1}'' = \emptyset, \quad (1.41)$$

$$|S_{n_{k_1} m_{k_1}}(x, y)| > M_1, (x, y) \in \Delta_{k_1}' \times \Delta_{k_1}'', \quad (1.42)$$

$$A_{n_{k_1} m_{k_1}}(x, y) = d_1 \neq 0, (x, y) \in \Delta_{k_1}' \times \Delta_{k_1}''. \quad (1.43)$$

Последнее условие позволяет путем последовательного повторения вышеприведенных рассуждений определить последовательность $k_i \uparrow +\infty$ и прямоугольники $\Delta_{k_i}' \times \Delta_{k_i}''$, $i > 1$, такие, что

$$[x_i] \cap \bar{\Delta}_{k_i}' \times \bar{\Delta}_{k_i}'' = \emptyset, [y_i] \cap \bar{\Delta}_{k_i}' \times \bar{\Delta}_{k_i}'' = \emptyset, i > 1, \quad (1.44)$$

$$\Delta_{k_i}' \times \Delta_{k_i}'' \supset \Delta_{k_{i+1}}' \times \Delta_{k_{i+1}}'', i \geq 1, \quad (1.45)$$

$$|S_{n_{k_i} m_{k_i}}(x, y)| > i, (x, y) \in \Delta_{k_i}' \times \Delta_{k_i}'', i \geq 1. \quad (1.46)$$

Из этих условий следует, что общая точка (x_0, y_0) замкнутых прямоугольников $\bar{\Delta}_{k_i}' \times \bar{\Delta}_{k_i}''$, которая является также пересечением открытых прямоугольников $\Delta_{k_i}' \times \Delta_{k_i}''$, не принадлежит ни одному из отрезков $[x_k]$, $[y_k]$, $k > 1$, и в этой точке выполняется равенство

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |S_{n_k m_k}(x_0, y_0)| = +\infty. \quad (1.47)$$

Равенство (1.47) противоречит условию (1.10) теоремы 1.1, следовательно, все $b_{ik} = 0$. Теорема 1.2 доказана.

§ 2. О восстановлении суммы тригонометрического ряда с помощью ее производной по случайным сетям

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x, \quad (2.1)$$

где

$$a_n = o(1/n), \quad b_n = o(1/n) \quad (2.2)$$

и обозначим через $F(x)$ его сумму, определенную почти всюду на $R_1 = (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим также случайную двоичную сеть

$$t + i/2^k, \quad 0 \leq i < 2^k, \quad k \geq 1, \quad t \in R_1. \quad (2.3)$$

Ясно, что найдется множество

$$e_0 \subset R_1, \quad \mu(e_0) = 0 \quad (2.4)$$

такое, что при $t \notin e_0$ определены все значения $F(t + i/2^k)$, $0 \leq i \leq 2^k$, $k \geq 0$, и имеют место равенства

$$F(t + i/2^k) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n(t + i/2^k) + b_n \sin 2\pi n(t + i/2^k). \quad (2.5)$$

Обозначим

$$E_0 = [0, 1] \setminus e_0, \quad (2.6)$$

$$\Phi_k(t, x) = 2^k [F(t + i/2^k) - F(t + (i-1)/2^k)], \quad x \in (t + (i-1)/2^k, t + i/2^k), \quad (2.7)$$

где $t \notin e_0$

В настоящем параграфе доказывается.

Теорема 2.1. Пусть $F(x)$ — сумма ряда (2.1), удовлетворяющего условиям (2.2), и для почти всех $t \in [0, 1]$ существует последовательность $k_n = k_n(t)$ такая, что последовательность $\Phi_{k_n}(t, x)$ сходится по мере на отрезке $[t, t+1]$ к $f(x)$, где $f(x)$ — периодическая, с периодом 1, суммируемая на $[0, 1]$ функция.

Пусть, далее, для почти всех $t \in [0, 1]$, всюду на отрезке $[t, t+1]$, кроме, быть может счетного числа точек $x \in [t, t+1]$ выполняется условие

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\Phi_k(t, x)| < +\infty. \quad (2.8)$$

Тогда

$$F(x) = C + \int_0^x f(t) dt \quad (2.9)$$

почти всюду на $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $X_0^{(0)}(t, x)$, $X_1^{(0)}(t, x)$, $X_n^{(n)}(t, x)$, $n \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^n$ — функции Хаара, определенные на отрезке $[t, t+1]$, т. е.

$$X_0^{(0)}(t, x) \equiv 1, \quad x \in [t, t+1], \quad X_1^{(0)}(t, x) = 1, \quad x \in [t, t+1/2],$$

$$X_1^{(0)}(t, x) = -1, \quad x \in (t+1/2, t+1], \quad (2.10)$$

$$X_k^{(n)}(t, x) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & x \in (t + (2k-2)2^{-n-1}, t + (2k-1)2^{-n-1}) \\ -\sqrt{2^n}, & x \in (t + (2k-1)2^{-n-1}, t + 2k2^{-n-1}) \\ 0, & x \notin [t + (k-1)2^{-n-1}, t + k2^{-n-1}]. \end{cases} \quad (2.11)$$

Обозначим

$$c_0^{(0)}(t) = F(t+1) - F(t), \quad c_1^{(0)}(t) = F(t+1/2) - F(t) - [F(t+1) - F(t+1/2)], \quad (2.12)$$

$$c_k^{(n)}(t) = \sqrt{2^n} [2F(t + 2^{k-1}/2^{n+1}) - F(t + 2^k/2^{n+1}) - F(t + 2^{k-2}/2^{n+1})], \quad (2.13)$$

при $n \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^n$, и рассмотрим ряд

$$c_0^{(0)}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_k^{(n)}(t) X_k^{(n)}(t, x), \quad x \in [t, t+1]. \quad (2.14)$$

Легко видеть, что

$$S_n(t, x) = c_0^{(0)}(t) + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^l} c_k^{(l)}(t) X_k^{(l)}(t, x) = 2^n [F(t + k2^{-n}) - F(t + (k-1)2^{-n})] \quad (2.15)$$

при $x \in (t + (k-1)2^{-n}, t + k2^{-n})$, $1 \leq k \leq 2^n$, $n \geq 0$.

Покажем, что для почти всех $t \in [0, 1]$ коэффициенты $c_k^{(n)}(t)$ ряда (2.14) удовлетворяют условию A_1). Из (2.5) и (2.13) легко следует, что при $t \in E_0$

$$\frac{c_k^{(m)}(t)}{\sqrt{2^m}} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_{nm}^{(k)} + b_n \beta_{nm}^{(k)}) \cos 2\pi n t + (b_n \alpha_{nm}^{(k)} - a_n \beta_{nm}^{(k)}) \sin 2\pi n t, \quad (2.16)$$

где

$$\alpha_{nm}^{(k)} = 2 \cos 2\pi n 2k - 1/2^{m+1} - \cos 2\pi n 2k - 2/2^{m+1} - \cos 2\pi n 2k/2^{m+1}, \quad (2.17)$$

$$\beta_{nm}^{(k)} = 2 \sin 2\pi n 2k - 1/2^{m+1} - \sin 2\pi n 2k - 2/2^{m+1} - \sin 2\pi n 2k/2^{m+1}. \quad (2.18)$$

Ясно, что

$$|\alpha_{nm}^{(k)}| \leq 4, \quad |\beta_{nm}^{(k)}| \leq 4, \quad 1 \leq k \leq 2^m, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0 \quad (2.19)$$

и

$$|\alpha_{nm}^{(k)}| \leq 4n^2/2^{2m}, \quad |\beta_{nm}^{(k)}| \leq 4n^2/2^{2m}, \quad 1 \leq k \leq 2^m, \quad 1 \leq n \leq 2^m, \quad m \geq 1. \quad (2.20)$$

Из (2.16), (2.19) и (2.20) следует

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{c_k^{(m)}(t)}{\sqrt{2^m}} \right)^2 dt &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_{nm}^{(k)} + b_n \beta_{nm}^{(k)})^2 + (b_n \alpha_{nm}^{(k)} - a_n \beta_{nm}^{(k)})^2 \leq \\ &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) (|\alpha_{nm}^{(k)}|^2 + |\beta_{nm}^{(k)}|^2) \leq \end{aligned}$$

$$\leq 4 \sum_{n=1}^{2^m} (a_n^2 + b_n^2) \frac{32 n^4}{2^{4m}} + 4 \sum_{n=2^{m+1}}^{\infty} 32 \cdot (a_n^2 + b_n^2). \quad (2.2)$$

Так как согласно (2.2)

$$a_n = \frac{\alpha_n}{n}, \quad b_n = \frac{\beta_n}{n}, \quad \alpha_n \rightarrow 0, \quad \beta_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2.22)$$

из (2.21) получаем

$$\int_0^1 \left(\frac{c_k^{(m)}(t)}{\sqrt{2^m}} \right)^2 dt \leq c_1 \sum_{n=1}^{2^m} (a_n^2 + \beta_n^2) n^2 / 2^{4m} + c_2 \sum_{n=2^{m+1}}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{n^2} \leq \varepsilon_m / 2^m, \quad 1 \leq k < 2^m, \quad m \geq 1, \quad (2.23)$$

где $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Следовательно

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{2^m} \left(\frac{c_k^{(m)}(t)}{\sqrt{2^m}} \right)^2 dt \leq \varepsilon_m, \quad \varepsilon_m \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Возьмем подпоследовательность ε_{m_i} , $i \geq 1$ такую, что

$$\varepsilon_{m_i} > 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{m_i} < +\infty, \quad (2.25)$$

тогда ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{m_i}} \left(\frac{c_k^{(m_i)}(t)}{\sqrt{2^{m_i}}} \right)^2$$

почти всюду сходится и, следовательно, найдется множество $E_1 \subset E_0$ такое, что

$$\mu(E_1) = \mu(E_0) = 1, \quad E_1 \subset [0, 1] \quad (2.26)$$

и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^{m_i}} \left(\frac{c_k^{(m_i)}(t)}{\sqrt{2^{m_i}}} \right)^2 = 0, \quad t \in E_1. \quad (2.27)$$

Из (2.27) немедленно следует, что для любого $t \in E_1$ коэффициенты ряда (2.14) по системе Хаара, определенной на отрезке $[t, t+1]$, на этом отрезке удовлетворяют условию A_1). С другой стороны, согласно условиям теоремы 2.1, существует множество $E_2 \subset E_1$, $\mu(E_2) = \mu(E_1)$, такое, что для любого $t \in E_2$ некоторая последовательность частичных сумм $S_{2^k}(t, x)$ ряда (2.15) сходится по мере на отрезке $[t, t+1]$ к $f(x)$, и, кроме того, для любого $t \in E_2$ имеет место условие (см. условие (2.8) и равенства (2.7), (2.15))

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |S_{2^k}(t, x)| < +\infty, \quad (2.28)$$

выполненное всюду, кроме, быть может, счетного множества точек $x \in [t, t+1]$. Согласно теореме 1.1, из вышеуказанного следует, что для любого $t \in E_2$ ряд (2.14) является рядом Фурье функции $f(x)$ по

системе Хаара $X_0^{(0)}(t, x)$, $X_k^1(t, x)$, $n > 0$, $1 \leq k \leq 2^n$, на отрезке $[t, t+1]$. Отсюда и из равенств (2.15) следует, что для почти всех $t \in [0, 1]$ имеют место равенства

$$F(t+1) - F(t) = \int_t^{t+1} f(x) dx; \quad F(t+k/2^n) - F(t+k-1/2^n) = \int_{t+k-1/2^n}^{t+k/2^n} f(x) dx \quad (2.29)$$

для всех $n \geq 0$, $1 \leq k \leq 2^n$.

Обозначим

$$\Phi(t) = F(t) - \int_0^t f(x) dx. \quad (2.30)$$

Так как

$$\Phi(t+1) - \Phi(t) = 0, \quad \Phi(t+i/2^k) - \Phi(t+i-1/2^k) = 0, \quad k > 1, \quad 1 \leq i \leq 2^k \quad (2.31)$$

почти всюду на $[0, 1]$, то почти всюду на $[0, 1]$

$$\Phi(t) = \Phi(t+i/2^k), \quad k \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 2^k. \quad (2.32)$$

Из (2.32) легко следует, что $\Phi(t) = \text{const}$ почти всюду на $[0, 1]$. В самом деле, в противном случае существуют лежащие на $[0, 1]$ множества положительной меры E_1, E_2 такие, что

$$\inf_{t \in E_1} \Phi(t) > \sup_{t \in E_2} \Phi(t). \quad (2.33)$$

Возьмем интервалы $\Delta_1 = ((i-1)2^{-k}, i2^{-k})$, $\Delta_2 = ((j-1)2^{-k}, j2^{-k})$ такие, что

$$\mu(\Delta_1 \cap E_1) > 3/4 \cdot 2^{-k}, \quad \mu(\Delta_2 \cap E_2) > 3/4 \cdot 2^{-k}. \quad (2.34)$$

Допуская, что $j > i$, почти для всех $t \in E_1$ имеем

$$\Phi(t) = \Phi\left(t + \frac{j-i}{2^k}\right). \quad (2.35)$$

С другой стороны, из (2.34) следует, что для некоторого множества $A \subset E_1$, $\mu(A) > 0$ имеем $t + (j-i)2^{-k} \in E_2$ при $t \in A$ и, следовательно, согласно (2.33)

$$\Phi(t) > \Phi\left(t + \frac{j-i}{2^k}\right), \quad t \in A, \quad (2.36)$$

что противоречит равенству (2.35). Теорема 2.1 доказана. Эту теорему можно интерпретировать как теорему единственности тригонометрических рядов. Рассмотрим тригонометрический ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x, \quad a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0 \quad (2.37)$$

и обозначим

$$\psi(x) = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi n} \sin 2\pi n x - \frac{b_n}{2\pi n} \cos 2\pi n x. \quad (2.38)$$

Функция $\psi(x)$ определена почти всюду и поэтому существует множество e_0 , $\mu(e_0) = 0$, такое, что при $t \notin e_0$ определены величины $\psi(t + i2^{-k})$, $k \geq 0$, $1 \leq i \leq 2^k$. Рассмотрим функции

$$\psi_k(t, x) = 2^k [\psi(t + i2^{-k}) - \psi(t + (i-1)2^{-k})],$$

$$x \in (t + (i-1)2^{-k}, t + i2^{-k}). \quad (2.39)$$

Обозначив, для краткости

$$A_n(x) = a_n \cos 2\pi n x + b_n \sin 2\pi n x, \quad (2.40)$$

$$B_n(x) = a_n \sin 2\pi n x - b_n \cos 2\pi n x, \quad (2.41)$$

имеем для любого $t \in e_0$

$$\frac{\psi(t + i2^{-k}) - \psi(t + (i-1)2^{-k})}{2^{-k}} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(t + i2^{-k}) - B_n(t + (i-1)2^{-k})}{2\pi n \cdot 2^{-k}}. \quad (2.42)$$

Введем

Определение 2.1. Будем говорить, что тригонометрический ряд (2.37) суммируется по мере к функции $\varphi(x)$ методом Лебега относительно случайной подсети $\{t + i2^{-k}\}$, $k_1 < k_2 < \dots < k_r < \dots$, $1 \leq i \leq 2^{k_r}$, если для почти всех $t \in [0, 1]$ последовательность $f_{k_r}(t, x)$ сходится по мере к $\psi(x)$ на отрезке $[t, t+1]$.

Из теоремы 2.1 следует

Теорема 2.2. Пусть тригонометрический ряд (2.37) суммируется по мере к периодической, с периодом 1, суммируемой функции $\varphi(x)$ методом Лебега относительно случайной подсети $\{t + i2^{-k_r}\}$, и пусть для почти всех $t \in [0, 1]$ всюду на отрезке $t \leq x \leq t+1$, кроме, быть может, счетного числа точек $x \in [t, t+1]$, выполняется условие

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} |\psi_{k_r}(t, x)| < +\infty. \quad (2.43)$$

Тогда ряд (2.37) является рядом Фурье—Лебега функции $\varphi(x)$.

Доказательство. Так как $a_n, b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin 2\pi n x - b_n \cos 2\pi n x}{2\pi n} \quad (2.44)$$

почти всюду сходится к периодической интегрируемой функции $F(x)$.

Обозначив

$$\Phi_k(t, x) = \frac{F(t + i2^{-k}) - F(t + (i-1)2^{-k})}{2^{-k}}; \quad x \in (t + i2^{-k}, t + (i+1)2^{-k}), \quad (2.45)$$

$$f(x) = \varphi(x) - a_0 \quad (2.46)$$

и учитывая равенства

$$\Phi_k(t, x) = \psi_k(t, x) - a_0, \quad (2.47)$$

мы видим, что ряд (2.44) и функции (2.46), (2.47) удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Следовательно, почти всюду на $[0, 1]$

$$F(x) = c + \int_0^x f(t) dt. \quad (2.48)$$

Из (2.48) следует, что $F(x)$ периодическая, с периодом 1, непрерывная функция, ибо в противном случае она имела бы разрывы первого рода в точках $x = n$ и это противоречило бы условиям

$$\frac{a_n}{2\pi n} = o(1/n), \frac{l_n}{2\pi n} = o(1/n). \quad (2.49)$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = 0. \quad (2.50)$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{a_n}{2 \cdot 2\pi n} - \int_0^1 F(x) \sin 2\pi n x dx, \frac{b_n}{2 \cdot 2\pi n} = - \int_0^1 F(x) \cos 2\pi n x dx. \quad (2.51)$$

Учитывая (2.48), (2.50) и интегрируя по частям выражения (2.51), получим

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi n x dx, b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x dx, n \geq 1. \quad (2.52)$$

Отсюда, согласно (2.46) и (2.50), следует, что коэффициенты a_n , $n \geq 0$, b_n , $n \geq 1$, являются коэффициентами Фурье—Лебега функции $\varphi(x)$ по системе $1, \cos 2\pi n x, \sin 2\pi n x$, $n \geq 1$. Теорема 2.2 доказана.

§ 3. О восстановлении коэффициентов двойных тригонометрических рядов, суммируемых методом Лебега относительно двоичных случайных сетей

Рассмотрим двойной тригонометрический ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{nm} e^{2\pi i n x} e^{2\pi i m y}, a_{nm} = \overline{a_{-n-m}}, \quad (3.1)$$

где

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} a_{mn} = 0 \quad \forall |m| \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\lim_{|m| \rightarrow \infty} a_{nm} = 0, \quad \forall |n| \geq 0 \quad (3.3)$$

и

$$|a_{nm}| \leq M, |n| \geq 0, |m| \geq 0. \quad (3.4)$$

Обозначим

$$a_{NN}(x, y) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N a_{nm} e^{2\pi i n x} e^{2\pi i m y} \quad (3.5)$$

и положим

$$F(x, y) = a_{00} xy + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_{n0} \cdot y e^{2\pi i n x}}{2\pi i n} + \\ + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_{0m} x e^{2\pi i m y}}{2\pi i m} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_{nm} e^{2\pi i n x} \cdot e^{2\pi i m y}}{4\pi^2 nm}, \quad (3.6)$$

где правая часть (3.6) получена почленным интегрированием по x и y ряда (3.1) и Σ' означает, что в сумме не участвует член с индексом 0. Заметим, что из (3.4) следует сходимость в метрике $L_2(T^2)$ рядов правой части (3.6) и в дальнейшем фиксируя одну из сумм $F(x, y)$ и рассматривая случайную двоичную сеть $(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-l})$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $1 \leq p \leq 2^k$, $1 \leq q \leq 2^l$, значения $F(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-l})$ можно считать определенными для почти всех (t, τ) одновременно для всех k, l и p, q .

Пусть

$$\mu = 2^k + p, \nu = 2^l + q, k \geq 0, l \geq 0, 1 \leq p \leq 2^k, 1 \leq q \leq 2^l. \quad (3.7)$$

Обозначим

$$\Delta_\mu = (t + (p-1)2^{-k}, t + p2^{-k}), \Delta_\nu = (\tau + (q-1)2^{-l}, \tau + q2^{-l}), \quad (3.8)$$

$$\Delta_\mu \Delta_\nu, F = F(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-l}) + F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l}) - \\ - F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l}) - F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + q2^{-l}). \quad (3.9)$$

Почти для всех точек (t, τ) на квадратах $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$ можно определить функции

$$\Phi_{\mu, \nu}(t, \tau, x, y) = \frac{\Delta_\mu \Delta_\nu F}{2^{-k}2^{-l}}, \text{ при } (x, y) \in \Delta_\mu \times \Delta_\nu. \quad (3.10)$$

Определение 3.1. Будем говорить, что тригонометрический ряд (3.1) суммируется по мере к функции $f(x, y)$ методом Лебега относительно случайной подсети $(t + p2^{-k_j}, \tau + q2^{-l_j})$, $1 \leq p \leq 2^{k_j}$, $1 \leq q \leq 2^{l_j}$, $k_j \uparrow +\infty$, $l_j \uparrow +\infty$ при $j \uparrow +\infty$, если для почти всех (t, τ) последовательность $\Phi_{k_j, l_j}(t, \tau, x, y)$ сходится к $f(x, y)$ по мере на квадрате $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$.

Теорема 3.1. Пусть тригонометрический ряд (3.1), удовлетворяющий условиям (3.2) — (3.4), суммируется по мере к периодической, с периодом 1 по обоим переменным, функции $f(x, y)$ методом Лебега относительно случайной подсети $(t + p2^{-k_j}, \tau + q2^{-l_j})$. Пусть, далее, для почти всех (t, τ) , $(t, \tau) \in [0, 1] \times [0, 1]$ условие

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |\Phi_{k_j, l_j}(t, \tau, x, y)| < +\infty \quad (3.11)$$

выполнено во всех точках $(x, y) \in [t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, не принадлежащих некоторому множеству $E_{t, \tau}$, $E_{t, \tau} \subset [t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, состоящему из не более чем счетного числа отрезков, параллельных координатным осям.

Тогда ряд (3.1) является рядом Фурье функции $f(x, y)$.

Доказательство. Обозначим через $X_n(\xi, \eta)$, $n \geq 1$ систему Хаара, определенную на отрезке $[\xi, \xi+1]$ (см. (2.13)), т. е. $X_n(\xi, \eta) = X_n(\xi - \eta)$, $\xi \leq \eta \leq \xi+1$, и рассмотрим двойную систему Хаара $X_\mu(t, x)$, $X_\nu(\tau, y)$, $\mu \geq 1$, $\nu \geq 1$, определенную на квадрате $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$.

Если μ и ν представлены в виде

$$\mu = 2^{k-1} + p, \nu = 2^{l-1} + q, k \geq 1, l \geq 1, 1 \leq p \leq 2^{k-1}, 1 \leq q \leq 2^{l-1}, \quad (3.12)$$

то носителями функций $X_\mu(t, x)$ и $X_\nu(\tau, y)$ будут интервалы

$$\Delta_\mu = [t + (p-1)2^{1-k}, t + p2^{1-k}], \Delta_\nu = [\tau + (q-1)2^{1-l}, \tau + q2^{1-l}]. \quad (3.13)$$

При $\mu > 1$ обозначаем через Δ_μ^+ и Δ_μ^- интервалы, на которых $X_\mu(t, x)$ принимает, соответственно, положительное и отрицательное значения. Тогда

$$\Delta_\mu^+ = (t + (2p-2)2^{-k}, t + (2p-1)2^{-k}), \Delta_\mu^- = (t + (2p-1)2^{-k}, t + 2p2^{-k}), \quad (3.14)$$

$$\delta_\nu^+ = (\tau + (2q-2)2^{-l}, \tau + (2q-1)2^{-l}), \delta_\nu^- = (\tau + (2q-1)2^{-l}, \tau + 2q2^{-l}). \quad (3.15)$$

Когда $\mu=1$, имеем $\Delta_1 = (t, t+1)$ и считаем $\Delta_1^+ = \Delta_1$, $\Delta_1^- = \emptyset$. В дальнейшем полагается

$$\Delta, \varphi = \varphi(t + 2^{1-k}) - \varphi(t + (p-1)2^{1-k}), \Delta_\mu^{(2)} \varphi = \Delta_\mu^+ \varphi - \Delta_\mu^- \varphi, \quad (3.16)$$

при $\mu=1$, $\nu=1$ полагается $\Delta_1^- \varphi = 0$, $\delta_1^- \varphi = 0$, и следовательно, $\Delta_1^{(2)} \varphi = \varphi(t+1) - \varphi(t)$, $\delta_1^{(2)} \varphi = \varphi(\tau+1) - \varphi(\tau)$.

Рассмотрим частичную сумму

$$S_{2^k 2^l}^{(N, N)}(t, \tau, x, y) = \sum_{\mu=1}^{2^k} \sum_{\nu=1}^{2^l} c_{\mu\nu}^{(N, N)}(t, \tau) X_\mu(t, x) X_\nu(\tau, y) \quad (3.17)$$

разложения суммы $\varphi_{NN}(x, y)$ по двойной системе Хаара $X_\mu(t, x) X_\nu(\tau, y)$, $\mu, \nu \geq 1$ на квадрате $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$.

Имеем

$$\begin{aligned} c_{\mu\nu}^{(N, N)}(t, \tau) &= \int_t^{t+1} \int_\tau^{\tau+1} \sigma_{NN}(x, y) X_\mu(t, x) X_\nu(\tau, y) dx dy = \\ &= \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N a_{nm} \int_t^{t+1} \int_\tau^{\tau+1} e^{2\pi i (nx + ny)} X_\mu(t, x) X_\nu(\tau, y) dx dy. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Обозначим

$$a_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau) = \int_t^{t+1} \int_\tau^{\tau+1} e^{2\pi i (nx + ny)} X_\mu(t, x) X_\nu(\tau, y) dx dy. \quad (3.19)$$

Как легко подсчитать $a_{11}^{(00)} = 1$, $a_{\mu\nu}^{(00)} = 0$ при $\mu \neq 1$ или $\nu \neq 1$, $a_{\mu\nu}^{(nm)} = 0$ при $|n| \geq 1$, $a_{\mu\nu}^{(nm)} = 0$ при $|m| \geq 1$ и

$$a_{\mu 1}^{(n0)}(t, \tau) = \frac{\max |X_\mu|}{2\pi i n} \Delta_\mu^{(2)}(e^{2\pi i n x}), |n| \geq 1, \mu \geq 1; a_{\mu\nu}^{(n, 0)}(t, \tau) = 0, \nu \geq 2, \mu \geq 1, \quad (3.20)$$

$$a_{1\nu}^{(0m)}(t, \tau) = \frac{\max |X_\nu|}{2\pi i m} \delta_\nu^{(2)}(e^{2\pi i m y}), |m| \geq 1, \nu \geq 1; a_{\mu\nu}^{(0m)}(t, \tau) = 0, \mu \geq 2, \nu \geq 1, \quad (3.21)$$

$$a_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau) = -\frac{1}{4\pi^2 nm} \Delta_\mu^{(2)}(e^{2\pi i n x}) \cdot \delta_\nu^{(2)}(e^{2\pi i m y}) \max |X_\mu| \cdot \max |X_\nu| =$$

$$= - \frac{\sqrt{2^{k-1} \cdot 2^{l-1}}}{4\pi^2 nm} \Delta_{\mu}^{(2)} (e^{2\pi i n x}) \cdot \delta_{\nu}^{(2)} (e^{2\pi i m y}). \quad |m|, |n| \geq 1, \mu, \nu \geq 1, \quad (3.22)$$

где

$$\Delta_{\mu}^{(2)} e^{2\pi i n x} = 2e^{2\pi i n (t+2p-1/2^k)} - e^{2\pi i n (t+2p-2/2^k)} - e^{2\pi i n (t+2p/2^k)}, \quad \mu \geq 2 \quad (3.23)$$

$$\delta_{\nu}^{(2)} e^{2\pi i m y} = 2e^{2\pi i m (\tau+2q-1/2^l)} - e^{2\pi i m (\tau+2q-2/2^l)} - e^{2\pi i m (\tau+2q/2^l)}, \quad \nu \geq 2. \quad (3.24)$$

Эти формулы сохраняются также в случаях $\mu=1$ или $\nu=1$, так как

$$\Delta_1^{(2)} e^{2\pi i n x} = 0, |n| \geq 0, \delta_1^{(2)} e^{2\pi i m y} = 0, |m| \geq 0 \text{ и, с другой стороны, } a_{1, \nu}^{(nm)} \times \\ \times (t, \tau) = 0, |n| \geq 1, a_{\mu, 1}^{(nm)} (t, \tau) = 0, |m| \geq 1.$$

Заметим также, что

$$\Delta_{\mu}^{(2)} e^{2\pi i n x} = (2e^{\frac{2\pi i n \cdot 2p-1}{2^k}} - e^{\frac{2\pi i n \cdot 2p-2}{2^k}} - e^{\frac{2\pi i n \cdot 2p}{2^k}}) e^{2\pi i n t}, \quad (3.25)$$

$$\delta_{\nu}^{(2)} e^{2\pi i m y} = (2e^{\frac{2\pi i m \cdot 2q-1}{2^l}} - e^{\frac{2\pi i m \cdot 2q-2}{2^l}} - e^{\frac{2\pi i m \cdot 2q}{2^l}}) e^{2\pi i m \tau}. \quad (3.26)$$

Обозначим через $c_{\mu, \nu} (t, \tau)$ предел в метрике $L_2 ([0,1]^2)$ выражения (3.14), т. е.

$$c_{\mu, \nu} (t, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nm} a_{\mu, \nu}^{(nm)} (t, \tau), \quad (3.27)$$

где правая часть сходится в метрике L_2 , согласно (3.20)—(3.26).

Заметим, что согласно формуле частных сумм ряда по двойной системе Хаара, имеем

$$S_{2^k 2^l}^{(N, N)} (t, \tau, x, y) = 2^k \cdot 2^l \int_{\delta_{\mu} \times \delta_{\nu}} \sigma_{NN} (x, y) dx dy = \\ = 2^k 2^l \Delta_{\mu} \delta_{\nu} A_{NN}, \quad (x, y) \in \Delta_{\mu} \times \delta_{\nu}, \quad (3.28)$$

где A_{NN} — частичная сумма ряда (3.6),

$$\mu = 2^k + p, \nu = 2^l + q, 1 \leq p \leq 2^k, 1 \leq q \leq 2^l, k \geq 0, l \geq 0, \quad (3.29)$$

$$\Delta_{\mu} = (t + (p-1) 2^{-k}, t + p 2^{-k}), \delta_{\nu} = (\tau + (q-1) 2^{-l}, \tau + q 2^{-l}). \quad (3.30)$$

Как легко видеть

$$2^k 2^l \Delta_{\mu} \delta_{\nu} A_{NN} = a_{00} + 2^k \sum_{n=-N}^N \frac{a_{n0} \Delta_{\mu} (e^{2\pi i n x})}{2\pi i n} + \\ + 2^l \sum_{m=-N}^N \frac{a_{0m} \delta_{\nu} (e^{2\pi i m y})}{2\pi i m} - \\ - \frac{2^k 2^l}{4\pi^2} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \frac{a_{nm}}{nm} \cdot \Delta_{\mu} (e^{2\pi i n x}) \cdot \delta_{\nu} (e^{2\pi i m y}), \quad (3.31)$$

где

$$\Delta_{\mu} (e^{2\pi i n x}) = (e^{2\pi i n p 2^{-k}} - e^{2\pi i n (p-1) 2^{-k}}) e^{2\pi i n t}, \quad (3.32)$$

$$\delta_{\nu} (e^{2\pi i m y}) = (e^{2\pi i m q 2^{-l}} - e^{2\pi i m (q-1) 2^{-l}}) e^{2\pi i m \tau}. \quad (3.33)$$

Из (3.31)—(3.33) следует, что для произвольных μ, ν правая часть (3.28) сходится в метрике L_2 по переменной $(t, \tau) \in [0, 1] \times [0, 1]$ к значению $2^{k+l} \Delta_\mu \delta_\nu F$.

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ также в левой части (3.28) и учитывая (3.17), (3.18), (3.19) и (3.27), получаем

$$\begin{aligned} S_{2^{k+l}}(t, \tau, x, y) &= \sum_{\mu=1}^{2^k} \sum_{\nu=1}^{2^l} c_{\mu\nu}(t, \tau) X_\mu(t, x) X_\nu(\tau, y) = \\ &= 2^{k+l} \Delta_\mu \delta_\nu F = 2^k \cdot 2^l \cdot [F(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-l}) + F(t + (p-1)2^{-k}, \\ &\quad \tau + (q-1)2^{-l}) + F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l}) - \\ &\quad - F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l})] \end{aligned} \quad (3.34)$$

при $(x, y) \in (t + (p-1)2^{-k}, t + p2^{-k}) \times (\tau + (q-1)2^{-l}, \tau + q2^{-l})$.

Все величины, участвующие в равенстве (3.34), можно считать определенными для всех $(t, \tau) \in E_0$, где $E_0 \subset [0, 1] \times [0, 1]$ имеет плоскую меру $mE_0 = 1$, и для всех $k > 0, l > 0, 1 \leq p \leq 2^k, 1 \leq q \leq 2^l$ одновременно. При этом, как легко видеть, путем предельного перехода при $N \rightarrow \infty$ в (3.31) в метрике $L_2([0, 1]^2)$ относительно переменной (t, τ) имеет место равенство

$$\begin{aligned} 2^{k+l} [F(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-l}) + F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l}) - \\ - F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l}) - F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + q2^{-l})] = \\ = a_{00} + 2^k \sum_n' \frac{\alpha_{n0} (e^{2\pi i p 2^{-k}} - e^{2\pi i (p-1) 2^{-k}}) e^{2\pi i n t}}{2\pi i n} + \\ + 2^l \sum_m' \frac{\alpha_{0m}}{2\pi i m} (e^{2\pi i m q 2^{-l}} - e^{2\pi i m (q-1) 2^{-l}}) e^{2\pi i m \tau} - \frac{2^{k+l}}{4\pi^2} \times \\ \times \sum_{n, m}' \frac{\alpha_{nm}}{\pi m} (e^{2\pi i n p 2^{-k}} - e^{2\pi i n (p-1) 2^{-k}}) \cdot (e^{2\pi i m q 2^{-l}} - e^{2\pi i m (q-1) 2^{-l}}) \times \\ \times e^{2\pi i (n t + m \tau)}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

которое тоже можно считать выполненным почти для всех $(t, \tau), (t, \tau) \in [0, 1]^2$ одновременно для всех k, l, p, q .

Для большей ясности заметим, что для некоторой подпоследовательности $\{N_j\}$ соответствующие пределы в выражениях (3.18), (3.28) и (3.31), где вместо N взято N_j , существуют для почти всех $(t, \tau) \in [0, 1] \times [0, 1]$ одновременно для всех $k > 0, l > 0, 1 \leq p \leq 2^k, 1 \leq q \leq 2^l$.

Лемма 3.1. Пусть тригонометрический ряд (3.1) удовлетворяет условиям (3.2), (3.3), и коэффициенты $c_{\mu\nu}(t, \tau)$ ряда по двойной системе Хаара $X_\mu(t, x), X_\nu(\tau, y), \mu \geq 1, \nu \geq 1$,

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\mu\nu}(t, \tau) X_\mu(t, x) X_\nu(\tau, y) \quad (3.36)$$

определены равенствами (3.27) и (3.20)—(3.26).

Тогда существует множество $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$, $mE = 1$ такое что для любой точки $(t, \tau) \in E$ частичные суммы $S_{2^{k+l}}(t, \tau, x, y)$

ряда (3.36) удовлетворяют равенству (3.34) и, вместе с тем, для некоторых последовательностей $n_l \uparrow +\infty$, $m_l \uparrow +\infty$ имеют место равенства

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{\mu=2^{n_l-1}}^{2^{n_l}} \left(\frac{c_{\mu\nu}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}|} \right)^2 = 0, \quad (t, \tau) \in E, \quad \nu \geq 1, \quad (3.37)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{\nu=2^{m_l-1}}^{2^{m_l}} \left(\frac{c_{\mu\nu}(t, \tau)}{\max |X_{\nu}|} \right)^2 = 0, \quad (t, \tau) \in E, \quad \mu \geq 1. \quad (3.38)$$

Доказательство. Выполнение равенства (3.34) на некотором множестве $E_0 \subset [0,1] \times [0,1]$, $mE_0 = 1$ доказано. Чтобы доказать лемму нужно определить множество $E \subset E_0$, $mE = 1$ такое, что для всех $(t, \tau) \in E$ выполняются условия (3.37) и (3.38). Из (3.27), (3.20) — (3.26) имеем

$$\begin{aligned} \frac{c_{\mu 1}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}| \cdot \max |X_1|} &= \frac{1}{\max |X_{\mu}|} \cdot \sum_n' a_{n0} \alpha_{\mu 1}^{(n0)}(t, \tau) = \\ &= \sum_n' \frac{a_{n0} \cdot \beta_{n\mu}}{2\pi i n} \cdot e^{2\pi i n t}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\frac{c_{\mu\nu}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}| \cdot \max |X_{\nu}|} = - \sum_n' \sum_m' \frac{a_{nm} \beta_{n\mu} \beta_{m\nu}}{4\pi^2 nm} \cdot e^{2\pi i (nt + m\tau)}, \quad (3.40)$$

где $\mu \geq 2$, $\nu \geq 2$ и

$$\beta_{n\mu} = 2 e^{2\pi i n (2p-1) 2^{-k}} - e^{2\pi i n (2p-2) 2^{-k}} - e^{2\pi i n 2p \cdot 2^{-k}}, \quad (3.41)$$

а число μ представлено в виде (3.12).

Как легко видеть, для чисел μ и ν , представленных равенствами (3.12), имеют место неравенства

$$|\beta_{n\mu}| \leq A \cdot n^2 \cdot 2^{-2k}, \quad |n| \leq 2^k, \quad |\beta_{n\mu}| \leq 4, \quad |n| \geq 0, \quad (3.42)$$

$$|\beta_{m\nu}| \leq A m^2 \cdot 2^{-2l}, \quad |m| \leq 2^l; \quad |\beta_{m\nu}| \leq 4, \quad |m| \geq 0. \quad (3.43)$$

Из (3.39) и (3.43) следует, что если $2^{k-1} < \mu \leq 2^k$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{c_{\mu 1}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}| \cdot \max |X_1|} \right)^2 dt d\tau &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{n0}|^2 \cdot |\beta_{n\mu}|^2}{n^3} \leq \\ &\leq \frac{A^2 m_0}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{[2^{k/2}]} \frac{n^2}{2^{4k}} + \frac{A^2 \cdot M_k}{2\pi^2} \sum_{n=[2^{k/2}]+1}^{2^k} \frac{n^2}{2^{4k}} + \frac{36 M_k}{2\pi^2} \sum_{n=2^{k+1}}^{\infty} 1/n^3, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где $M_k = \max |a_{n0}|^2$ при $n \geq 2^{k/2}$; $M_0 = \max |a_{n0}|^2$, $|n_0| \geq 0$.

Так как $M_k \rightarrow 0$, при $k \rightarrow \infty$ получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{c_{\mu 1}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}|} \right)^2 dt d\tau \leq \varepsilon_k \cdot 2^{-k}, \quad 2^{k-1} < \mu \leq 2^k, \quad (3.45)$$

где ε_k зависит только от k и $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Следовательно

$$\int_0^1 \int_0^1 \sum_{\mu=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(\frac{c_{\mu 1}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}|} \right)^2 dt d\tau \leq \varepsilon_k^{(1)}, \quad k \geq 1, \quad (3.47)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k^{(1)} = 0. \quad (3.48)$$

Покажем теперь, что аналогичная оценка верна также для всех $v \geq 2$, т. е.

$$\int_0^1 \int_0^1 \sum_{\mu=2^{k-1}+1}^{2^k} \left(\frac{c_{\mu v}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}|} \right)^2 dt d\tau \leq \varepsilon_k^{(v)}, \quad v \geq 1, \quad (3.49)$$

где $\varepsilon_k^{(v)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Из (3.40), полагая числа μ и v представленными равенствами (3.12) и применяя (3.42), (3.43), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{c_{\mu v}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}| \cdot \max |X_v|} \right)^2 dt d\tau &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{c_{\mu v}(t, \tau)_i}{\sqrt{2^{i-1}} \sqrt{2^{j-1}}} \right)^2 dt d\tau = \\ &= \frac{1}{16\pi^4} \sum_n' \sum_m' \frac{|a_{nm}|^2 |\beta_{n\mu}|^2 |\beta_{mv}|^2}{n^2 m^2} \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 = \\ &= C \cdot \sum_{n=2^k}^{2^k} \sum_{m=2^k}^{2^k} \frac{|a_{nm}|^2 \cdot n^4}{n^2 m^2 2^{4k}} + C \cdot \sum_{|n| < 2^k} \sum_{|m| > 2^k} \frac{|a_{nm}|^2}{n^2 m^2} + \\ &+ C \sum_{|n| < 2^k} \sum_{|m| > 2^k} \frac{|a_{nm}|^2}{n^2 m^2} + C \sum_{|m| < 2^k} \sum_{|n| > 2^k} \frac{|a_{nm}|^2}{n^2 m^2}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где C — абсолютная постоянная.

Сначала оценим первую сумму Σ_1 . Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \\ &= C 2^{-4k} \sum_{|n| < 2^{k/2}}' \sum_{|m| < 2^{k/2}}' \frac{|a_{nm}|^2 \cdot n^2}{m^2} + C 2^{-4k} \sum_{|n| = [2^{k/2}]}^{2^k} \sum_{|m| = [2^{k/2}]}^{2^k} \frac{|a_{nm}|^2 \cdot n^2}{m^2} + \\ &+ C 2^{-4k} \sum_{|n| < 2^{k/2}}' \sum_{|m| = [2^{k/2}]}^{2^k} \frac{|a_{nm}|^2 \cdot n^2}{m^2} + C 2^{-4k} \sum_{|m| < 2^{k/2}} \sum_{|n| = [2^{k/2}]}^{2^k} \frac{|a_{nm}|^2 \cdot n^2}{m^2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Обозначим $M_1 = \sup |a_{nm}|^2$. Пусть $\varepsilon > 0$ и p_0 выбрано так, что

$$\sum_{|n| > p_0} \frac{M_1}{m^2} < \varepsilon. \quad (3.52)$$

Имеем

$$B_1 \leq C M_1 2^{-4k} \sum_{|n| < 2^{k/2}}' n^2 \sum_{|m| < 2^{k/2}}' \frac{1}{m^2} \leq C_1 \cdot 2^{-5k/2}, \quad (3.53)$$

$$B_2 \leq C M_1 2^{-4k} \sum_{|n| = [2^{k/2}]}^{2^k} n^2 \sum_{|m| = [2^{k/2}]}^{2^k} \frac{1}{m^2} \leq c_2 \cdot 2^{-3k/2}, \quad (3.54)$$

$$B_3 \leq C M_1 2^{-4k} \sum_{|n| < 2^{k/2}}' n^2 \sum_{|m| = [2^{k/2}]}^{2^k} \frac{1}{m^2} \leq C_3 2^{-3k}. \quad (3.55)$$

Обозначим

$$\varepsilon_k = \max \left\{ \max_{|m| \leq p_0, |n| \geq 2^{k/2}} |a_{nm}|^2, \max_{|n| \leq p_0, |m| \geq 2^{k/2}} |a_{nm}|^2 \right\} \quad (3.56)$$

и заметим, что согласно (3.2), (3.3), $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Если $2^{k/2} > p_0$, то имеем

$$\begin{aligned} B_4 &\leq C \cdot \varepsilon_k 2^{-4k} \cdot \sum'_{|m| \leq p_0, |n| = [2^{k/2}]} \frac{n^2}{m^2} + CM_1 2^{-4k} \sum_{|m| = p_0}^{[2^{k/2}]} \sum_{|n| = [2^{k/2}]}^{2^k} \frac{n^2}{m^2} \leq \\ &\leq C_4 \varepsilon_k \cdot 2^{-k} + C_4 \varepsilon \cdot 2^{-k} = c_4 (\varepsilon + \varepsilon_k) 2^{-k}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

С другой стороны

$$\Sigma_2 \leq C \cdot M_1 \sum_{|n| > 2^k} \sum_{|m| > 2^k} \frac{1}{n^2 m^2} \leq C_6 \cdot 2^{-2k}, \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\leq C \cdot \varepsilon_k \sum'_{|n| < p_0, |m| > 2^k} \frac{1}{n^2 m^2} + CM_1 \sum_{|n| = p_0}^{2^k} \sum_{|m| > 2^k} \frac{1}{n^2 m^2} < \\ &< C_7 \varepsilon_k 2^{-k} + c_7 \varepsilon \cdot 2^{-k} = C_7 (\varepsilon + \varepsilon_k) 2^{-k}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_4 &\leq C \varepsilon_k \sum_{|m| \leq p_0} \sum_{|n| > 2^k} \frac{1}{n^2 m^2} + CM_1 \sum_{|m| = p_0}^{2^k} \sum_{|n| > 2^k} \frac{1}{n^2 m^2} \leq \\ &\leq C_8 \varepsilon_k 2^{-k} + C_8 \varepsilon \cdot 2^{-k} = C_8 (\varepsilon + \varepsilon_k) 2^{-k}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Заметив, что $C_i, 1 \leq i \leq 8$ — абсолютные константы, ε — произвольное наперед заданное положительное число и $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при фиксированном ε , из неравенств (3.50) — (3.60) заключаем, что для любого $\eta > 0$ существует k_0 такое, что при $k > k_0$ имеет место неравенство

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{c_{\mu\nu}(t, \tau)}{\max |X_\mu|} \right)^2 dt d\tau < \eta \cdot \max |X_\nu|^2 \cdot 2^{-k} \quad (3.61)$$

для всех $\mu, 2^{k-1} < \mu \leq 2^k$ и для любого фиксированного $\nu, 2^{l-1} < \nu < \leq 2^l$.

Из (3.61) немедленно следует выполнение неравенств (3.49). Исходя из (3.47) можно определить последовательность $k_i^{(1)} \uparrow +\infty$ и множество $E_1 \subset [0, 1] \times [0, 1]$, $mE_1 = 1$ такие, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\mu=2^{k_i^{(1)}}-1}^{2^{k_i^{(1)}}} \left(\frac{c_{\mu 1}(t, \tau)}{\max |X_\mu|} \right)^2 = 0, (t, \tau) \in E_1. \quad (3.62)$$

В самом деле, для этого достаточно, используя (3.47) и (3.48), $\{k_i^{(1)}\}_{i=1}^\infty$ выбрать таким образом, чтобы сходиллся ряд

$$\sum_{i=1}^\infty \int_0^1 \int_0^1 \sum_{\mu=2^{k_i^{(1)}}-1}^{2^{k_i^{(1)}}} \left(\frac{c_{\mu 1}(t, \tau)}{\max |X_\mu|} \right)^2 dt d\tau < +\infty. \quad (3.63)$$

Допустим определены последовательности $\{k_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$ и множества E_n , $1 \leq n \leq j-1$ такие, что $k_i^{(n)} < k_{i+1}^{(n)}$, $i \geq 1$, $1 \leq n \leq j-1$

$$\{k_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{k_i^{(n-1)}\}_{i=1}^{\infty}, \quad 1 \leq n \leq j-1, \quad (3.64)$$

$$E_n \subset [0,1] \times [0,1], \quad mE_n = 1 \quad (3.65)$$

и выполняются условия

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{\mu=2^{k_l^{(n)}}-1}^{2^{k_l^{(n)}}} \left(\frac{c_{\mu,n}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}|} \right)^2 = 0, \quad (t, \tau) \in E_n \quad (3.66)$$

для всех n , $1 \leq n \leq j-1$.

Используя (3.49) можно выбрать подпоследовательность $\{k_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{k_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{k_i^{(j-1)}\}_{i=1}^{\infty}$, таким образом, что $k_i^{(j)} < k_{i+1}^{(j)}$, $i \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{\mu=2^{k_i^{(j)}}-1}^{2^{k_i^{(j)}}} \left(\frac{c_{\mu,j}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}|} \right)^2 dt d\tau < +\infty. \quad (3.67)$$

Тогда найдется множество $E_j \subset [0,1] \times [0,1]$, $mE_j = 1$ такое, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{\mu=2^{k_l^{(j)}}-1}^{2^{k_l^{(j)}}} \left(\frac{c_{\mu,j}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}|} \right)^2 = 0, \quad (t, \tau) \in E_j. \quad (3.68)$$

Итак, по индукции можно определить счетное число возрастающих последовательностей $\{k_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$, $j=1, 2, \dots$ и множества $E_j \subset [0,1] \times [0,1]$, $mE_j = 1$ такие, что

$$\{k_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{k_i^{(j-1)}\}_{i=1}^{\infty}, \quad k_i^{(j)} < k_{i+1}^{(j)}, \quad i \geq 1, \quad j \geq 2, \quad (3.69)$$

и условие (3.68) выполнено для всех j .

Полагая

$$E' = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j, \quad (3.70)$$

$$n_i = k_i^{(i)}, \quad i=1, 2, \dots, \quad (3.71)$$

из (3.68)–(3.71) получим

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{\mu=2^{n_l}-1}^{2^{n_l}} \left(\frac{c_{\mu,v}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}|} \right)^2 = 0, \quad (t, \tau) \in E' \quad (3.72)$$

для всех $v \geq 1$, где, согласно (3.70), $mE' = 1$.

Повторяя вышеприведенные рассуждения относительно v , когда индекс μ считается фиксированным, можно определить последовательность m_i и множество $E'' \subset [0,1] \times [0,1]$, $mE'' = 1$, такие, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{v=2^{m_l}-1}^{2^{m_l}} \left(\frac{c_{\mu,v}(t, \tau)}{\max |X_{\mu}|} \right)^2 = 0, \quad (t, \tau) \in E'' \quad (3.73)$$

для всех $\mu \geq 1$.

Тогда на множестве $E = E_0 \cap E' \cap E''$ будут выполнены равенства (3.37) и (3.38). Тем самым лемма 3.1 доказана.

Переходя к доказательству теоремы 3.1 заметим, что выполнение условий этой теоремы, согласно лемме 3.1 (см. также равенство (3.34) и (3.10)), означает, что подпоследовательность

$$S_{2k/2l}(t, \tau, x, y) = \Phi_{k/l}(t, \tau, x, y), (x, y) \in [t, t+1] \times [\tau, \tau+1] \quad (3.74)$$

частичных сумм ряда (3.36) сходится по мере на квадрате $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$ к интегрируемой по Лебегу функции $f(x, y)$ для любого $(t, \tau) \in E$, $mE = 1$, и что для любого $(t, \tau) \in E$ выполнено

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |S_{2k/2l}(t, \tau, x, y)| < +\infty \quad (3.75)$$

всюду на $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, кроме, быть может, точек (x, y) , принадлежащих некоторому множеству, состоящему из не более чем счетного множества отрезков, каждый из которых параллелен одной из координатных осей. Можно считать, что на том же множестве E выполнены условия (3.37) и (3.38) леммы 3.1, из которых, очевидно, следует, что ряд (3.36) для каждого фиксированного $(t, \tau) \in E$ удовлетворяет условию A_2 теоремы 1.2. Таким образом, оказывается, что ряд (3.36) для каждого фиксированного $(t, \tau) \in E$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2, рассмотренным для двойной системы

$$X_\mu(t, x) X_\nu(\tau, y), \mu \geq 1, \nu \geq 1.$$

Из теоремы 1.2 следует, что

$$c_{\mu\nu}(t, \tau) = \int_t^{t+1} \int_\tau^{\tau+1} f(x, y) X_\mu(t, x) X_\nu(\tau, y) dx dy \quad (3.76)$$

для всех $\mu, \nu \geq 1, (t, \tau) \in E$.

Пусть

$$b_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-2\pi i (nx + my)} dx dy \quad (3.77)$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$, фигурирующей в формулировке теоремы 3.1. Так как $b_{nm} \rightarrow 0$ при $|n| + |m| \rightarrow \infty$, то обозначив

$$Q_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{nm} e^{2\pi i nx} e^{2\pi i my}, \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} d_{\mu\nu}^{(\tau)}(t, \tau) &= \int_t^{t+1} \int_\tau^{\tau+1} Q_{\mu\nu}(x, y) X_\mu(t, x) X_\nu(\tau, y) dx dy = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{nm} a_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau), \end{aligned} \quad (3.79)$$

где $a_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau)$ определяются из равенств (3.19). Точно так же, как и для ряда (3.27), можем определить функцию

$$d_{\mu\nu}(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{nm} a_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau), \quad (3.80)$$

где $d_{\mu\nu}(t, \tau)$ — предел в метрике L_2 при $N \rightarrow \infty$ функций $d_{\mu\nu}^{(NN)}(t, \tau)$ или, что то же самое, сумма ряда правой части (3.80) в метрике L_2 . Сходимость этого ряда, как это было в случае ряда (3.27), следует из (3.20) — (3.26). Нетрудно убедиться, что

$$d_{\mu\nu}(t, \tau) = \int_t^{t+1} \int_{\tau}^{\tau+1} f(x, y) X_{\mu}(t, x) X_{\nu}(\tau, y) dx dy \quad (3.81)$$

всюду на некотором множестве $E_1 \subset [0, 1] \times [0, 1]$, $mE_1 = 1$, одновременно для всех $\mu \geq 1$, $\nu \geq 1$. В случае, когда $f(x, y) \in L_2([0, 1]^2)$ это немедленно следует из (3.79) и из того, что $Q_{NN}(x, y)$ при $N \rightarrow \infty$ сходится в метрике L_2 на квадрате $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$ к $f(x, y)$.

В общем случае, когда $f(x, y)$ — произвольная интегрируемая функция, будем рассматривать чезаровские средние ее ряда Фурье. Обозначив

$$P_{NN}(x, y) = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{\zeta=0}^N \sum_{s=0}^N Q_{\zeta s}(x, y), \quad (3.82)$$

$$D_{\mu\nu}^{(NN)}(t, \tau) = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{\zeta=0}^N \sum_{s=0}^N d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau),$$

имеем

$$D_{\mu\nu}^{(NN)}(t, \tau) = \int_t^{t+1} \int_{\tau}^{\tau+1} P_{NN}(x, y) X_{\mu}(t, x) X_{\nu}(\tau, y) dx dy. \quad (3.83)$$

Так как $P_{NN}(x, y)$ при $N \rightarrow \infty$ сходится на $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$ в метрике L_2 к $f(x, y)$, то правая часть (3.83) для любых (t, τ) сходится к правой части (3.81). Равенство (3.81) будет доказано, если мы покажем, что левая часть (3.83) при $N \rightarrow \infty$ сходится в метрике L_2 к $d_{\mu\nu}(t, \tau)$ на $[0, 1] \times [0, 1]$. Из (3.79) и (3.19) — (3.26) следует

$$d_{11}^{(\zeta s)}(t, \tau) = b_{00}, \quad \zeta \geq 1, s \geq 1, \quad (3.84)$$

$$d_{\mu 1}^{(\zeta s)}(t, \tau) = \max |X_{\mu}| \cdot \sum_{n=-\zeta}^{\zeta} \frac{b_{n0} \beta_{n\mu} e^{2\pi i n t}}{2\pi i n}, \quad \mu \geq 2, \quad (3.85)$$

$$d_{1\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau) = \max |X_{\nu}| \cdot \sum_{m=-s}^s \frac{b_{0m} \beta_{m\nu} e^{2\pi i m \tau}}{2\pi i m}, \quad \nu \geq 2, \quad (3.86)$$

$$d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau) = \max |X_{\mu}| \cdot |X_{\nu}| \sum_{n=-\zeta}^{\zeta} \sum_{m=-s}^s \frac{b_{nm} \beta_{n\mu} \beta_{m\nu}}{4\pi^2 n m} e^{2\pi i (nt + m\tau)} \quad (3.87)$$

для всех $\mu \geq 2$, $\nu \geq 2$, где числа $\beta_{n\mu}$, $\beta_{m\nu}$ определяются равенствами (3.41). Из (3.84) — (3.87) вытекает, что обозначив через $\|\varphi\|$ норму функции $\varphi(x, y)$ в $L_2([0, 1]^2)$ имеем

$$\begin{aligned} |d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau)| &\leq C, \quad \mu \geq 1, \nu \geq 1, \zeta \geq 0, s \geq 0, \\ \lim_{\zeta \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty} \|d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau)\| &= 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и N' выбрано так, что

$$\|d_{\mu\nu}^{(\zeta s)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau)\| < \varepsilon, \quad \zeta > N', \quad s > N'. \quad (3.89)$$

Тогда при $N > N'$ имеем

$$\begin{aligned} \|D_{\mu\nu}^{(N, N)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau)\| &\leq \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n=0}^{N'-1} \sum_{m=0}^N \|d_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau)\| + \\ &+ \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n=N'}^N \sum_{m=0}^{N'-1} \|d_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau)\| + \\ &+ \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n=N'}^N \sum_{m=N'}^N \|d_{\mu\nu}^{(nm)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau)\| \end{aligned} \quad (3.90)$$

и учитывая (3.88)–(3.89), получим

$$\|D_{\mu\nu}^{(N, N)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau)\| < \frac{4C \cdot N' \cdot N}{(N+1)^2} + \varepsilon, \quad N > N'. \quad (3.91)$$

Отсюда следует, что для некоторого N_0 имеем

$$\|D_{\mu\nu}^{(N, N)}(t, \tau) - d_{\mu\nu}(t, \tau)\| < 2\varepsilon, \quad n > N_0 \quad (3.92)$$

и, тем самым, равенство (3.81) доказано.

Сравнивая (3.81) с (3.76), получаем

$$c_{\mu\nu}(t, \tau) = d_{\mu\nu}(t, \tau), \quad \mu \geq 1, \quad \nu \geq 1 \quad (3.93)$$

почти всюду на $[0, 1] \times [0, 1]$.

Переходя к пределу в метрике L_2 в равенствах (3.84)–(3.87) при $\zeta \rightarrow \infty$, $s \rightarrow \infty$, получаем равенства

$$d_{11}(t, \tau) = b_{00}, \quad (3.94)$$

$$d_{\mu 1}(t, \tau) = \max |X_\mu| \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_{n0} \beta_{n\mu} e^{2\pi i n t}}{2\pi i n}, \quad \mu \geq 2, \quad (3.95)$$

$$d_{1\nu}(t, \tau) = \max |X_\nu| \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_{0m} \beta_{m\nu} e^{2\pi i m \tau}}{2\pi i m}, \quad \nu \geq 2, \quad (3.96)$$

$$d_{\mu\nu}(t, \tau) = \max |X_\mu \cdot X_\nu| \cdot \sum_n' \sum_m' - \frac{b_{nm} \beta_{n\mu} \beta_{m\nu} \cdot e^{2\pi i (nt + m\tau)}}{4\pi^2 nm}, \quad \mu, \nu \geq 2, \quad (3.97)$$

имеющие место почти для всех точек $(t, \tau) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Вспомним, что аналогичные равенства, с заменой чисел b_{nm} на a_{nm} , были установлены и для величин $c_{\mu\nu}(t, \tau)$ (очевидно, $c_{11}(t, \tau) = a_{00}$ и остается учесть равенства (3.39) и (3.40)). Так как коэффициенты a_{nm} и b_{nm} ограничены и, кроме того, согласно (3.41), ограничены также величины $\beta_{n\mu}$, $\beta_{m\nu}$, то все эти ряды сходятся в метрике $L_2([0, 1]^2)$ и тогда из равенств (3.93) получаем

$$a_{00} = b_{00}, \quad (3.98)$$

$$(a_{n0} - b_{n0}) \cdot \max |X_\mu| \cdot \beta_{n\mu} = 0, \quad |n| \geq 1, \quad \mu \geq 2, \quad (3.99)$$

$$(a_{0m} - b_{0m}) \cdot \max |X_\nu| \cdot \beta_{m\nu} = 0, \quad |m| \geq 1, \quad \nu \geq 2, \quad (3.100)$$

$$(a_{nm} - b_{nm}) \max |X_\mu| \cdot \max |X_\nu| \beta_{n\mu} \beta_{m\nu} = 0, \quad |n|, |m| \geq 1; \quad \mu, \nu \geq 2. \quad (3.101)$$

Теперь заметим (см. (3.41), (3.12) и определение системы Хаара X_n), что

$$\begin{aligned} \max |X_\mu| \cdot \beta_{n\mu} &= \sqrt{2^{k-1}} \left(\int_{2^{p-2}/2^k}^{2^{p-1}/2^k} e^{2\pi i n x} dx - \int_{2^{p-1}/2^k}^{2^{p/2^k}} e^{2\pi i n x} dx \right) = \\ &= 2\pi i n \int_0^1 e^{2\pi i n x} X_\mu(x) dx; \quad |n| \geq 1, \mu \geq 2. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Из (3.99)—(3.102) получаем

$$\int_0^1 (a_{n0} - b_{n0}) e^{2\pi i n x} X_\mu(x) dx = 0, \quad |n| \geq 1, \mu \geq 2, \quad (3.103)$$

$$\int_0^1 (a_{0m} - b_{0m}) e^{2\pi i m y} X_\nu(y) dy = 0, \quad |m| \geq 1, \nu \geq 2, \quad (3.104)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (a_{nm} - b_{nm}) e^{2\pi i n x} \cdot e^{2\pi i m y} X_\mu(x) X_\nu(y) dx dy = 0, \quad (3.105)$$

где $|n| \geq 1$, $|m| \geq 1$ и $\mu \geq 2$, $\nu \geq 2$.

Заметив, что равенства (3.103)—(3.105) выполняются также при значениях $\mu = 1$ или $\nu = 1$, из полноты системы Хаара $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ и двойной системы Хаара $X_\mu(x) X_\nu(y)$, $\mu \geq 1$, $\nu \geq 1$, заключаем, что почти всюду на $[0,1] \times [0,1]$ имеем

$$(a_{n0} - b_{n0}) e^{2\pi i n x} = 0, \quad |n| \geq 1, \quad (3.106)$$

$$(a_{0m} - b_{0m}) e^{2\pi i m y} = 0, \quad |m| \geq 1, \quad (3.107)$$

$$(a_{nm} - b_{nm}) e^{2\pi i (nx + my)} = 0, \quad |n| \geq 1, |m| \geq 1. \quad (3.108)$$

Из (3.106)—(3.108) немедленно следует, что $a_{nm} = b_{nm}$ при $|n| \geq 1$ или $|m| \geq 1$. Учитывая также (3.98) и (3.77), получаем

$$a_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{2\pi i (nx + my)} dx dy. \quad (3.109)$$

Теорема 3.1 доказана.

Из теоремы 3.1 немедленно следует

Теорема 3.2. Пусть тригонометрический ряд (3.1) удовлетворяет условиям (3.2)—(3.4), $F(x, y)$ определена равенством (3.6) и $f(x, y)$ непериодическая, с периодом 1 по обоим переменным, конечная суммируемая функция. Пусть, далее, существуют последовательности натуральных чисел $k_j \uparrow +\infty$, $l_j \uparrow +\infty$ такие, что функции

$$\begin{aligned} \Phi_{k_j l_j}(t, \tau, x, y) &= 2^{k_j} 2^{l_j} [F(t + p 2^{-k_j}, \tau + q 2^{-l_j}) + F(t + (p-1) 2^{-k_j}, \\ &\tau + (q-1) 2^{-l_j}) - F(t + p 2^{-k_j}, \tau + (q-1) 2^{-l_j}) - \\ &- F(t + (p-1) 2^{-k_j}, \tau + q 2^{-l_j})], \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$(x, y) \in (t + p - 1/2^k, t + p/2^k) \times (\tau + q - 1/2^l, \tau + q/2^l), \\ 1 \leq p \leq 2^k, 1 \leq q \leq 2^l \quad (3.111)$$

для почти всех $(t, \tau) \in [0, 1] \times [0, 1]$ при $j \rightarrow \infty$ сходятся к $f(x, y)$ всюду на $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, кроме, быть может, точек (x, y) , принадлежащих некоторому множеству $E_j \subset [t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, состоящему из счетного числа отрезков, параллельных координатным осям.

Тогда ряд (3.3) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.

Приведенные в конце доказательства теоремы 3.1 рассуждения, в частности, полученное равенство (3.81), фактически означают, что введенный метод суммирования Лебега по случайным сетям в классе рядов Фурье в некотором смысле регулярен. Точнее верна следующая

Теорема 3.3. Пусть $f(x, y)$ — суммируемая на $[0, 1] \times [0, 1]$ периодическая, с периодом 1 по каждой переменной, функция //

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{nm} e^{2\pi i n x} e^{2\pi i m y} \quad (3.112)$$

—ее ряд Фурье. Обозначим

$$F(x, y) = b_{00}xy + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{y b_{n0} e^{2\pi i n x}}{2\pi i n} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x b_{0m} e^{2\pi i m y}}{2\pi i m} + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} - \frac{b_{nm} e^{2\pi i n x} \cdot e^{2\pi i m y}}{4\pi^2 n m}, \quad (3.113)$$

$$\Phi_{kk}(t, \tau, x, y) = 2^{2k} [F(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-k}) + F(t + (p-1)2^{-k}, \\ \tau + (q-1)2^{-k}) - F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-k}) - \\ - F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + q2^{-k})], \quad (3.114)$$

$$(x, y) \in (t + (p-1)2^{-k}, t + p2^{-k}) \times (\tau + (q-1)2^{-k}, \tau + q2^{-k}), \\ 1 \leq p, q \leq 2^k. \quad (3.115)$$

Тогда для почти всех точек (t, τ) последовательность $\Phi_{kk}(t, \tau, x, y)$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к $f(x, y)$ во всех точках $(x, y) \in (t, t+1) \times (\tau, \tau+1)$, не принадлежащих некоторому множеству $E_k \subset [t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, состоящему из счетного числа параллельных осей прямых, в которых неопределенный интеграл функции f ограниченно дифференцируемо к значению $f(x, y)$.

Доказательство. Заметим, что для почти всех (t, τ)

$$\sum_{\mu=1}^{2^k} \sum_{\nu=1}^{2^k} d_{\mu\nu}(t, \tau) X_{\mu}(t, x) X_{\nu}(\tau, y) = \Phi_{kk}(t, \tau, x, y), \quad (3.116)$$

если (x, y) удовлетворяет (3.115), где $d_{\mu\nu}(t, \tau)$ определены равенствами (3.80) (см. (3.27) и (3.34)).

Из (3.116) и (3.81) следует, что

$$\Phi_{kk}(t, \tau, x, y) = 1/2^{-k} \cdot 2^{-k} \int_{t+(p-1)2^{-k}}^{t+p2^{-k}} \int_{\tau+(q-1)2^{-k}}^{\tau+q2^{-k}} f(x, y) dx dy \quad (3.117)$$

для почти всех (t, τ) и (x, y) из (3.115).

Если

$$x_0 \neq t + p2^{-k}, y_0 \neq \tau + q2^{-l}, k, l > 0, 1 \leq p \leq 2^k, 1 \leq q \leq 2^l \quad (3.118)$$

и неопределенный интеграл функции $f(x, y)$ ограниченно дифференцируем в точке (x_0, y_0) к $f(x_0, y_0)$ (определение ограниченной дифференцируемости см. [9], стр. 459) из (3.117) получим

$$\Phi_{kk}(t, \tau, x_0, y_0) \rightarrow f(x_0, y_0) \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

В следующем параграфе приводятся некоторые новые теоремы единственности двойных тригонометрических рядов, в формулировке которых фигурируют понятие равномерной сходимости в точке или более общие понятия такого рода.

§ 4. Некоторые теоремы единственности двойных тригонометрических рядов, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм

Теорема 4.1. Пусть $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — множество, состоящее из не более, чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков, и $f(x, y)$ — интегрируемая по Лебегу на $[0, 1] \times [0, 1]$ конечная на $[0, 1] \times [0, 1] \setminus E$ периодическая, с периодом 1 по каждой переменной, функция.

Пусть тригонометрический ряд (3.1) с условиями (3.2)–(3.4) обладает тем свойством, что для любой точки $(x_0, y_0) \in (0, 1) \times (0, 1) \setminus E$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют открытый прямоугольник $\Delta = \delta_1 \times \delta_2$, $\Delta \subset (0, 1) \times (0, 1)$, $\Delta \ni (x_0, y_0)$ и возрастающие последовательности $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$ при $j \rightarrow \infty$ натуральных чисел (зависящих, вообще говоря, от (x_0, y_0) , ε и Δ), удовлетворяющих условию

$$|\Sigma_{N_j M_j}(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, (x, y) \in \Delta, j \geq 1, \quad (4.1)$$

где Σ_{MN} — прямоугольные частичные суммы ряда (3.1).

Тогда ряд (3.1) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.

Доказательство. Как было замечено в предыдущем параграфе (см. (3.28)–(3.33)), величины

$$B_{NM}^{(k, l, p, q)}(t, \tau) = 2^k \cdot 2^l \int_{t+(p-1)2^{-k}}^{t+p2^{-k}} \int_{\tau+(q-1)2^{-l}}^{\tau+q2^{-l}} \Sigma_{NM}(x, y) dx dy \quad (4.2)$$

как функции от (t, τ) при фиксированных k, l, p, q , $1 \leq p \leq 2^k$, $1 \leq q \leq 2^l$, при стремлении к бесконечности индексов N и M , сходятся в метрике L_2 на $[0, 1] \times [0, 1]$ к величине

$$2^k 2^l [F(t + p2^{-k}, \tau + q2^{-l}) + F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l}) - F(t + p2^{-k}, \tau + (q-1)2^{-l}) - F(t + (p-1)2^{-k}, \tau + q2^{-l})]. \quad (4.3)$$

С другой стороны, как легко видеть (см. (3.28), (3.31)–(3.33))

$$B_{NM}^{(k, l, p, q)}(t, \tau) = a_{00} + 2^k \sum_{n=-N}^N \frac{a_{n0} a_{kp}^{(n)} e^{2\pi i n t}}{2\pi i n} +$$

$$+ 2^l \sum_{m=-M}^M \frac{a_{0m}^{(n)} e^{2\pi i m \tau}}{2\pi i m} - \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M \frac{a_{nm}^{(n)} a_{kp}^{(m)} e^{2\pi i (n\tau + m\tau)}}{4\pi^2 nm}, \quad (4.4)$$

где

$$a_{kp}^{(n)} = e^{2\pi i n p 2^{-k}} - e^{2\pi i n (p-1) 2^{-k}}. \quad (4.5)$$

Из ограниченности a_{nm} и $a_{kp}^{(n)}$ и из того, что $\log(n+2) \log(m+2)$, $n, m \geq 1$ является множителем Вейля для сходимости почти всюду прямоугольных частичных сумм двойного тригонометрического ряда, следует, что правая часть (4.4) при $N, M \rightarrow \infty$ почти всюду на $[0,1] \times [0,1]$ сходится к величине (4.3). Отсюда вытекает существование множества $A \subset [0,1] \times [0,1]$, имеющего полную плоскую меру $mA=1$, такого, что для любой точки $(t, \tau) \in A$ величины (4.2) при $N, M \rightarrow \infty$ сходятся к величине (4.3) одновременно для всех k, l, p, q .

Теперь заметим, что каждой точке $(t, \tau) \in A$, в силу периодичности, соответствует множество $E_{t,\tau} \subset [t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, состоящее из не более чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков, такое, что если

$$(x_0, y_0) \in (t, t+1) \times (\tau, \tau+1) \setminus E_{t,\tau},$$

$$x_0 \neq t + p 2^{-k}, y_0 \neq \tau + q 2^{-l}, k > 0, l > 0, 1 \leq p \leq 2^k, 1 \leq q \leq 2^l, \quad (4.6)$$

то для $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $\Delta \ni (x_0, y_0)$, $\Delta \subset (t, t+1) \times (\tau, \tau+1)$ и частичные суммы $\Sigma_{N_j, M_j}(x, y)$, $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$ такие, что

$$|\Sigma_{N_j, M_j}(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, (x, y) \in \Delta, j \geq 1. \quad (4.7)$$

Для заданных k и l обозначим через p' и q' те значения p и q , для которых

$$(x_0, y_0) \in (t + (p'-1) 2^{-k}, t + p' 2^{-k}) \times (\tau + q' 2^{-l}, \tau + q' 2^{-l}). \quad (4.8)$$

Тогда для достаточно большого k_0 , при $k > k_0$ и $l > k_0$ интервал правой части (4.8) будет вложен в интервал Δ . Из (4.7) и теоремы о среднем значении интеграла получим

$$\left| 2^k 2^l \int_{t+(p'-1)2^{-k}}^{t+p'2^{-k}} \int_{\tau+(q'-1)2^{-l}}^{\tau+q'2^{-l}} \Sigma_{N_j, M_j}(x, y) dx dy - f(x_0, y_0) \right| < \varepsilon, j \geq 1, \quad (4.9)$$

которое имеет место для всех $k > k_0$, $l > k_0$ и p', q' , удовлетворяющих (4.8). Переходя к пределу в (4.9) при $j \rightarrow \infty$ и учитывая обозначение (3.110), имеем

$$|\Phi_{kl}(t, \tau, x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, k > k_0, l > l_0. \quad (4.10)$$

Обозначив через $E'_{t,\tau}$, $(t, \tau) \in A$, объединение множества $E_{t,\tau}$ и счетного числа отрезков, проходящих через точки $t + p 2^{-k}$, $\tau + q 2^{-l}$, $k \geq 0$, $l > 0$, $1 \leq p \leq 2^k$, $1 \leq q \leq 2^l$, которые параллельны координатным осям, заметим, что для любой точки $(x_0, y_0) \in (t, t+1) \times (\tau, \tau+1) \setminus E'_{t,\tau}$ выполняется (4.10).

Таким образом, для любой точки $(t, \tau) \in A$ существует множество $E'_{t,\tau} \subset (t, t+1) \times (\tau, \tau+1)$ такое, что для любой точки $(x, y) \in (t, t+1) \times (\tau, \tau+1) \setminus E'_{t,\tau}$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty} \Phi_{kl}(t, \tau, x, y) = f(x, y). \quad (4.11)$$

Отсюда следует, что условия теоремы 3.2 выполнены и, следовательно, ряд (3.1) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$. Теорема 4.1 доказана.

Аналогичную теорему можно доказать, рассматривая вместо прямоугольных частичных сумм ряда (3.1) его абелевы средние

$$A_u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{nm} e^{2\pi i(n x + m y)} = e^{-u \sqrt{n^2 + m^2}}. \quad (4.12)$$

Теорема 4.2. Пусть $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — множество, состоящее из не более чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков, и $f(x, y)$ — интегрируемая на $[0, 1] \times [0, 1]$, периодическая с периодом 1 по обоим переменным, конечная функция. Пусть для каждой точки $(x_0, y_0) \in (0, 1) \times (0, 1) \setminus E$ и $\varepsilon > 0$ существуют интервал $\Delta \subset (0, 1) \times (0, 1)$, $\Delta \ni (x_0, y_0)$ и последовательность $n_j \downarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ такие, что

$$|A_{u_j}(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad (x, y) \in \Delta, \quad j > 1, \quad (4.13)$$

где $A_u(x, y)$ — абелевы средние ряда (3.1), удовлетворяющего условиям (3.2)—(3.4).

Тогда ряд (3.1) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.

Доказательство. Как легко видеть

$$\begin{aligned} 2^{k+l} \int_{t+(p-1)2^{-k}}^{t+p2^{-k}} \int_{\tau+(q-1)2^{-l}}^{\tau+q2^{-l}} A_u(x, y) dx dy &= a_{00} + \\ &+ 2^k \sum_n' \frac{a_{n0} (\Delta_{kp} e^{2\pi i n x}) e^{2\pi i n t - u|n|}}{2\pi i n} + \\ &+ 2^l \sum_m' \frac{a_{0m} (\Delta_{lq} e^{2\pi i m y}) \cdot e^{2\pi i m \tau - u|m|}}{2\pi i m} + \frac{2^k 2^l}{4\pi^2} \times \\ &\times \sum_n' \sum_m' \frac{a_{nm} (\Delta_{kp} e^{2\pi i n x}) (\Delta_{lq} e^{2\pi i m y}) e^{2\pi i(n x + m y) - u\sqrt{n^2 + m^2}}}{nm}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$\Delta_{kp} e^{2\pi i n x} = e^{2\pi i p 2^{-k}} - e^{2\pi i (p-1) 2^{-k}}, \quad (4.15)$$

$$\Delta_{lq} e^{2\pi i m y} = e^{2\pi i m q 2^{-l}} - e^{2\pi i m (q-1) 2^{-l}}. \quad (4.16)$$

Из (4.14)—(4.16) (см. также (3.35)) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} 2^{k+l} \int_{t+(p-1)2^{-k}}^{t+p2^{-k}} \int_{\tau+(q-1)2^{-l}}^{\tau+q2^{-l}} A_u(x, y) dx dy &= 2^{k+l} [F(t+p2^{-k}, \tau+q2^{-l}) + \\ &+ F(t+(p-1)2^{-k}, \tau+(q-1)2^{-l}) - F(t+p2^{-k}, \tau+(q-1)2^{-l}) - \\ &- F(t+(p-1)2^{-k}, \tau+q2^{-l})] \end{aligned} \quad (4.17)$$

почти для всех $(t, \tau) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Таким образом, существует множество $E \subset [0,1] \times [0,1]$, $mE=1$, такое, что для каждой точки $(t, \tau) \in E$ равенство (4.17) имеет место одновременно для всех k, l , $1 \leq p \leq 2^k$, $1 \leq q \leq 2^l$.

Пусть теперь $(t, \tau) \in E$. В силу периодичности существует множество $E_{kl} \subset (t, t+1) \times (\tau, \tau+1)$, состоящее из не более чем счетного числа параллельных координатным осям прямых, такое, что для любой точки $(x_0, y_0) \in (t, t+1) \times (\tau, \tau+1) \setminus E_{kl}$ выполняется условие (4.13). Если $x_0 \neq t + p2^{-k}$, $y_0 \neq \tau + q2^{-l}$, $k > 0$, $l \geq 0$, $1 \leq p \leq 2^k$, $1 \leq q \leq 2^l$ и для каждого k, l выбираются p' и q' такие, что

$$(x_0, y_0) \in (t + (p' - 1)2^{-k}, t + p'2^{-k}) \times (\tau + (q' - 1)2^{-l}, \tau + q'2^{-l}), \quad (4.18)$$

то для некоторых k_0 и l_0 при $k > k_0$ и $l > l_0$ интервал правой части (4.18) будет содержаться внутри интервала Δ , для которого выполнены (4.13). Заметив, что правая часть (4.17) при $p = p'$ и $q = q'$ совпадает со значением $\Phi_{kl}(t, \tau, x, y)$ и, что

$$\left| 2^k 2^l \int_{t+(p'-1)2^{-k}}^{t+p'2^{-k}} \int_{\tau+(q'-1)2^{-l}}^{\tau+q'2^{-l}} A_{kl}(x, y) dx dy - f(x_0, y_0) \right| < \varepsilon, \quad j \geq 1, \quad (4.19)$$

при $k > k_0$, $l > l_0$, согласно теореме о среднем значении, переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, из (4.19) получим

$$|\Phi_{kl}(t, \tau, x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{при } k > k_0, \quad l > l_0. \quad (4.20)$$

Отсюда, согласно теореме 3.2, следует справедливость теоремы 4.2.

Замечание 4.1. Условия (3.2) и (3.3) на коэффициенты ряда (3.1) окончательны, так как при нарушении этих условий, хотя бы при одном из значений n, m утверждение теоремы 4.3 не верно. Это видно на примере ряда

$$\sum_n \sum_m a_{nm} e^{2\pi i n x} e^{2\pi i m y}, \quad (4.21)$$

где $a_{n0} = 1/2$, $|n| \geq 0$ и $a_{nm} = 0$ для остальных n, m , который суммируется методом Абеля к нулю равномерно на любом прямоугольнике $[\delta, 1 - \delta] \times [0, 1]$, $\delta > 0$ (тем самым, ряд равномерно суммируется методом Абеля к нулю в окрестностях точек, не принадлежащих отрезкам $\{(0, y), 0 \leq y < 1\}$, $\{(1, y), 0 \leq y < 1\}$, и, вместе с тем, не все коэффициенты a_{nm} равны нулю.

Замечание 4.2. Применение теоремы 4.3 и сформулированной ниже очень интересной леммы В. Шапиро ([7], лемма 3) позволяет доказать некоторые известные факты из теории единственности двойных тригонометрических рядов более простым способом.

Лемма (Шапиро). Пусть двойной тригонометрический ряд

$$\sum_N a_N e^{i(N \cdot z)}, \quad N = (n, m), \quad z = (x, y), \quad (N \cdot z) = nx + my,$$

обладает свойствами

$$a_N = \bar{a}_{-N}, \quad |a_N| = o(1) \quad \text{при } |N| = \sqrt{n^2 + m^2} \rightarrow \infty, \quad (4.22)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sup_N |\sum_N a_N e^{2\pi i (N \cdot z) - l |N|}| < +\infty, \quad z \in B(z_0, h), \quad (4.23)$$

где $B(z_0, h)$ — круг радиуса h с центром в z_0 ,

$$\lim_{l \rightarrow 0} \sum_N a_N e^{2\pi i (N \cdot z) - l |N|} = 0 \quad (4.24)$$

почти всюду на $B(z_0, h)$.

Тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_N a_N e^{2\pi i (N \cdot z) - l |N|} = 0 \quad (4.25)$$

равномерно в круге $B(x_0, n/2)$.

Из этой леммы и из теоремы 4.2 немедленно следует, что если $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — замкнутое множество, состоящее из счетного числа параллельных координатным осям отрезков и двойной тригонометрический ряд $\sum_N a_N e^{2\pi i (N \cdot z)}$ с условием (4.32) суммируется методом Абеля к нулю для всех $z \in (0, 1) \times (0, 1) \setminus E$, то все его коэффициенты равны нулю.

Заметим, что это утверждение немедленно следует также из теорем 2 и 3 работы [7], в доказательстве которых помимо указанной леммы применяется ряд других лемм о свойствах формальных произведений двойных тригонометрических рядов.

Приводимые ниже теоремы 4.3 и 4.4, сформулированные в терминах понятия равномерной сходимости в точке (см. [9], стр. 100), являются следствиями теорем 4.2 и 4.3.

О п р е д е л е н и е 4.1. Последовательность функций $s_n(x)$, определенных в окрестности точки x_0 и сходящаяся при $x = x_0$ (но не обязательно при $x \neq x_0$) называется сходящейся равномерно в точке x_0 к пределу s , если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $p = p(\varepsilon)$ такие, что

$$|s_n(x) - s| < \varepsilon \text{ при } |x - x_0| < \delta \text{ и } n > p. \quad (4.26)$$

Теорема 4.3. Пусть $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — множество, состоящее из не более чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков, и $f(x, y)$ — конечная интегрируемая на $[0, 1] \times [0, 1]$ периодическая, с периодом 1 по обоим переменным, функция. Пусть, далее, тригонометрический ряд (3.1) удовлетворяет условиям (3.2)–(3.4) и, кроме того, для каждой точки $(x_0, y_0) \in (0, 1) \times (0, 1) \setminus E$ существует зависящая от точки последовательность его прямоугольных частичных сумм $\Sigma_{N_j, M_j}(x, y)$ $N_j \uparrow +\infty$, $M_j \uparrow +\infty$ при $j \rightarrow \infty$, которая сходится к $f(x_0, y_0)$ равномерно в точке (x_0, y_0) .

Тогда ряд (3.1) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.

Теорема 4.4. Пусть множество $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ состоит из не более чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков, и $f(x, y)$ — конечная периодическая, с периодом 1 по обоим переменным, интегрируемая на $[0, 1] \times [0, 1]$ функция.

Пусть, далее, для каждой точки $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1] \setminus E$ существует зависящая от точки (x_0, y_0) последовательность средних Абеля $A_{ij}(x, y)$, $i, j \downarrow 0$, при $j \rightarrow \infty$, ряда (3.1) с условиями (3.2)–(3.4), которая сходится к значению $f(x_0, y_0)$ равномерно в точке (x_0, y_0) .

Тогда ряд (3.1) является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.

§ 5. О единственности двойных тригонометрических рядов с лакунами

Рассматриваются тригонометрические ряды (3.1) с условиями (3.2)—(3.4). Для натурального N обозначим через Q_N множество коэффициентов a_{nm} ряда (3.1), участвующих в его квадратичной частичной сумме $\Sigma_{NN}(x, y)$.

Определение 5.1. Будем говорить, что двойной тригонометрический ряд содержит лакуны порядка x^l , l — целое, если существуют последовательности натуральных чисел $N_j \uparrow + \infty$, $M_j \uparrow + \infty$, $M_j > N_j$ таких, что

$$M_j > C(N_j)^l, j \geq 1, \quad (5.1)$$

$$a_{nm} = 0 \text{ при } a_{nm} \in Q_{M_j} \setminus Q_{N_j}, j \geq 1. \quad (5.2)$$

Доказывается следующая

Теорема 5.1. Пусть тригонометрический ряд (3.1) с условиями (3.2)—(3.4) содержит лакуны порядка x^{20} и последовательности $N_j \uparrow + \infty$, $M_j \uparrow + \infty$ выбраны таким образом, что выполнено условие (5.2) и

$$M_j > C(N_j)^{20}. \quad (5.3)$$

Пусть, далее, $f(x, y)$ — интегрируемая на $[0, 1] \times [0, 1]$ периодическая, с периодом 1 по каждой переменной, функция и последовательность частичных сумм $\Sigma_{N_j M_j}(x, y)$ указанного ряда сходится по мере на $[0, 1] \times [0, 1]$ к $f(x, y)$.

Тогда, если условие

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup |\Sigma_{N_j M_j}(x, y)| < +\infty \quad (5.4)$$

выполнено для всех $(x, y) \in [\bar{0}, 1] \times [0, 1]$, не принадлежащих некоторому множеству, состоящему из счетного числа параллельных координатным осям отрезков, то указанный ряд является рядом Фурье—Лебега функции $f(x, y)$.

Доказательство. Обозначив через

$$\begin{aligned} B_{NN}^{(k, p, q)}(t, \tau) = & a_0 + 2^k \sum_{n=-N}^N \frac{a_{n0}}{2^{\pi i n}} (e^{2\pi i n p 2^{-k}} - e^{2\pi i n (p-1) 2^{-k}}) e^{2\pi i n t} + \\ & + 2^k \sum_{m=-N}^N \frac{a_{0m}}{2^{\pi i m}} (e^{2\pi i m q 2^{-k}} - e^{2\pi i m (q-1) 2^{-k}}) e^{2\pi i m \tau} + 2^{2k}/4\pi^2 \times \\ & \times \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \frac{a_{nm}}{\pi m} (e^{2\pi i n p 2^{-k}} - e^{2\pi i n (p-1) 2^{-k}}) (e^{2\pi i m q 2^{-k}} - \\ & - e^{2\pi i m (q-1) 2^{-k}}) e^{2\pi i (nt + m\tau)} \end{aligned}$$

N -ую квадратичную сумму ряда (3.35) и учитывая равенства (3.28) и (3.31), простой оценкой с применением теоремы о среднем значении интеграла и теоремы Лагранжа, получим

$$|B_{NN}^{(k,p,q)}(t, \tau) - \Sigma_{NN}(x, y)| < C_1 N^3 2^{-k} \quad (5.5)$$

для всех (t, τ) , $k \geq 1$, $1 \leq p \leq 2^k$, $1 \leq q \leq 2^k$ и

$$(x, y) \in (t + (p-1)2^{-k}, t + p2^{-k}) \times (\tau + (q-1)2^{-k}, \tau + q2^{-k}). \quad (5.6)$$

Обозначив через $R_{NN}^{(k,p,q)}(t, \tau)$ сумму в метрике $L_2([0,1]^2)$ остальных членов ряда (3.35), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 R_{NN}^{(k,p,q)}(t, \tau)^2 dt d\tau \leq \\ & \leq C 2^{2k} \sum_{|n| > N} \frac{|a_{nt}|^2}{n^2} + C 2^{2k} \sum_{|m| > N} \frac{|a_{0m}|^2}{m^2} + \\ & + C 2^{4k} \left(\sum'_{|n| > N} \sum_{|m| > N} \frac{|a_{nm}|^2}{n^2 m^2} + \sum_{|n| > N} \sum_{|m| < N} \frac{|a_{nm}|^2}{n^2 m^2} \right) + \\ & + C 2^{4k} \sum_{|n| > N} \sum_{|m| > N} \frac{|a_{nm}|^2}{n^2 m^2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из (5.6), учитывая ограниченность коэффициентов a_{nm} , после простых оценок получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 (R_{NN}^{(k,p,q)}(t, \tau))^2 dt d\tau \leq C_2 2^{4k} \cdot 1/N. \quad (5.8)$$

Постоянные C_1 и C_2 в оценках (5.5) и (5.8) зависят только от максимума модулей коэффициентов a_{nm} . Из (5.8) получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 \sum_{p=1}^{2^k} \sum_{q=1}^{2^k} (R_{NN}^{(k,p,q)}(t, \tau))^2 dt d\tau \leq C_2 2^{6k} \cdot 1/N. \quad (5.9)$$

Пусть $\{N_j\}$, $\{M_j\}$ — последовательности, удовлетворяющие условиям теоремы 1.5. Пусть k_j , $j \geq 1$ выбраны так, что

$$2^{k_j-1} \leq j(N_j)^3 \leq 2^{k_j}. \quad (5.10)$$

Тогда из неравенств (5.3), (5.9) и (5.10) следует

$$\int_0^1 \int_0^1 \sum_{p=1}^{2^{k_j}} \sum_{q=1}^{2^{k_j}} (R_{M_j M_j}^{(k_j,p,q)}(t, \tau))^2 dt d\tau < \frac{C_2 (2jN_j^3)^{6k_j}}{C (N_j)^{20}} < C_3 / N_j^2. \quad (5.11)$$

Из (5.11) вытекает существование множества $A \subset [0, 1] \times [0, 1]$ полной плоской меры $mA = 1$, на которой

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{2^{k_j}} \sum_{q=1}^{2^{k_j}} (R_{M_j M_j}^{(k_j,p,q)}(t, \tau))^2 = 0, \quad (t, \tau) \in A. \quad (5.12)$$

С другой стороны, из неравенств (5.5) и (5.10) следует

$$|B_{N_j N_j}^{(k_j,p,q)}(t, \tau) - \Sigma_{N_j N_j}(x, y)| < C_1 / j \quad (5.13)$$

для всех (t, τ) и всех $j \geq 1$, $1 \leq p \leq 2^{k_j}$, $1 \leq q \leq 2^{k_j}$, если

$$(x, y) \in (t + (p-1)2^{-k_j}, t + p2^{-k_j}) \times (\tau + (q-1)2^{-k_j}, \tau + q2^{-k_j}). \quad (5.14)$$

Из (5.2) и (3.35) следует, что почти для всех (t, τ)

$$\begin{aligned} & 2^{k_j+l_j} [F(t + p2^{-k_j}, \tau + q2^{-k_j}) + F(t + (p-1)2^{-k_j}, \tau + (q-1)2^{-k_j}) - \\ & - F(t + p2^{-k_j}, \tau + (q-1)2^{-k_j}) - F(t + (p-1)2^{-k_j}, \tau + q2^{-k_j})] = \\ & = B_{N_j N_j}^{(k_j, p, q)}(t, \tau) + R_{M_j M_j}^{(k_j, p, q)}(t, \tau); \quad j > 1, 1 \leq p, q \leq 2^{k_j}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Мы можем считать, что равенство (5.15) выполнено для всех

$$(t, \tau) \in A_1, \text{ где } A_1 \subset A, mA_1 = mA = 1.$$

Из (5.13), (5.15) и определения функций $\Phi_{k_j k_j}(t, \tau, x, y)$ (см. (3.110)) следует, что если $(t, \tau) \in A_1$, то

$$|\Phi_{k_j k_j}(t, \tau, x, y) - \Sigma_{N_j N_j}(x, y)| < C_1/j + |R_{M_j M_j}^{(k_j, p, q)}(t, \tau)| \quad (5.16)$$

для всех $(x, y) \in (t, t+1) \times (\tau, \tau+1)$, $x \neq t + p2^{-k}$, $y \neq \tau + q2^{-l}$, $k, l \geq 0$, $1 \leq p \leq 2^k$, $1 \leq q \leq 2^l$. Фиксируя точку (x, y) и обозначив через p_j и q_j те значения p и q , для которых выполнены (5.14), получаем

$$|\Phi_{k_j k_j}(t, \tau, x, y) - \Sigma_{N_j N_j}(x, y)| < C_1/j + |R_{M_j M_j}^{(k_j, p_j, q_j)}(t, \tau)|. \quad (5.17)$$

Теперь заметим, что из (5.12) следует

$$\lim_{j \rightarrow \infty} R_{M_j M_j}^{(k_j, p_j, q_j)}(t, \tau) = 0, \quad (t, \tau) \in A_1. \quad (5.18)$$

Так как, согласно условиям теоремы, последовательность $\Sigma_{N_j N_j}(x, y)$ сходится к $f(x, y)$ на любом квадрате $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$, $(t, \tau) \in A_1$ по мере, то из (5.17) и (5.8) следует, что для любой точки $(t, \tau) \in A_1$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{k_j k_j}(t, \tau, x, y) = f(x, y) \quad (5.19)$$

по мере на $[t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$.

С другой стороны, из (5.17) и условия (5.4) следует, что для всех $(t, \tau) \in A_1$ неравенство

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |\Phi_{k_j k_j}(t, \tau, x, y)| < +\infty \quad (5.20)$$

выполнено для всех $(x, y) \in (t, t+1) \times (\tau, \tau+1) - E$, где $E \subset [t, t+1] \times [\tau, \tau+1]$ — множество, состоящее из не более чем счетного числа параллельных координатным осям отрезков. Из теоремы 3.1 следует, что фигурирующий в формулировке теоремы 1.5 ряд является рядом Фурье — Лебега функции $f(x, y)$. Теорема 1.5 доказана.

В заключение отметим, что все доказанные в настоящей работе теоремы с соответствующими аналогичными формулировками можно распространить на m -кратные тригонометрические ряды.

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Կրկնակի եռանկյունաչափական շարքերի միակության մասին (ամփոփում)

Իրաարկվում են

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} e^{2\pi i n x} e^{2\pi i m y}, \quad a_{nm} = \overline{a_{-n, -m}} \quad (1).$$

եռանկյունաչափական շարքերը, որտեղ

$$|a_{nm}| \leq M, \quad \forall n, m; \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} a_{nm} = 0, \quad \forall m; \quad \lim_{|m| \rightarrow \infty} a_{nm} = 0, \quad \forall n: \quad (2).$$

Ապացուցվում է, որ եթե (2) պայմանին բավարարող (1) շարքը դամարվում է Լեբեգի մեթոդով, որում ածանցյալ հարաբերությունները վերցված են պատահական երկրական հանգույցների վրա, վերջավոր և ինտեգրելի $f(x, y)$ ֆունկցիային, ապա այն $f(x, y)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն է:

Այդ արդյունքից ստացվում է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. Դիցուք E -ն փակ բազմություն է, որը կազմված է կոորդինատների առանցքներին զուգահեռ հաշվելի թվով ուղիղներից և $f(x, y)$ -ը $T_2 = (0,1) \times (0,1)$ քառակուսու վրա որոշված վերջավոր ինտեգրելի ֆունկցիա է:

Այդ դեպքում, եթե (2) պայմանին բավարարող (1) շարքը Արելի մեթոդով հավասարաչափ դամարվում է $f(x, y)$ -ին յուրաքանչյուր $F, F \subset T_2$, կոմպակտի վրա, ապա այն $f(x, y)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն է:

A. A. TALALJAN. On the uniqueness of double trigonometric series (summary)

Consider the trigonometric series

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} e^{2\pi i n x} e^{2\pi i m y}, \quad a_{nm} = \overline{a_{-n, -m}}, \quad (1)$$

with

$$|a_{nm}| \leq M, \quad \forall n, m; \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} a_{nm} = 0, \quad \forall m; \quad \lim_{|m| \rightarrow \infty} a_{nm} = 0, \quad \forall n, \quad (2)$$

We prove that if the series (1) with conditions (2) and the knots of derivative ratio taken from the random dyadic lattice, is Lebesgue summable to a finite integrable function $f(x, y)$, then it is the Fourier series of that function.

From this result we derive

Theorem. Let E be a closed set in the plane consisting of countable number of lines, which are parallel to one of the coordinate axes. Let a function $f(x, y)$ be finite and integrable on the $T_2 = (0,1) \times (0,1)$.

If the series (1) with conditions (2) is Abel summable to the function $f(x, y)$, uniformly on every compact $F, F \subset T_2 \setminus E$, then it is the Fourier series of $f(x, y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Փ. Գ. Арутюнян, А. А. Талалян. О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28:61, 1964, 1391—1408.
2. J. Ash. Mand Welland C. V, Convergence, summability and uniqueness of multiple trigonometric series, Trans. Amer. Math. Soc., 163, 1972, 401—445.
3. Х. О. Мовсисян. О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 9:1, 1974, 40—61.
4. В. А. Скворцов. О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм, Матем. заметки, 4, вып. 6, 1968, 707—714.
5. В. А. Скворцов. О множествах единственности для многомерных рядов Хаара, Матем. заметки, 14, вып. 6, 1973, 789—798.
6. V. L. Shapiro. Uniqueness of multiple trigonometric series, Ann. Math., 66, № 3, 1957, 467—480.
7. V. L. Shapiro. Sets of uniqueness on the 2-Torus, Trans. of the Amer. Math. Soc., 165, 1972, 127—147.
8. W. Willmar, R. Wade. A uniqueness theorem for Haar and Walsch series, Trans. Amer. Math. Soc., 141, 1969, 187—194.
9. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, Изд. «Мир», М., 1968.