ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 6, 1985 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН

СВОЙСТВО БЛИЗОСТИ a-ТОЧЕК МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, И СТРУКТУРА ОДНОЛИСТНЫХ ОБЛАСТЕЙ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(продолжение)*

§ 3. п. 1 Построение областей $B_l(n, \cup D_m(i))$ и $B_l'(n, \cup D_m(i))$ и их свойства

Обозначим через d_m^+ ту из двух дуг больших окружностей, являющихся граничной дугой области $\tilde{B}_m(n)$, которая ближе к области $\tilde{B}_{m+1}(n)$; d_m^- — ту из двух дуг больших окружностей, являющихся граничной дугой области $\tilde{B}_{m+1}(n)$, которая ближе к области $\tilde{B}_m(n)$. Концы кривых d_m^+ и d_m^- лежат на кривых Γ'' и Γ' и делят каждую из кривых Γ'' и Γ' на три части. Обозначим $\dot{d}_m$ среднюю из трех дуг, на которые делится кривая Γ''; $\dot{d}_m$ — среднюю из трех дуг, на которые делится кривая Γ'.

Пусть D_m, $(m = -\tau^{**}, -\tau^{**}+1, \cdots, \tau^*-1)$ — та из двух односвязных областей, ограничиваемых кривыми d_m^+, d_m^-, $\dot{d}_m$, $\dot{d}_m$, которая не имеет общих точек с $B_0(n)$; $D(\infty)$, $(D(0))$ — та из двух „улиткообразных“ областей, составляющих множество

$$S \setminus \{B_0(n) \sqcup \tilde{B}_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \cdots \sqcup \tilde{B}_{\tau^*}(n) \sqcup D_{-\tau^{**}} \sqcup \cdots \sqcup D_{\tau^*-1}\},$$

которая содержит точку ∞, (точку 0); $d^+(\infty) = \partial D(\infty) \cap \Gamma''$;

$$d^-(\infty) = \partial D(\infty) \setminus d^+(\infty);\ d^+(0) = \partial D(0) \cap \Gamma';$$

$$d^-(0) = \partial D(0) \setminus d^+(0).$$

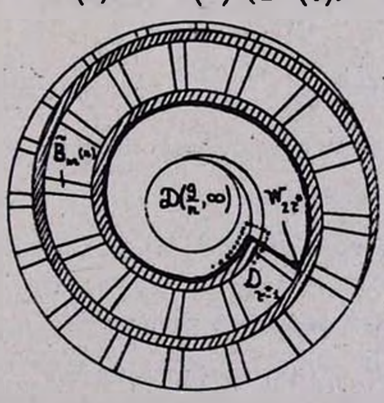

Рис. 3. (Вид на сферу сверху).
(Жирной линией ограничена область $D(\infty)$; точками намечена часть границы области $B_0'(n$; заштрихованная область—область $B_0(n)$).

* Начало см. в № 5 с. г.

Примыкающий к $B(n, i)$ по кривой d'_m $(d^+(\infty), d^+(0))$, простой остров над D_m, $(D(\infty), D(0))$, если таковой существует), обозначим через $D_m(i)$, $(D(\infty, i), D(0, i))$. Соединив с областью $B(n, i)$ все примыкающие к нему по кривым d'_m $(d^+(\infty), d^+(0))$ острова $D_m(i)$ $(D(\infty, i), D(0, i))$, получим некоторую область, удалив из которой множество $\{\bigcup_{\{m\}} d'_m \cup d^-(\infty) \cup d^-(0)\}$, получим область $B'_i(n, \cup \cup D_m(i))$.

Рассмотрим подробнее конструкцию этих областей. Для заданного значения i_0 разобъем множество значений m $(= -\tau^{**}, \ldots \ldots, \tau^* - 1)$, на группы. Первая группа $\mathfrak{M}_1$ состоит из наименьшего значения m (положим $m_1(i_0)$ и всех тех последующих номеров $m_1(i_0)+1$, $m_1(i_0)+2, \cdots, m'_1(i_0)$, с каждым из которых к $B(n, i_0)$ примыкает область $D_{m_1(i_0)}(i_0)$, $D_{m_1(i_0)+1}(i_0), \cdots, D_{m'_1(i_0)}(i_0)$ (заметим, что для заданного i_0 вообще может не быть ни одной группы и что группа $\mathfrak{M}_1$ может состоять из единственного значения $m_1(i_0)$). Это означает, что для номера $m'_1(i_0)+1$ не существует простого острова $D_{m'_1(i_0)+1}(i_0)$. Если $m'_1(i_0) \neq \tau^* - 1$, то группа $\mathfrak{M}_2$ начинается с номера $m_2(i_0) > > m'_1(i_0) + 1$, с которым в первый раз после номера $m'_1(i_0)$ область $D_{m_2(i_0)}(i_0)$ примыкает к $B(n, i_0)$. Все те последующие номера $m_2(i_0) + + 1, \cdots, m'_2(i_0)$, с каждым из которых к $B(n, i_0)$ примыкает простой остров над $D_{m_2(i_0)+1}(i_0), \cdots, D_{m'_2(i_0)}(i_0)$, совместно с номером $m_2(i_0)$ составляют группу $\mathfrak{M}_2$ (заметим, что группа $\mathfrak{M}_2$ может состоять также из единственного номера $m_2(i_0)$). Если $m'_2(i_0) \neq \tau^* - 1$, то аналогичным образом определим группу $\mathfrak{M}_3$ и т. д. Получим некоторое число $\sigma(i_0)$ групп $\mathfrak{M}_q$, каждая из которых состоит из некоторого набора значений $m_q(i_0)$, $m_q(i_0) + 1, \cdots, m'_q(i_0)$, (где $m'_q(i_0)$, в частности, может равняться $m_q(i_0)$).

Если область $B(n, i_0)$ соединить с примыкающим к нему по кривой d'_{m_0}, простым островом $Dm_0(i_0)$, то очевидно: 1) к области $D_{m_0}(i_0)$ примыкает по кривой $d^+_{m_0}$, $(d^-_{m_0})$ область

$$\widetilde{B}_{m_0}(n, i_0) \in B(n, i_0) \quad (\widetilde{B}_{m_0+1}(n, i_0) \subset B(n, i_0)),$$

проекция которой на сферу совпадает с областью $\widetilde{B}_{m_0}(n)$ $(\widetilde{B}_{m_0+1}(n))$; 2), примыкающие (в силу определения $B(n, i)$) к областям $\widetilde{B}_{m_0}(n, i_0)$ и $\widetilde{B}_{m_0+1}(n, i_0)$ простые острова над $B_0(n)$, являющиеся, в свою очередь, частью простых островов над $B'_0(n)$, совпадают.

Таким образом, для заданной группы $\mathfrak{M}_q$, примыкающие к островам $\widetilde{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0), \cdots, \widetilde{B}_{m'_q(i_0)}(n, i_0)$ (по линиям $d'_{m_q(i_0)}, \cdots, d'_{m'_q(i_0)}$), простые острова над $B_0(n)$, являющиеся, в свою очередь, частями простых островов над $B'_0(n)$, совпадают.

Обозначим этот простой остров над $B_0(n)$ через $B_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$.

Будем различать два случая: область $B_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ совпадает (соответственно, не совпадает) с простым островом, являющимся частью области $B^*_{i_0}\{n, \cup D_m(i_0)\}$, проектирующейся в область $B_0(n)$. В записи эти два случая будем отличать, подставляя вместо индекса q индекс q^* (соответственно, q^{**}).

Обозначим $M(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ область (см. рис. 4)

$$(\bar{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0), \amalg D_{m_q(i_0)}(i_0)) \amalg, \cdots, \amalg (\tilde{\bar{B}}_{m'_q(i_0)}(n, i_0) \amalg D_{m'_q(i_0)}(i_0)) \amalg$$

$$\amalg \tilde{B}_{m'_q(i_0)+1}(n, i_0);$$

$M'(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ — область, которая получится, если в предыдущей записи заменить $\bar{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0)$ на $\bar{B}'_{m_q(i_0)}(n, i_0)$ (где $\tilde{\bar{B}}'_{m_q(i_0)}(n, i_0)$ — остров над $\bar{B}_{m'_q(i_0)}(n)$, содержащий остров $\bar{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0)$, который существует по построению), а $\tilde{B}_{m'_q(i_0)+1}(n, i_0)$ заменить на $\tilde{B}'_{m'_q(i_0)+1}(n, i_0)$. Области $M'(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ и $B_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ граничат в частности по общей дуге $l'(n, i_0, \mathfrak{M}_q) = \partial M'(n, i_0, \mathfrak{M}_q) \cap \Gamma'$. Выделим на каждой из двух больших окружностей, проходящих через точку ∞ и концевые точки линии $l'(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$, участки, которые целиком лежат в $B_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$, кроме концевых точек, одна из которых является концевой для дуги $l'(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$, а другая лежит над кривой Γ''. Обозначим через $B'_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$ среднюю из трех областей, на которые разрезы по этим участкам делят область $B_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$. Очевидно

$$\partial B'_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q) \cap \partial M_0(n, i_0, \mathfrak{M}_q) = l'(n, i_0, \mathfrak{M}_q).$$

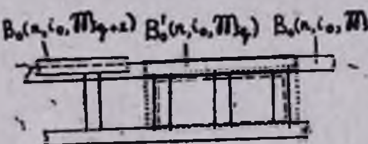

Рис. 4

(Штриховкой обведена область $M(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$; точками обведена область $M'(n, i_0, \mathfrak{M}_q)$).

Обозначим теперь

$$B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0)) = B^*_{i_0}(n, \cup D_m(i_0)) \cup \{\bigcup_{\{q^*\}} l'(n, i_0, \mathfrak{M}_{q^*})\},$$

где объединение внутри фигурной скобки ведется по всем q^*, определенным выше.

Очевидно, выполняется следующее

Свойство 1. Область $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$ „однолистна“, т. е. в каждую точку сферы проектируется не более одной точки этой области и, вообще говоря, многосвязна.

По построению, каждый остров над $B_0(n)$, $\tilde{B}_p(n)$, $p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$, являющийся частью области $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$, является, в то же время, частью простого острова над $B'_0(n)$, $\bar{B}'_p(n)$, $p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$.

Присоединив все те части этих островов над $B_0'(n)$, $\widetilde{B}_p'(n)$, $p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$, которые проектируются в множества $B_0'(n) \setminus B_0(n)$, $\widetilde{B}_p'(n) \setminus \overline{B}_p(n)$, $p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$ к области $B_{l_0}(n, \cup D_m(i_0))$, получим некоторую область на F. Присоединив к последней области все области $B_0'(n, i_0, \mathfrak{M}_{q^{**}})$, (где q^{**} определено выше), получим нужную нам область $B_{l_0}'(n, \cup D_m(i_0))$. Из построений легко вытекают следующие предложения.

Свойство 2. Область $B_{l_0}'(n, \cup D_m(i_0))$, вообще говоря, не однолистна, в частности, если она содержит область типа $B_0'(n, i_0, \mathfrak{M}_{q^{**}})$, то над каждой точкой сферы, в которую проектируется некоторая точка области $B_0'(n, i_0, \mathfrak{M}_{q^{**}})$, лежит две точки, принадлежащие области $B_0'(n, \cup D_m(i_0))$.

Свойство 3. Область $B_{l_0}(n, \cap D_m(i_0))$ принадлежит области $B_{l_0}'(n, \cup D_m(i_0))$.

Для любого i_0 расстояние $\rho(n)$ между границами этих областей, понимаемое как длина кратчайшей кривой, лежащей на $B_{l_0}'(n, \cup D_m(i_0))$ и соединяющей границу этой области и области $B_{l_0}(n, \cup D_m(i_0))$, удовлетворяет, с некоторой постоянной K_{37}, неравенству

$$\rho(n) \geqslant \frac{K_{37}}{n^6}. \tag{3.1}$$

Пусть $\widetilde{k}_l$ — количество тех областей $\widetilde{\Delta}_j^l$, $j = 0, 1, 2, \cdots, \widetilde{k}_l$, принадлежащих $\{D_m, m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1, D(\infty), D(0)\}$, соединение которых с проекцией на сферу замыкания области $B_l(n, \cup D_m(i))$ дает всю сферу.

Нам потребуется следующая оценка:

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} \widetilde{k}_l \leqslant 4S(s) + \frac{K_{38}}{n} S(s) + K_{39} n^{17} L, \tag{3.2}$$

где K_{38}, K_{39} — некоторые постоянные.

Покажем это. Если $n_0^*(D_m)$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1$ ($n_0^*(D(\infty))$, $n_0^*(D(0))$) — количество тех простых островов над D_m, ($D(\infty)$, $D(0)$), которые не примкнули к островам $B(n, i)$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(n)$, то очевидно

$$n_0^*(D_m) \leqslant n_0(d_m^*) - \Phi(n), \quad m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1, \tag{3,3}$$

$$n_0^*(D(\infty)) < n_0(d^+(\infty)) - \Phi(n),$$

$$n_0^*(D(0)) \leqslant n_0(d^+(0)) - \Phi(n).$$

Из теоремы А′ легко вытекает, с некоторой постоянной K_{40}, оценка

$$n_0(d^+(\infty)), \; n_0(d^+(0)), \; n_0(d_m^*) \leqslant S(s) K_{40} nL,$$

$$m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1.$$

Подставляя последнее неравенство и неравенство (2.9) в (3.3) и суммируя, придем к утверждению

$$P_0 \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} n_0^*(D_m) + n_0^*(D(\infty)) + n_0^*(D(0)) \leqslant$$

$$< (\tau^{**} + \tau^* + 2)\left\{ K_{40}\, nL + \frac{16(\tau^{**} + \tau^* + 1)}{n^5} S(s) + \right.$$

$$\left. + (\tau^{**} + \tau^* + 1) K_{36}\, n^{13} L \right\} \leqslant \frac{K_{38}}{n} S(s) + K_{41}\, n^{17} L, \qquad (3.4)$$

где K_{41} — некоторая постоянная (здесь мы учли, что $\tau^{**} + \tau^* < 2\pi n^2$).

Запишем неравенство (2.1) для совокупности областей $D(\infty)$, $D(0)$, D_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$. При этом в качестве кривых β_p, $p = -\tau^{**} + 1, \cdots, \tau^* - 1$, соединяющих области D_p и D_{p+1}, возьмем кривые d_p^*; в качестве кривых $\beta_{-\tau^{**}}$, (β_{τ^*}), соединяющих области $D(0)$, $D_{-\tau^{**}}$, $(D_{\tau^*-1}, D(\infty))$, возьмем кривые $d^*_{-\tau^{**}}$, $(d^*_{\tau^*})$; в качестве кривых β_p', $p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*$, возьмем границы областей $\widetilde{B}_p'(n)$.

Разделим линии $\partial B_0(n) \cap \partial D(\infty)$ и $\partial B_0(n) \cap \partial D(0)$ на три равные части. Проведем "параллельные" линиям Γ' и Γ'' разрезы, соединяющие соответствующие точки делений. Эти разрезы делят область $B_0(n)$ на три "подобные" области, границу средней из которых обозначим $\beta^*_{\tau^*+1}$. В качестве кривой β_{τ^*+1} возьмем произвольный из описанных разрезов.

Таким образом, все построения, нужные для подсчета h_0, уже сделаны.

Грубый подсчет, аналогичный проведенному выше, приводит с некоторой постоянной K_{42} к неравенству

$$h_0(D(0), D_{-\tau^{**}}, \cdots, D_{\tau^*-1}, D(\infty)) \leqslant K_{42}\, n^{13}.$$

Учитывая еще, что с некоторой постоянной K_{43} справедливы оценки

$$J_0(D(0)),\ J_0(D_m),\ m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*-1,\ J_0(D(\infty)) \geqslant \frac{K_{43}}{n^2},$$

применив последние к неравенству (2.1), получим (K_{44}—некоторая постоянная)

$$\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} [S(s) - n_0(D_m)] + 2S(s) - n_0(D(\infty)) -$$

$$- n_0(D(0)) \leqslant 4S(s) + K_{44}\, n^{15} L. \qquad (3.5)$$

Из неравенств (3.4) и (3.5) вытекает следующее утверждение: для количества

$$P_1 \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} [n_0(D_m) - n_0^*(D_m)] +$$

$$+ [n_0(D(\infty)) - n_0^*(D(\infty))] + [n_0(D(0)) - n_0^*(D(0))]$$

всех примыкающих к $B(n, i)$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(n)$ простых островов над $D(0)$, $D(\infty)$, D_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*-1$ выполняется оценка

$$P_1 > [(\tau^{**} + \tau^* + 2) - 4]\, S(s) - \frac{K_{38}}{n} S(s) - (K_{41} + K_{44})\, n^{17} L. \qquad (3.6)$$

Если из выражения $\Phi(n)(\tau^{**} + \tau^* + 2)$ (показывающего общее количество простых островов над линиями $d^+(\infty)$, $d^+(0)$, d^+_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^* - 1$), которые являются одновременно граничными участками областей $B_l(n, \cup D_m(i))$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(n)$ отнять выражение P_1, то разность, очевидно, будет равна сумме $\sum_{l=1}^{\Phi(n)} \bar{k}_l$. Отсюда, учитывая еще, что для любого p по неравенству (2.6) выполняется

$$\Phi(n) \leqslant n_0(b_p^*) \leqslant S(s) + K_{34} n^6 L, \qquad (3.7)$$

получим $(n > n_0)$

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} \bar{k}_l \leqslant 4S(s) + \frac{K_{38}}{n} S(s) + (K_{41} + K_{44})\, n^{17} L + (\tau^{**} + \tau^* + 2)\, K_{34} n^6 L \leqslant$$

$$< 4S(s) + \frac{K_{38}}{n} \cdot S(s) + K_{39} n^{17} L,$$

т. е. неравенство (3.2).

Пусть теперь наша поверхность F является образом односвязной области D при отображении некоторой однозначной функцией $w(z)$. Положим, что для функции $w(z)$ существуют все встречающиеся далее интегралы.

Пусть $\tilde{E}_l(D)$ $(\bar{E}_l(D))$ — прообраз области $B_l(n, \cup B_m(i))$ $(B_l(n, \cup \cup D_m(i)))$; $\Phi(x, D)$, $(\Phi(y, D))$ — количество областей $\bar{E}_l(D)$, имеющих общие точки с отрезком $J_x(D) = \{z : \operatorname{Re} z = x\} \cap D$ (соответственно, с отрезком $J_y(D) = \{z : \operatorname{Im} z = y\} \cap D$); $L_x(D)$ $(L_y(D))$ — сферическая длина образа отрезка $J_x(D)$ (соответственно, отрезка $J_y(D)$) при отображении функцией $w(z)$.

Положим, что при заданном x_0 число $\Phi(x_0, D) > 2$. Тогда для каждой области $\bar{E}_{l_0}(D)$, имеющей общие точки с отрезком $J_{x_0}(D)$, найдется очевидно на этом отрезке интервал, образ δ_{l_0} которого при отображении функцией $w(z)$ соединяет граничные кривые областей $\bar{E}_{l_0}(D)$ и $\tilde{E}_{l_0}(D)$. Следовательно, в силу свойства 3) имеем

$$\rho(\delta_{l_0}) \geqslant \frac{K_{37}}{n^6},$$

где $\rho(X)$ — сферическая длина X.

Поскольку очевидно

$$\sum_{x=1}^{\Phi(x_0, D)} \rho(\delta_{l_x}) \leqslant L_{x_0}(D),$$

для таких x_0 получим

$$\Phi(x_0, D) = \sum_{x=1}^{\Phi(x_0, D)} 1 \leqslant \frac{n^6}{K_{37}} \sum_{x=1}^{\Phi(x_0, D)} \rho(\delta_{l_x}) \leqslant \frac{n^6}{K_{37}} L_{x_0}(D).$$

Учитывая еще случай $\Phi(x, D) \leqslant 1$, получим неравенство

$$\Phi(x, D) \leqslant \frac{n^6}{K_{37}} L_x(D) + 1, \tag{3.8}$$

справедливое для всех x.

Аналогично получим неравенство

$$\Phi(y, D) \leqslant \frac{n^6}{K_{37}} L_y(D) + 1. \tag{3.9}$$

Если $D_{1,x} = \inf\limits_{z \in D} \operatorname{Re} z$, $D_{2,x} = \sup\limits_{z \in D} \operatorname{Re} z$, $D_{1,y} = \inf\limits_{z \in D} \operatorname{Im} z$, $D_{2,y} = \sup\limits_{z \in D} \operatorname{Im} z$, то очевидно интегралы

$$\int\limits_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} \Phi(x, D)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} \Phi(y, D)\, dy$$

равны, соответственно, величинам

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} \left(\sup_{z \in \widetilde{E}_l(D)} \operatorname{Re} z - \inf_{z \in \widetilde{E}_l(D)} \operatorname{Re} z\right)$$

и

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} \left(\sup_{z \in \widetilde{E}_l(D)} \operatorname{Im} z - \inf_{z \in \widetilde{E}_l(D)} \operatorname{Im} z\right).$$

Очевидно $d(\widetilde{E}_l(D))$ меньше суммы выражений в предыдущих скобках, так что

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(\widetilde{E}_l(D)) \leqslant \int\limits_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} \Phi(x, D)\, dx + \int\limits_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} \Phi(y, D)\, dy,$$

откуда, используя неравенства (3.8) и (3.9), имеем

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(\widetilde{E}_l(D)) \leqslant \frac{n^6}{K_{37}} \left\{ \int\limits_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} L_x(D)\, dx + \int\limits_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} L_y(D)\, dy \right\}. \tag{3.10}$$

Обозначив (в терминах функции $w(z)$) величину $S(s)$ через $A(D, w)$ и L—через $L(D, w)$ и подытожив полученные утверждения, получим следующее

Первое основное предложение. *При заданном четном $n > n_0 > 100$ в области D можно указать $\Phi(n)$ областей $\widetilde{E}_l(D)$, для которых выполняются следующие свойства*:

I. $$|\Phi(n) - A(D, w)| \leqslant Q_1(D, w), \tag{3.11}$$

где $Q_1(D, w) = \frac{K_{45}}{n} A(D, w) + K_{46} n^{17} L(D, w)$.

II. *В каждой области* $\widetilde{E}_i(D)$ *функция* $w(z)$ *однолистна; на границе* $\widetilde{E}_i(D)$ *функция не имеет кратных точек;* $\widetilde{E}_i(D) \cap \cap \widetilde{E}_j(D) = \varnothing$, *при* $i \neq j$; *замыкание множества* $w(\widetilde{E}_i(D))$, *стереографически отображенное на сферу, совпадает со сферой с некоторым числом* $\widetilde{k}_i$ *исключенных из сферы односвязных областей* $\widetilde{\Delta}^i_j$, $j=1, 2, \cdots, \widetilde{k}_i$, $\widetilde{\Delta}^i_{j_1} \cap \widetilde{\Delta}^i_{j_2} = \varnothing$ *при* $j_1 \neq j_2$.

III. *Существует такая постоянная* K_{47}, *что диаметр* $\rho(\widetilde{\Delta}^i_j)$ *(в сферической метрике) каждой из этих областей* $\widetilde{\Delta}^i_j$, $i=1, 2, \cdots \cdots, \Phi(n)$, $j=1, 2, \cdots, \widetilde{k}_i$ *удовлетворяет неравенству*

$$\rho(\widetilde{\Delta}^i_j) \leqslant \frac{K_{47}}{n}. \tag{3.12}$$

IV. *Общее количество этих областей удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} \widetilde{k}_i \leqslant 4A(D, w) + Q_2(D, w), \tag{3.13}$$

где $Q_2(D, w) = \dfrac{K_{48}}{n} A(D, w) + K_{49} n^{17} L$.

V. *Сумма диаметров областей* $\widetilde{E}_i(D)$ *удовлетворяет неравенству* (3.10).

Здесь предложение I вытекает из неравенств (2.9) и (3.7), предложения II, IV, V установлены ранее; предложение III вытекает из того, что области $\widetilde{\Delta}^i_j \in \{D(\infty), D(0), D_m, m=-\tau^{**}, \cdots, \tau^*-1\}$, а диаметр каждой из последних областей есть величина порядка $1/n$.

Из первого основного предложения легко выводится теорема 1.2. Теорема же 1.1 выводится из следующего более общего и точного результата.

Второе основное предложение. *При заданном четном* $n > n_0 > 100$ *в области* D *можно указать* $\Phi(n)$ *областей* $E_i(D)$, *для которых выполняются следующие свойства:*

I. $\Phi(n)$ *удовлетворяет неравенству* (3.11).

II. *В каждой области* $E_i(D)$ *функция* $w(z)$ *однолистна; на границе области* $E_i(D)$ *функция* $w(z)$ *может иметь кратные точки;* $E_i(D) \cap E_j(D) = \varnothing$ *при* $i \neq j$; *замыкание множества* $w(E_i(D))$, *стереографически отображенное на сферу, совпадает со сферой с некоторым числом* k_i *исключенных из сферы односвязных областей* Δ^i_j, $j=1, 2, \cdots, k_i$, $\Delta^i_{j_1} \cap \Delta^i_{j_2} = \varnothing$, *при* $i \neq j$.

III.

$$\rho(\Delta^i_j) \leqslant \frac{K_{47}}{n}.$$

$$i=1, 2, \cdots, \Phi(n), \; j=1, 2, \cdots, k_i. \tag{3.14}$$

IV.

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} k_i < 2A(D, w) + Q_3(D, w), \tag{3.15}$$

где $Q_3(D, w) = K_{50}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) A(D, w) + K_{51} n^{17} L(D, w)$,

V.

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(E_l(D)) \leqslant (1+p)\frac{n^6}{K_{37}} \times$$

$$\times\left\{\int\limits_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} L_x(D)\,dx + \int\limits_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} L_y(D)\,dy\right\} + 2(1+p)\,d(D). \qquad (3.16)$$

Пусть $n_{1,p}(D)$ $(\bar{n}_{1,p}(D))$ — количество кратных, с учетом кратности (без учета кратности) островов над некоторой областью D, кратность которых не превышает некоторого числа p (p, очевидно, больше единицы); $n^{*}_{1,p}(D_m, \cup B_l)$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^{*}-1$ $(n^{\circ}_{1,p}(D(\infty), \cup B_l)$, $n^{*}_{1,p}(D(0), \cup B_l))$ — количество кратных, с учетом кратности, островов над D_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^{*}-1$ $(D(\infty), D(0))$, удовлетворяющих условиям: 1) кратность каждого из этих островов не больше p $(p>1)$, 2) каждый остров над линией d^{*}_m, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^{*}-1$ $(d^{+}(\infty)$, $d^{+}(0))$, являющийся граничной дугой определяемого острова, является, одновременно, граничной дугой некоторого острова $B_l(n, \cup D_m(i))$;

$\tilde{n}^{*}_{1,p}(D_m, \cup B_l)$, $m = -\tau^{**}, \cdots, \tau^{*}-1$ $(\tilde{n}^{*}_{1,p}(D(\infty), \cup B_l)$,

$\tilde{n}^{*}_{1,p}(D(0), \cup B_l))$ — количество тех же островов без учета кратности.

По определению, для каждого острова над D_m, не являющегося островом типа $n^{*}_{1,p}(D_m, \cup B_l)$, найдется простой остров над d^{*}_m, являющийся граничной дугой этого острова над D_m и не являющийся граничной дугой ни одного острова $B_l(n, \cup D_m(i))$. Отсюда, учитывая, что общее количество простых островов над d^{*}_m, не являющихся граничными дугами областей B_l $(n, \cup D_m(i))$, не больше чем $n(d^{*}_m) - \Phi(n)$, получим

$$\bar{n}_{1,p}(D_m) - \tilde{n}^{*}_{1,p}(D_m, \cup B_l) \leqslant n(d^{*}_n) - \Phi(n).$$

Это же неравенство верно, если заменить в нем d^{*}_m на $d^{+}(\infty)$ (или $d^{+}(0)$) и D_m заменить на $D(\infty)$ (или $D(0)$). Суммируя эти неравенства и учитывая оценки (3.7) и (2.9), получим

$$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^{*}-1} [\tilde{n}_{1,p}(D_m) - \tilde{n}^{*}_{1,p}(D_m, \cup B_l)] +$$

$$+ [\bar{n}_{1,p}(D(\infty)) - \tilde{n}^{*}_{1,p}(D(\infty), \cup B_l)] +$$

$$+ [\bar{n}_{1,p}(D(0)) - \tilde{n}^{*}_{1,p}(D(0), \cup B_l)] \leqslant$$

$$\leqslant (\tau^{**}+\tau^{*}+2)\left\{\frac{16(\tau^{**}+\tau^{*}+1)}{n^5} S(s) - (\tau^{**}+\tau^{*}+1)\times\right.$$

$$\left.\times K_{36} n^{13} L + K_{34} n^6 L\right\} \leqslant \frac{K_{48}}{n} S(s) + K_{49} n^{17} L. \qquad (3.17)$$

Пусть $n_2(D)$ — количество кратных островов над некоторой областью D без учета кратности. Так как $n_2(D)\leqslant n_1(D)$, применив неравенство (2.1′), легко получим с некоторой постоянной K_{52} неравенство

$$P_3\overset{\text{def}}{=}\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^{*}+1}[n_2(D_m)-\overline{n}_{1,p}(D_m)]+$$

$$+[n_2(D(\infty))-\overline{n}_{1,p}(D(\infty))]+$$

$$+[n_2(D(0))-\overline{n}_{1,p}(D(0))]\leqslant\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^{*}-1}\frac{n_1(D_m)}{p-1}+$$

$$+\frac{n_1(D(\infty))}{p-1}+\frac{n_1(D(0))}{p-1}\leqslant\frac{2}{p-1}S(s)+\frac{K_{52}}{p-1}L, \tag{3.18}$$

(здесь мы учли, что кратность каждого острова, число которых фигурирует в разности под квадратными скобками, превышает число p).

Из определений имеем равенство

$$n(D)-n_1(D)=n_0(D)+n_2(D),$$

используя которое получим

$$P_4\overset{\text{def}}{=}\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^{*}-1}[n(D_m)-n_1(D_m)]+$$

$$+[n(D(\infty))-n_1(D(\infty))]+[n(D(0))-n_1(D(0))]=$$

$$=P_0+P_1+P_2+P_3+P_5,$$

где

$$P_5\overset{\text{def}}{=}\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^{*}-1}\overline{n}^{\bullet}_{1,p}(D_m,\cup B_l)+$$

$$+\overline{n}^{\bullet}_{1,p}(D(\infty),\cup B_l)+\tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D(0),\cup B_l).$$

Отсюда и из неравенств (3.4), (3.17), (3.18) вытекает оценка

$$P_1+P_5\geqslant P_4-\left(\frac{K_{38}+K_{48}}{n}+\frac{2}{p-1}\right)S(s)-\left(K_{41}+K_{49}+\frac{K_{52}}{p-1}\right)n^{17}L.$$

Откуда, применив вторую основную теорему Л. Альфорса, с некоторыми постоянными K_{53} и K_{54} получим

$$P_1+P_5+P_6\geqslant P_6+(\tau^{**}+\tau^{*})S(s)-$$

$$-K_{53}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)S(s)-K_{54}n^{17}L. \tag{3.19}$$

где

$$P_6\overset{\text{def}}{=}\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^{*}-1}[n^{\bullet}_{1,p}(D_m,\cup B_l)-\overline{n}^{\bullet}_{1,p}(D_m,\cup B_l)]+$$

$$+[n^{\bullet}_{1,p}(D(\infty),\cup B_l)-\overline{n}^{\bullet}_{1,p}(D(\infty),\cup B_l)]+$$

$$+[n^{\bullet}_{1,p}(D(0),\cup B_l)-\tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D(0),\cup B_l)].$$

Острова, входящие в определение $\overline{n}_{1,p}(D_m,\cup B_l)$, обозначим через $D'_m(\varkappa)$, $\varkappa$ — номер острова. Проведем из каждой алгебраической точки ветвления острова $D_m(\varkappa)$ разрезы по дугам больших окружностей, соединяющих эти точки с одним из концов дуги $\partial D_m \cap d'_m$, этот конец один и тот же для всех алгебраических точек ветвления из $D'_m(\varkappa)$. Если кратность острова $D'_m(\varkappa)$ равна некоторому $p_1(\leqslant p)$, то проведением этих разрезов остров $D'_m(\varkappa)$ распадается на p_1 односвязных и однолистных областей $D'_m(\varkappa, j)$, $j=1, 2, \cdots, p_1$. Проведя аналогичные разбиения для кратных островов над $D(\infty)$ и $D(0)$, получим некоторые подобные области $D_\infty(\varkappa)$, $D_0(\varkappa)$, $D_\infty(\varkappa, j)$ и $D_0(\varkappa, j)$. Заметим, что замыкание проекции на сферу каждой из областей $D'_m(\varkappa, j)$ ($D_\infty(\varkappa, j)$, $D_0(\varkappa, j)$) совпадает с замыканием области D_m ($D_{(\infty)}$, $D(0)$). Присоединим к каждой из областей $B_l(n, \cup D_m(i))$, $i=1,2,\cdots$ $\cdots, \Phi(n)$ все примыкающие к ней по дугам кривой d'_m ($d^+(\infty), d^+(0)$), области $D'_m(\varkappa, j)$, $m=-\tau^{**},\cdots, \tau^*-1$ ($D_\infty(\varkappa, j)$, $D_0(\varkappa, j)$). Получим $\Phi(n)$ областей $B_l(n, \cup D_m(i), \cup D_m(\varkappa, j))$, $i=1, 2,\cdots, \Phi(n)$. В силу сделанного выше замечания замыкание каждой из этих областей совпадает со всей римановой сферой с некоторым числом k_l исключенных из сферы односвязных областей Δ^l_j, $j=1, 2,\cdots, k_l$, причем каждая из областей Δ^l_j проектируется в одну из областей $D(0)$, $D(\infty)$, D_m, $m=-\tau^{**},\cdots, \tau^*-1$. Следовательно, для областей Δ^l_j выполняется неравенство (3.14). Обозначив $E_l(D)=w^{-1}(B_l(n, \cup D_m(i), \cup D_m(\varkappa, j)))$, заметим, что в силу построений, для областей $E_l(D)$ выполняются предложения I, II, III второго основного предложения.

Точно так же, как и при выводе неравенства (3.13) заключаем, что

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} k_l \leqslant \Phi(n)(\tau^{**}+\tau^*+2)-\{P_1+P_5+P_6\},$$

отсюда, используя неравенства (3.7) и (3.19), получим

$$\sum_{l=k}^{\Phi(n)} k_l \leqslant 2\,S(s)-P_6+K_{34}(\tau^{**}+\tau^*+2)\,n^6 L+ \\ +K_{53}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)S(s)+K_{54}\,n^{17}L, \tag{3.15'}$$

т. е., с учетом того, что $P_6\geqslant 0$, неравенство (3.15).

Остается доказать неравенство (3.16). Очевидно выполняется оценка

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(E_l(D)) \leqslant \sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(\widetilde{E}_l(D))+ \\ +\sum_{\{\varkappa\}}\sum_{\{j\}} d(w^{-1}(D_0(\varkappa, j)))+\sum_{\{\varkappa\}}\sum_{\{j\}} d(w^{-1}(D_\infty(\varkappa, j)))+ \\ +\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1}\sum_{\{\varkappa\}}\sum_{\{j\}} d(w^{-1}(D'_m(\varkappa, j))). \tag{3.20}$$

Из геометрических свойств проведенных построеный вытекает (аналогично свойству 3), что длина $\rho'(n)$ кратчайшей кривой на поверхности наложения F, соединяющей граничные участки двух произвольных островов типа $\tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D_m)$, $\tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D(\infty))$, $\tilde{n}^{\bullet}_{1,p}(D(0))$, удовлетворяет неравенству

$$\rho'(n) > \frac{K_{37}}{n^6}.$$

Теперь, точно так же, как из подобного неравенства (3.1) было выведено соотношение (3.10), получим

$$\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} \sum_{\{x\}} d(w^{-1}(D'_m(x))) +$$

$$+ \sum_{\{x\}} d(w^{-1}(D_\infty(x))) + \sum_{\{x\}} d(w^{-1}(D_0(x))) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^6}{K_{37}} \left\{ \int\limits_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} L_x(D)\,dx + \int\limits_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} L_y(D)\,dy \right\} + 2d(D).$$

С учетом того, что кратности каждого из островов $D'_m(x)$, $D_\infty(x)$, $D_0(x)$ не превосходят числа p, заключаем, что тройная сумма в (3.20) не превосходит правой части последнего неравенства, умноженного на p. Так что, учитывая еще неравенство (3.10), получаем оценку (3.16), чем и завершается доказательство второго основного предложения.

Доказательство теорем 1.1 и 1.2. В частном случае, когда во втором основном предложении функция $w(z)$ является мероморфной в $|z| < R \leqslant \infty$, а область $D = D(r) = \{z: |z| \leqslant r\}$, величина $A(D, w) = A(r)$, а $L(D, w) = L(r)$. Тогда, фигурирующая в фигурной скобке неравенства (3.16) величина представляется в виде

$$\int\limits_{-r}^{r} \left(\int\limits_{J_x \cap D(r)} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\,dy \right) dx + \int\limits_{-r}^{r} \left(\int\limits_{J_y \cap D(r)} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\,dx \right) dy.$$

Последняя величина оценивается в силу неравенства Коши—Буняковского через

$$2 \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\, r\,dr\,d\varphi \leqslant 2\sqrt{\pi}\, r A^{1/2}(r).$$

Учитывая еще, что $d(D(r)) = 2\pi r$, вместо неравенства (3.16) получим $(E_l(r) = E_l(D(r))$

$$\sum_{l=1}^{\Phi(n)} d(E_l(r)) \leqslant (1+p)\, n^6 \frac{16}{K_{37}}\, r A^{1/2}(r). \tag{3.16'}$$

Для оценок $Q_2(D(r), w)$ и $Q_3(D(r), w)$ используется следующая

Лемма 1 (см. [1], с. 331). *Пусть $w(z)$ — псевдомероморфная в $|z| < R \leqslant \infty$ функция, причем при $R < \infty$ полагаем, что*

$$\overline{\lim_{r \to R}}\, (R - r)\, A(r) = +\infty. \tag{3.21}$$

Тогда при $R=\infty$ для любого фиксированного $\varepsilon>0$ неравенство

$$L(r)<[A(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

справедливо при $r\in(0,\infty)\setminus E$ где $E=E(\varepsilon)$ — некоторое множество конечной логарифмической меры. При $R<\infty$ существует такая монотонно возврастающая функция $\varphi_1(r)$, стремящаяся к $+\infty$ при $r\to R$, что неравенство

$$L(r)\,\varphi_1(r)<A(r)$$

справедливо на некоторой последовательности $r_k\to R$. Положим теперь во втором основном предложении $n=p=n(r)=[\varphi(r)]^*$, где $[X]^*$ — целая часть числа X. Взяв при $R=\infty$, $\varphi(r)<A^{1/35}(r)$ и подставив эти значения n и p во второе основное предложение и неравенство (3.16′), получим теорему 1. Взяв при $R<\infty$, $\varphi^{17}(r)<\varphi_1(r)$, придем к следующему результату: пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z|<R<\infty$ функция, для которой выполнено неравенство (3.21). Тогда при $\varphi^{17}(r)<<\varphi_1(r)$ для функции $w(z)$ справедливы все утверждения теоремы 1 с заменой $r\in(0,\infty)\setminus E$ на $r_k\to\infty$.

Аналогично получаем теорему 2 и, соответственно, ее аналог для случая $R<\infty$. В случае, если $w(z)$ псевдомероморфна в $|z|<R\leqslant\infty$, используя рассуждения, приведенные в конце доказательства теоремы 2″ работы [2], вместо неравенства (3.16′) получим

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} d(E_i(r))\leqslant \mathbf{K}\cdot\frac{16}{K_{37}}(1+p)\,n^6\,rA^{1/2}(r), \tag{3.16″}$$

откуда дословно повторяя все остальные выкладки, получим следующий результат: для такой функции справедливы теорема 1 (2), если в последней в неравенстве (1.4), ((1.7)) постоянную K заменить постоянной $\mathbf{K}\,K$.

Все приведенные результаты настоящей работы ока зываются также верными, если каждый раз в оценках диаметров множеств $d(E_i(r))$ постоянные K заменить на $\mathbf{K}\;K$.

Отметим еще, что от результатов настоящей работы можно также перейти к их проинтегрированным формам в духе неванлинновской теории, если использовать следующие оценки.

Лемма 2 (Майлз [74], Гыжа [75]). *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z|<R\leqslant\infty$ функция (причем при $R<\infty$ выполнено неравенство* (3.21)). *Тогда при $R=\infty$ оценка (r_0 фиксировано)*

$$\int_{r_0}^{r}\frac{L(t)}{t}\,dt=O\left[\sqrt{T(r)\ln T(r)}\right]$$

выполняется при $r\to\infty$, $r\notin E'$, где E' — некоторое множество значений r конечной логарифмической меры.

При $R<\infty$ оценка

$$\int_{r_0}^{r}\frac{L(t)}{t}\,dt=O\left\{\left|\,T(r)\ln\frac{R\,T(r)}{R-r}\right|^{1/2}\right\}$$

выполняется при $r \to R$, $r \overline{\in} E''$, где E'' — некоторое множество значений r, для которого справедливо неравенство

$$\int_{E''} d\left(\frac{1}{R-r}\right) < \infty.$$

Доказательство теоремы 1.5. Пусть r'_k — последовательность значений r, стремящаяся к $+\infty$, на которой выполняются следующие соотношения:

а) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln A(r'_k)}{\ln r'_k}$ существует и равен ρ, б) $r'_k \overline{\in} E$, где

E — множество исключительных значений r, фигурирующее в теоремах 1 и 2.

Чтобы убедиться в возможности выбора таких значений r'_k, заметим, что если r^*_k — последовательность, на которой справедливо соотношение а), то последнее справедливо также на любой последовательности $r'_k \in P_k = \{r : r^*_k \leqslant r \leqslant 2r^*_k\}$.

Но объединение множеств P_k имеет, очевидно, бесконечную логарифмическую меру, так что из неограниченного множества $\bigcup\limits_k P_k \setminus E$ можем выбрать требуемую последовательность r'_k.

При $\rho > 0$ для последовательности r'_k выполняется еще следующее свойство в): при $\varepsilon > 0$, $r^*_k = r'_k / (A^{1/2-\varepsilon}(r))$

$$A(r^*_k) = o[A(r'_k)],\ r'_k \to \infty. \tag{3.22}$$

В самом деле, по определению на r'_k выполняется при $\rho < \infty$ $A(r'_k) \geqslant (r'_k)^{\rho-\varepsilon}$ при $r'_k > r_1$, так что при $r'_k > r_2 \geqslant r_1$, $\varepsilon < \rho$,

$$A(r^*_k) \leqslant (r^*_k)^{\rho+\varepsilon} \leqslant (r'_k)^{(\rho+\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} = o[A(r'_k)],\ r'_k \to \infty.$$

При $\rho = \infty$ соотношение очевидно.

В силу рассуждения, с помощью которого выводится соотношение б), справедливо также г): r'_k, удовлетворяющее соотношениям а), б), в), можно выбрать таким, чтобы $r^*_k \overline{\in} E$.

Пусть $\Phi^*(r_1, r_2)$ $(\Phi^*_1(r_1, r_2))$ — количество областей $E_i(r)$ $(E_{1,i}(r))$, фигурирующих в теореме I′ (I″), целиком лежащих в кольце $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$. В дальнейшем мы положим, что в теоремах I′ и I″ величина $\varphi^0(r) = A^\varepsilon(r)$.

Заметим, что количество областей $E_i(r'_k)$, целиком лежащих в $|z| \leqslant r^*_k$, есть величина $o[A(r'_k)]$, $r'_k \to \infty$, так как это количество есть величина порядка $A(r^*_k)$*, а для последней выполняется соотношение (3.22). С другой стороны, используя рассуждения, приведенные при

* В силу рассуждений пункта 4 в противном случае сферическая площадь множества $\bigcup_{i=1}^{\Phi(\cdot)} \omega(E_i(r))$ превосходила бы $\pi A(r^*_k)$, что невозможно, в силу определения $A(r)$.

выводе оценки (3.16), получим, что количество областей $E_l\ (r'_k)$, имеющих общие точки с $|z| = r^*_k$, оценивается через

$$(1+p)\,\frac{n^6}{K_{37}}\,L\,(r^*_k) = O\,[\varphi^7\,(r'_k)\ L\,(r^*_k)],\quad r'_k \to \infty.$$

Учитывая, что $r^*_k \overline{\in} E$ получим, что это количество есть величина порядка $o\,[A\,(r'_k)]$, $r'_k \to \infty$.

Из предыдущих двух предложений вытекает

$$\Phi^*\,(r^*_k,\ r'_k) = A\,(r'_k) + o\,[A\,(r'_k)],\ r'_k \to \infty, \tag{3.23}$$

и точно также выведем

$$\Phi^*_1\,(r^*_k,\ r'_k) \geqslant \frac{1}{3}\,A\,(r'_k) + o\,[A\,(r'_k)],\ r'_k \to \infty. \tag{3.24}$$

Обозначим

$$\Delta_\alpha\,(r'_k,\ J_\alpha\,(r'_k)) = \{z : r^*_k \leqslant |z| \leqslant r'_k,\ |\arg z - \varphi_\alpha\,(r'_k)| < 2\pi\alpha\},$$

$$J_\alpha\,(r'_k) = \{z\colon \arg z = \varphi_\alpha\,(r'_k),\ |z| > 0\}.$$

Для заданного r'_k очевидно найдется такая область $\Delta_{1/2}\,(r'_k,\ J_{1/2}\,(r'_k))$, что количество $\breve{\Phi}_{1/2}\ (r'_k,\ J_{\pi/2})$ областей $E_l\,(r)$, имеющих общие точки с $\Delta_{1/2}\,(r'_k,\ J_{\pi/2}\,(r'_k))$ не меньше, чем $\Phi^*(r^*_k,\ r'_k)$, так что в силу (3.23)

$$\breve{\Phi}_{1/2}\,(r'_k,\ J_{1/2}) \geqslant \frac{1}{2}\ A\ (r'_k) + o\ [A\ (r'_k)],\ r'_k \to \infty.$$

Поскольку диаметр каждой из областей $E_l\,(r)$, фигурирующих в теореме I′, не больше $K\varphi^8\,(r'_k)\,r'_k\,/\,A^{1/2}\,(r'_k)$, то ни одна из этих областей не имеет общих точек с $\Delta_{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\ (r'_k,\ J_{1/2}\ (r'_k))$ при $r'_k > r\ (\varepsilon_1)$ (так как минимальное расстояние между

$$\{z\colon \arg z = \varphi_{1/2}\,(r'_k),\ r^*_k \leqslant |z| \leqslant r'_k\}\quad \text{и}$$

$$\left\{z\colon \arg z = \varphi_{1/2}\,(r'_k) \pm \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_1\right),\ r^*_k \leqslant |z| \leqslant r'_k\right\}$$

не меньше чем $\varphi\,(r'_k)\ K\varphi^8\ (r'_k)\ \ r'_k/A^{1/2}\ (r'_k)$.

Таким образом, для каждого $r'_k > r\ (\varepsilon_1)$ мы выделили такую область $\Delta_{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\ (r'_k,\ J_{1/2}\ (r'_k))$, что количество $\Phi_{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\ (r'_k,\ \ J_{1/2})$ областей $E_l\ (r)$, замыкания которых целиком лежит в $\Delta_{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\ (r'_k,\ J_{1/2}\,(r'_k))$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi_{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\,(r'_k,\ J_{1/2}\ (r'_k)) \geqslant \frac{1}{2}\ A\ (r'_k) - o\,[A\ (r'_k)],\ r\ (\varepsilon_1) < r'_k \to \infty.$$

Пусть $J_{1/2} = \{z : \arg z = \varphi\ (1),\ |z| > 0\}$ — луч, являющийся предельным для $J_{1/2}\,(r'_k\ (1))$, где $r'_k\ (1)$, $k = 1, 2, \cdots$, — некоторая последовательность последовательности r'_k; $\Delta_{1/2}\,(\varphi\ (1)) = \left\{z\colon |\arg z - \varphi\ (1)| \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

Тогда очевидно, при $r_k'(1)\to\infty$ в $\Delta_{1/2}(\varphi(1))\cap\{z: |z|\leqslant r_k'(1)\}$ лежат вместе с замыканиями $\Phi_{\frac{1}{2}+2\varepsilon_1}(r_k'(1))$ областей $E_l(r)$, для которых выполняется

$$\Phi_{\frac{1}{2}+2\varepsilon_1}(r_k'(1))\geqslant\frac{1}{2}A(r_k'(1))+o[A(r_k'(1))],\ r_k'\to\infty.$$

Разделим теперь каждую из областей $\Delta_{1/2}(r_k'(1), J_{1/2}(r_k'(1)))$ на две равные области проведением сечения по $J_{1/2}(r_k'(1))$. Повторяя приведенные выше рассуждения получим, что хотя бы одна из этих областей имеет общие точки с не менее чем $1/4\,A(r_k'(1))+o[A(r_k'(1))]$, $r_k'(1)\to\infty$, областями $E_l(r)$. Далее, по аналогии получим, что существует такой луч $J_{1/2^2}=\{z: \arg z=\varphi(2),\ |z|>0\}$, что в области $\Delta_{\frac{1}{2^2}+2\varepsilon_2}(\varphi_2\cap\{z: |z|\leqslant r_k'(2)\}$ лежат вместе с замыканиями $\Phi_{\frac{1}{2^2}+2\varepsilon_2}(r_k'(2))$ областей $E_l(r)$, для которых справедливо неравенство

$$\Phi_{\frac{1}{2^2}+2\varepsilon_2}(r_k'(2))\geqslant\frac{1}{2^2}A(r_k'(2))+o[A(r_k'(2))],$$

где $r_k'(2)\in\{r_k'(1)\}$, $r_k'(2)\to\infty$.

Поскольку $\varepsilon_2<\varepsilon_1$, то $\overline{\Delta_{\frac{1}{2^2}+2\varepsilon_2}}(\varphi_2)\subset\Delta_{\frac{1}{2}+2\varepsilon_1}(\varphi_1)$. Продолжая эту процедуру для произвольного n получим неравенства (1.18), а поскольку $r_k'(n+1)\subset\{r_k'(n)\}$ начиная с некоторого $r_k'(n+1)$, то в силу свойства а) выполняются также неравенства (1.19). Теорема доказана для случая, когда $\varepsilon_n=1/2^n$.

Доказательство общего случая аналогично, с той лишь разницей, что из областей $\Delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}$ выделяется область, не являющаяся половинкой области $\Delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}$, а область с угловым раствором $2\pi\,\varepsilon_{n+1}'$.

Доказательство теоремы 1.7 проводится аналогичным образом, если в рассуждениях, приводимых после соотношения (3.23), вместо (3.23) использовать неравенство (3.24).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.VIII.1984

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների կետերի մոտիկության հատկությունը և ռիմանյան մակերևույթների կառուցվածքը (ամփոփում)

Աշխատանքում օգտագործելով «լցման շրջանների» գաղափարը ապացուցվում են Նևանլիննայի և Ալֆորսի տեսքերով երկրորդ հիմնական թեորեմի և համապատասխանաբար այդ տեսքերով դեֆեկտների առնչությունների, Բորելի ճառագայթների մասին Վալիրոնի արդյունքների «լցման շրջաններին» վերաբերվող Միյոսի թեորեմների ուժեղացումներ: Ստացված բոլոր արդյունքները ճշգրիտ են նրանց մեջ մտնող հաստատունների ճշտությամբ:

Սակայն աշխատանքում հիմնականը երկու նոր օրինաչափությունների հայտնաբերումն է: 1) $W(z)$ մերոմորֆ ֆունկցիայի a-կետերի մոտիկության հատկությունը, որը լրացնելով բաշխման տեսության հիմնական պնդումը a և b-կետերի քանակի մոտիկության մասին, ցույց է տալիս նաև այդ կետերի մոդուլների և արգումենտների մոտիկությունը: 2) $\{v(z): (z)\leqslant r\}$ ռիմանյան մակերևույթի միաթերթ մասերի տրոհվելու հատկությունը, երբ նրանից հեռացվում են «փոքր» քանակությամբ «փոքր» մակերեսներ ունեցող տիրույթները:

G. A. BARSEGIAN. *A proximity property of the a-points of meromorphic functions and Rieman surface structure* (summary)

In the parer sharper versions of the following results are established: the second main theorem in Ahlfors' and Nevanlinna's forms and the corresponding deficiency relations; first main theorem in Ahlfors' form; Valiron's results on Borel rays; Milloux's results of "circles de remplissage". All the results are best possible up to constats there.

Besides two new correlation conditions are found: the „proximity property of a-points" of ameromorphic function $w(z)$ which complements the classical results by establisheng closeness of modules and arguments of a and b-points; the possibility of deviding the Rieman surface $\{w(z) : |z| \leqslant r\}$ into univalent sheets after removing small number of regions of small diameter. This last property opens perspectives for using the theory of univalent functions in the theory of meromorphic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, 1941.
2. *Г. А. Барсегян*. Единый подход к основным результатам о дефектах, лучах Бореля, кругах наполнения, ДАН СССР, 271, № 1, 1983, 11—14.
3. *Г. А. Барсегян*. Свойство близости а-точек — новая концепция в теории мероморфных функций, Short communications, J. C. M. Warszawa, 1982, p. 10.
4. *Г. А. Барсегян*. Свойство близости a-точек мероморфных функций, Матем. сборник, 120 (162), № 1, 1983, 42—67.
5. *Г. А. Барсегян*. Новые результаты в теории мероморфных функций, ДАН СССР, 238, № 4, 1978, 777—780.
6. *Г. А. Барсегян*. О геометрии мероморфных функций, Матем. сборник, 114 (156), № 2, 1981, 179—226.
7. *H. Milloux*. Lie theoreme de Picard. Suites de fonctions holomorphes. Fonctions meromorphes—et fonctions entieres, J. Math. pures et appl., 1924, 9—e sérіe, 3, 345—401.
8. *H. Milloux*. Les cercles de remplissage des fonctions meromorphes ou entieres et le theoreme Picard—Borel, Acta mathematica, 1928, 52, 189—225.
9. *J. Dufresnoy*. Sur quelques propriétès des cercles de remplissage des fonctions, meromorphes, Ann. Ecole Norm. sup., 1942, LIX, 187—209.
10. *G. Valiron*. Sur la distribution des values des fonctions meromorphes, Acta Math. 1926, № 47.
11. *M. Tsuji*. Potential theory in modern function theory, Tokyo, 1959.
12. G. *Valiron*. Recherches sur le theoreme M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes, Acta mathematica, 1928, 52, 1—2, 67—92.
13. *K. L. Hiong*. Sur les fonctions entieres et les fonctions méromorphes d'ordre infini, Journ. de Math., 9e série, 1935, t. 14.
14. *K. L. Hiong*. Sur les fonctions mèromorphes d'ordre infini, G. R. Acad. Sci. 1933, t. 196.
15. *K. L. Hiong*. Some properties of the merophic functions of infinite order, Science reports of the National Tsing Hua Univ., serie A, 1935, t. 3.
16. *H. Milloux*. Une propriété générale des functions entieres d'ordre infini, C. R. Acad. Sci., 1930, t. 191.
17. *H. Milloux*. Remarques sur les fonctions entieres, Bull. Sc. Math., 2e série, 1930, t. 54.
18. *H. Milloux*. Sur une inégalité de la théorie des fonctions et ses applications, C. R. Acad. Sci., 1932, t. 194.
19. *H. Milloux*. Sur les bondes de determination infinie des fonctions entieres, Comptes rendues du Congres de Zürich, 1932, t. 2.
20. *H. Milloux*. Quelques propriétés des fonctions entieres d'ordre infini, distribution de leurs valeurs, Ann. Ecole Norm., 3e série, 1932, t. 49.

21. *G. Valiron*. Sur les directions de Borel de certaines fonctions entieres d'ordre infini, C. R. Acad. Sci., 1932, t. 194.
22. *G. Valiron*. Méthodes de sommation et directions de Borel, Annali R. Scuola normale di Pisa, 2e série, 1933, t. 2.
23. *A. Rauch*. Sur les bandes de diuegence de certaines fonctions d'ordre infini, C. R. Acad. Sci., 1934, t. 198.
24. *G. Valiron*. Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre nul, C. R. Acad. Sci., 1935, t. 200.
25. Cartwreight. Sur les directions de Borel des fonctions entieres d'ordre fini, C. R. Acad. Sci., 1932, 194.
26. Cartwreight. Sur quelques propriétés des directions de Borel des fonctions entieres d'ordre fini, C. R. Acad. Sci., 1932, 194.
27. Cartwreight. Sur la relation entre les directions de Borel des fonctjons entieres et les singularités des fonctions analitiques, C. R. Acad. Sci., 1932, 194.
28. Sunyer Balaguer F. Number of Borel directions and exceptional values of a meromorphic functions of finite order, Mem. Real Acad. Ci Art., Bercelona, 1952, 30, 451—459.
29. *G. Valiron*. Sur les directions de Borel des functions méromorphes d'ordre fini, Journ. de Math. Seele, 1931, № 10.
30. *W. K. Hayman*, *Lo. Yang*. Growth and values of fonctions regular in an angle, Proc. London Math. Soc., 1982, 44, № 2, 193—214.
31. *A. Dinghas*. Eine Verallgemeinerung des Picard—Borelschen Satzes, Math. Zeitschrite, 1939, 44.
32. *M. Tsugi*. Borel directions of meromorphic function of finite order, I. Tohoku Math. Journ. 1950, № 2, II. Kodai Math. Sem. Rep., 1950, III. Kodai Math. Sem. Rep., 1959.
33. Lee, Ke—chun. Über die Verallgemeinerung einiger. Ergebnisse der Wertverteilungstheorie der meromorphen Functions, Acta Math. Sinica, 1953, 3, 87—100.
34. *L. Biernacki*. Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes, Acta Math., 1930, № 56.
35. *A. Rauch*. Eztensions de théoremes relatifs aux directions de Borel des fonctions méromorphes, Journ. de Math., 1933, № 12.
36. *G. Valiron*. Points de Picard et points de Borel des fonctions méromorphes dans un cercle, Bull. Sci. Math., 1932.
37. *M. Tsuji*. Borel's direction of a meromorphic function in a unit circle, J. Math. Soc., Japan, 1955, 7, 290—311.
38. *H. Milloux*. Sur les directions de Borel des fonctions entieres et de leurs dérivées, C. R. Acad. Sci. Paris, 1950, 231, 402—403.
39. *H. Milloux*. Sur les fonction entieres d'ordre fini ou nul, C. R. Acad. Sci. Paris, 1951, 232, 236—237.
40. *H. Milloux*. Sur une propriété des fonctions méromorphes et de leurs dérivées, J. Math. Pures Appl., 1952, (9), 31, 1—18.
41. Sunyer Balager F. Directions of Borel—Valiron of maximum kind. comon to an entire fonction and to its successive derivetives and integrals, Mem. Acad. Cienc.. Madrid, 1956, 5, № 1, 51.
42. *Lo. Yang*. Siaou Shou—zhi. Sur les points de Borel des fonctions méromorphes et de leurs dérivées, Scientia sinica, 1965, 14, No11. 1556—1573.
43. C. *Linden*. On a conjecture of Valiron concerning sets of indirect Borel points, J. London Math. Soc., 1966, 41, № 2, 304—312.
44. *J. Anderson*. *J. Clunie*. Entire functions of finite order and lines of Julia, Math. Z., 1969, 112. No1, 59—73.
45. *P. Colwell*. Meromorphic functions with large sets of Julia points, Nagoja Math. J., 1973, 50, 1—6.
46. *P. Colwell*. Julia points of functions meromorphic on a disk, Bull. London Math. Soc., 1972, 4, № 3, 327—329.
47. *B. Cain*. Every direction of Julia direction, Proc. Amer. Math. Soc., 1974, 46, № 2, 250—252.

48. *Lo. Yang*, Chang Kuan—heo. Recherches sur le nombre des valeurs déficientes et le nombre des directions de Borel des fonctions méromorphes, Sci. sinica, 1975, 18, № 1, 21—37.
49. *D. Drasin. A. Weitzman.* On the Julia directions and Borel directions of entire functions, Proc. London Math. Soc., 1976, 32, № 2, 199—212.
50. *Lo. Yang*, Chang Kuan—heo. Sur la construction des fonctions méromorphes syant des directions singulieres données, Sci. sinica, 1976, 19, № 4, 445—459
51. *L. H. Lange.* A non-Euclidean analogue to a theorem of H. Milloux aud its relationship to a theorem of W. Seidel, Amer. Math. Soc. Not., 1958, 5, 847—848.
52. *L. H. Lange.* Sur les cercles de remplissage non Euclidiens. Ann. Sciеnt. Ecole norm. super., 1960, 77, № 3, 257—280.
53. *L. H. Lange.* The existence of non-Euclidean circles de remplissage in certain subsets of the unit disc, Nagoya Math. J., 1961, 19, Oct., 41—47.
54. *В. И. Гаврилов.* О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными, Матем. сборник, 67 (109), № 3, 1965, 408—427.
55. *В. И. Гаврилов.* О поведении голоморфной функции в окрестности своей существенно особой точки, ДАН СССР, 162, № 3, 491—494.
56. *В. И. Гаврилов.* О поведении мероморфной функции в окрестности своей существенно особой точки, Изв. АН СССР, 30, № 4, 767—789.
57. *H. Joshida.* On value distribution of functions meromorphs in the whole plane, Pacif. J. Math., 1976, 64, № 1, 283—295.
58. *В. И. Гаврилов, А. Н. Канатников.* Характеристика множества $P(f)$ для мероморфных функций, ДАН СССР, 232, № 6, 1977, 1237—1240.
59. *В. И. Гаврилов, А. Н. Канатников.* Характеристика множества $M(f)$ для мероморфных функций, ДАН СССР, 233, № 1, 1977, 15—17.
60. *N. Toda.* Sur les directions de Julia et de Borel des fonctions algebroides, Nagoya Math. J., 1969, 34, 1—23.
61. *N. Toda.* Sur les directions de Julia fonctions algebroides dans $|z| < \infty$, Nagoya Math. J., 1970, 37, 53—60.
62. *P. Gauthier.* Cercles de remplissage and asymptotic behavior, Canad. J. Math., 1969, 21, № 2, 447—477.
63. *P. Gauthier.* Cercles de remplissage and asymptotic behavior along circuinous parts, Canad. J. Math., 1970, 22, № 2, 389—393.
64. *P. Gauthier. J. Hwang.* Asymptotic values along Julia rays, Canad, J. Math., 1976, 28, № 6, 1210—1215.
65. *S. Toppila.* Some remarks on exceptional values at Julia lines, Suomalais, tiedeakat. toimituks, 1970, Sar A Nol, № 456, 20, pp.
66. *S. Toppila.* Linear Picard sets for entires functions. Ann. Acad. Sci. Fenn., 1975, Ser. AI, 1, № 1, 111—123.
67. *J. Hwang.* Note on a problem of Catherine Renyi about Julia lines, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1977, 29, № 1—2, 67—68.
68. *В. И. Гаврилов, К. О. Курбанов.* О направлениях Жулиа у исключительных в смысле *Жулиа* функций, Вестн. Моск. ун-та, мат.-мех., № 1, 1977, 86—89.
69. *Lo. Yang.* Angular distribution and multiple values between entire functions and their derivatives, Sci. sinica, 1980, 23, № 1, 16—39.
70. *Lo.* Yang. Meromorphic functions and their derivatives, J. London Math. Soc., 1982, № 2, 288—296.
71. *П. Монтель.* Нормальные семейства аналитических функций, ОНТИ, М.—Л., 1936.
72. *G. Voltron.* Directions de Borel des fonctions meromorphes, Gauthier—Villars Paris, 1938.
73. *J. Dufresnoa.* Sur les domeines courectes par les valeurs d'une fonction meromorphe on algebroide, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 58, (3), 1941, 179—259.
74. *J. Miles.* A note on Ahlfors' theory of covering surfaces, Proc. Amer. Math. Soc., 21, № 1, 1969, 30—32.
75. *Б. О. Гыжа.* Замечание к теории Альфорса накрывающих поверхностей, Теория функций, функц. анализ и их прил., 20, 1974, 70—72.