ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 5, 1985 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН

СВОЙСТВО БЛИЗОСТИ a-ТОЧЕК МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И СТРУКТУРА ОДНОЛИСТНЫХ ОБЛАСТЕЙ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. Основные результаты, следствия, обсуждения

Теорема Пикара дала толчок к построению ставших уже классическими теорий, предметы исследования которых можно разделить по двум основным направлениям.

В одном из них, развитом в основном французскими математиками (Г. Жулиа, Ж. Валирон, А. Мийю, И. Дюфренуа), выявляется, что для мероморфной в $\mathbf{C}$ функции $w(z)$ можно указать в z-плоскости угловые области произвольно малого раствора или последовательности кружков с «малыми» диаметрами, в которых $w(z)$ принимает все значения из $\overline{\mathbf{C}}$, кроме, быть может, двух.

Другое направление — теория распределения значений мероморфных функций (теория Р. Неванлинны, см. [1]).

Результаты второго направления отличаются точностью количественного описания a-точек в кругах $|z| \leqslant r$. Однако они не содержат информации о взаимном геометрическом расположении a-точек для различных значений a.

Преимуществом же результатов первого направления является наличие в них некоторой информации такого рода.

Теоремы 1.1 и 1.2 настоящей работы позволяют с единой позиции рассмотреть и усилить основные результаты обоих направлений, а также, что важнее, выявить новые стороны поведения мероморфных функций.

Основные результаты работы являются, по существу, результатами о кругах наполнения, изучение которых ранее находилось в стороне от центральных направлений исследования. Тем не менее они позволяют в существенном усилить первую и вторую основные теоремы теории поверхностей наложения Л. Альфорса, вторую основную теорему теории Р. Неванлинны, соотношения дефектов Р. Неванлинны и Л. Альфорса, выявляя при этом, что основные выводы теории распределения значений являются частью более общей закономерности — «свойства близости a-точек» мероморфных функций.

В плане результатов первого направления теоремы 1.1 и 1.2 дают точную оценку кругов наполнения как в кругах $|z| \leqslant r$, так и в угловых областях, что достигается благодаря выделению однолистных областей римановой поверхности $\{w(z) : |z| \leqslant r\}$ и учету их структуры — закономерности, открывающей перспективу применения однолистных функций для изучения мероморфных.

1°. Основные результаты (анонсированы в [2], см. также [3], стр. 10).

Теорема 1.1. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция: $\varphi(r)$ — монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \to \infty$ ($\varphi^{35}(r) < A(r)$), где $A(r)$ — сферическая характеристика Л. Альфорса. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ можно указать $\Phi(r)$ попарно непересекающихся областей $E_i(r)$, $i=1, 2, \cdots, \Phi(r)$, для которых справедливы следующие утверждения.*

I. $$|\Phi(r) - A(r)| = o[A(r)], \quad r \to \infty, \quad r \overline{\in} E, \tag{1.1}$$

где E — некоторое множество конечной логарифмической меры.

II. *В каждой области $E_i(r)$ функция $w(z)$ однолистна; на $\partial E_i(r)$ могут лежать критические точки функции $w(z)$; замыкание множества $w(E_i(r))$, стереографически отображенное на риманову сферу, совпадает со сферой с некоторым числом k_i исключенных из сферы односвязных областей.*

III. $$\rho(\Delta_j^i) \leqslant \frac{1}{\varphi(r)}, \quad i=1, 2, \cdots, \Phi(r), \quad j=1, 2, \cdots, k_i, \tag{1.2}$$

где $\rho(\Delta_j^i)$ — диаметр области Δ_j^i в сферической метрике, $r \overline{\in} E$.

IV. $$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} k_i \leqslant 2A(r) + o[A(r)], \quad r \to \infty, \quad r \overline{\in} E. \tag{1.3}$$

V. $$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(E_i(r)) \leqslant K\varphi^7(r)\, r A^{1/2}(r), \tag{1.4}$$

где $d(E_i(r))$ — диаметр области $E_i(r)$, K — некоторая постоянная.

Теорема 1.2. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция; $\varphi(r)$ — монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$, при $r \to \infty$, $\varphi^{35}(r) < A(r)$. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ можно указать $\Phi(r)$ попарно непересекающихся областей $(\widetilde{E}_i(r))$, $i=1,2,\cdots, \Phi(r)$, для которых справедливы следующие утверждения.*

I. *Предложение I теоремы 1.1.*

II. *В каждой области $\widetilde{E}_i(r)$ функция $w(z)$ однолистна; для каждой точки, принадлежащей $\partial\widetilde{E}_i(r)$, существует некоторая ее окрестность, в которой $w(z)$ однолистна; замыкание множества $w(\widetilde{E}_i(r))$, стереографически отображенное на риманову сферу, совпадает со сферой с некоторым числом $\widetilde{k}_i$, исключенных из сферы односвязных областей $\widetilde{\Delta}_j^i$, $j=1,2,\cdots, \widetilde{k}_i$.*

III. $$\rho(\widetilde{\Delta}_j^i) \leqslant \frac{1}{\varphi(r)}, \quad i=1, 2, \cdots, \Phi(z), \quad j=1,2,\cdots, \widetilde{k}_i, \quad r \overline{\in} E. \tag{1.5}$$

IV. $$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} \widetilde{k}_i \leqslant 4A(r) + o[A(r)], \quad r \to \infty, \quad r \overline{\in} E. \tag{1.6}$$

$$\text{V.}\qquad \sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(\overline{E}_i(r)) \leqslant K\varphi^7(r)\, rA^{1/2}(r), \tag{1.7}$$

где k — *постоянная, не зависящая от* $w(z)$.

Мы используем также следующее

Примечание к теореме 1.2. Пусть $F_r = \{w(z) : |z| \leqslant r\}$ — поверхность, являющаяся образом круга при отображении $w(z)$, $\widetilde{F}_r$ — поверхность, полученная стереографическим отображением F_r на риманову сферу.

Множество $\bigcup\limits_i w(E_i(r))$ является объединением двух множеств

$$\bigcup_i w\, \overline{E}_i(r)) \text{ и } \left\{ \left| \bigcup_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} \bigcup_x D_m(x, r) \right| \cup [\bigcup_x D_\infty(x, r] \cup [\bigcap_x D_0(x, r)] \right\},$$

где $D_m(x, r)$, $D_\infty(x, r)$, $D_0(x, r)$ —кратные острова*, проектирующиеся в области на сфере, диаметры которых не больше чем $K/\varphi(r)$, где $K = \text{const} < \infty$. Из неравенства (3.15) вытекает оценка

$$\sum_{l=1}^{\Phi(r)} k_l < 2A(r) - B_{1,p}(r),$$

где $B_{1,p}(r)$ — сумма порядков всех этих кратных островов.

Если нам не нужно использовать структуру множеств $E_i(r)$, выявляемую в примечании к теореме 1.2, то можем выбросить из рассмотрения те области $E_i(r)$, для которых $d(E_i(r)) > \dfrac{K\varphi^8(r)\,r}{A^{1/2}(r)}$. Так как согласно неравенству (1.1) и (1.4) количество таких областей $o[A(r)]$, $r \to \infty$, $r \overline{\in} E$, то сохраняя для оставшихся областей все обозначения теоремы 1.1, получим следующий результат.

Теорема 1.1′. *В теореме* 1.1 *неравенство* (1.4) *можно заменить неравенствами*

$$d(E_i(r)) \leqslant \frac{K\varphi^8(r)\,r}{A^{1/2}(r)}\ )\ i = 1, 2, \cdots, \Phi(r). \tag{1.4′}$$

2°. Связь со второй основной теоремой теории распределения значений. Вывод соотношения дефектов. В теоремах 1.1 и 1.2 не фигурируют значения $a_1, a_2, \ldots, a_q$ или величины типа функций $n(r, a_\nu)$ и $m(r, a_\nu)$, в терминах которых формулируется вторая основная теорема теории распределения. Однако связь между этими теоремами устанавливают следующие

Рассуждения А. Если $a_\nu \in \overline{C}$, $\nu = 1, 2, \cdots, q$, таковы, что $a_i \neq a_j$ при $i = j$, то при $r > r_0(a_1, a_2, \cdots, a_q)$ каждая из $\overline{E_i(r)}$ содержит не

---

* Островом поверхности $\widetilde{F}_r$ над областью D на римановой сфере называется связная часть поверхности $\widetilde{F}_r$, лежащая над D и не имеющая над D относительной границы (последнее означает, что проекция на сферу границы острова не имеет пересечения с D). Кратностью острова называется число его листов; порядком — кратность минус единица. Конкретная конструкция этих островов D_m, D_0, D_∞ указывается при доказательствах.

менее чем $q - k_i(r)$ точек, образы которых при отображении функцией $w(z)$ принадлежат множеству $\{a_1, a_2, \cdots, a_q\}$. В самом деле, при r больше некоторого r_0, диаметры областей Δ_j^i меньше чем половина минимального расстояния в сферической метрике между точками $a_1, a_2, \cdots, a_q$. Следовательно количество $a_1, a_2, \cdots, a_q$-точек, принадлежащих $\overline{E_i(r)}$, не меньше чем $q - k_i(r)$. Отсюда вытекает неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{q} n^*(r, a_\nu) > \sum_{i=1}^{\Phi(r)} (q - k_i(r)), \tag{1.8}$$

где $n^*(r, a_\nu)$— количество a_ν-точек, с учетом кратности, принадлежащих множеству $\bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} \overline{E_i(r)}$.

Далее, в силу однолистности функции $w(z)$ на $\overline{E}_i(r)$ все кратные a_ν-точки, фигурирующие в (1.8), принадлежат островам $D_m(x, r)$, $D_0(x, r)$, $D_\infty(x, r)$, при том в силу того, что диаметры проекций на сферу этих островов стремятся к нулю при $r \to \infty$, получаем, что при $r > r_1$ каждому такому острову не могут принадлежать образы a_ν-точек с различными ν. Очевидно, сумма порядков кратных a_ν-точек, образы которых принадлежат заданному острову, не больше порядка этого острова. Из двух последних предложений вытекает неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{q} n_1^*(r, a_\nu) \leqslant B_{1,\rho}(r),$$

где $n_1^*(r, a_\nu)$— сумма порядков всех a_ν-точек, принадлежащих множеству $\bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} \overline{E_i(r)}$.

Теперь, с учетом неравенства (1.8) и примечания к теореме 1.2 имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} n^*(r, a_\nu) - \sum_{\nu=1}^{q} n_1^*(r, a_\nu) \geqslant (q-2)\, \Phi(r), \tag{1.9}$$

откуда, учитывая предложение 1 теоремы 1.1 и очевидное неравенство $n(r, a_\nu) - n_1(r, a_\nu) > n^*(r, a_\nu) - n_1^*(r, a_\nu)$, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) - \sum_{\nu=1}^{q} n_1(r, a_\nu) \geqslant (q-2)\, A(r) - Q(r),$$

где $Q(r) = o[A(r)]$, $r \to \infty$, $r \overline{\in} E$.

Последнее неравенство отличается от второй основной теоремы Л. Альфорса только худшим остаточным членом (впрочем, несущественным для основных выводов). Таким образом, неравенство (1.9), по существу уточняет вторую основную теорему теории поверхностей наложения, показывая, что в последней вместо a_ν-точек, лежащих в $|z| \leqslant r$, достаточно рассматривать лишь те a_ν-точки из $|z| \leqslant r$, которые принадлежат $\bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} E_i(r)$.

В процессе доказательства устанавливается, что $Q(r)$ есть, на самом деле, величина $o[A(r)]+O[L(r)]$, $r\to\infty$, где величина $L(r)$ — сферическая длина образа окружности $|z|=r$ при отображении функцией $m(z)$. Согласно лемме 2, приведенной после доказательства теоремы 1.1, $Q_1(r)=\int\limits_{r_0}^{r}\frac{Q(t)}{t}\,dt=o[T(r)]$, $r\to\infty$, $r\overline{\in}E'$, где $\int\limits_{E'}\frac{1}{\ln\ln t}\,dt<\infty$, так что из неравенства (1.9) получаем следующее усиление второй основной теоремы Р. Неванлинны (с худшим остаточным членом).

$$\sum_{\nu=1}^{q}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{n^*(t,a_\nu)}{t}\,dt-\sum_{\nu=1}^{q}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{n_1^*(r,a_\nu)}{t}\,dt\geqslant(q-2)\,T(r)-Q_1(r),$$

откуда вытекает соотношение

$$\sum_{(a_\nu)}\left\{1-\varlimsup_{r\to\infty}\left[\int\limits_{r_0}^{r}\frac{n^*(t,a_\nu)-n_1^*(t,a_\nu)}{t}\,dt/T(r)\right]\right\}\leqslant 2,$$

которое непосредственно усиливает соотношение дефектов

$$\sum_{(a)}\delta(a)+\sum_{(a)}\theta(a)\leqslant 2.$$

3°. **Свойство близости a-точек мероморфных функций.** Фактически, в силу произвольности набора значений $a_1, a_2, \ldots, a_q$ выше мы доказали следующий результат.

Теорема 1.3. *Для мероморфной в* $|z|<\infty$ *функции* $w(z)$ *в круге* $|z|\leqslant r$, $r\overline{\in}E$, *можно указать* $\Phi(r)$ *таких областей* $E_l(r)$, *удовлетворяющих условиям* I, II, V *теоремы* 1.1, *что для произвольного набора значений* $a_\nu\in\overline{\mathbf{C}}$, $\nu=1, 2,\cdots, q$ $(a_i\neq a_j$ *при* $i\neq j)$ *выполняется оценка*

$$\sum_{\nu=1}^{q}n^*(r,a_\nu)-\sum_{\nu=1}^{q}n_1^*(r,a_\nu)\geqslant(q-2)A(r)-Q(r). \tag{1.10}$$

Ранее был доказан несколько более слабый результат, отличающийся от предыдущего лишь тем, что множество $E_l(r)$ зависело от заданного набора значений $a_\nu\in\overline{\mathbf{C}}$, $\nu=1, 2,\cdots, q$ (см. [4], теорема 1).

Как уже отмечалось, из неравенства (1.10) следует усиление соотношения дефектов и, по существу, усиление второй основной теоремы теории распределения значений, так что теоремы 1.1, 1.2, 1.3 позволяют получить один из основных выводов теории распределения значений, вытекающий из соотношения дефектов: количества a-точек и b-точек функции $w(z)$, лежащие в круге $|z|\leqslant r$, примерно равны, «близки», для «большинства» комплексных значений a и b. В целом же теоремы 1.1, 1.2, 1.3 отражают более общую и точную закономерность распределения a-точек функции $w(z)$ — «свойство близости a-точек», которое заключается в том, что помимо близости количества этих a-точек и b-точек «близки», одновременно, их модули и аргументы. В менее общей форме эта закономерность была обнаружена ранее в [5] (см. также [6], § 3) и уточнена в [4].

Поясним качественно это свойство, несколько огрубленно представляя явления, о которых говорим.

Вторые основные теоремы теорий Р. Неванлинны и Л. Альфорса утверждают, что общее количество $a_1, a_2, \ldots, a_q$-точек, лежащих в круге $|z| \leqslant r$, превышает $(q-2)\ A(r)$. Теоремы 1.1, 1.2, 1.3 выявляют, что можно указать в $|z| \leqslant r$ области $E_i(r)$ $(i=1, 2, \cdots, \Phi(r)) \simeq A(r)$, общее количество $a_1, a_2, \cdots, a_q$-точек в которых уже превышает $(q-2)\ A(r)$. Более того, в среднем, в каждой области $E_i(r)$ функция $w(z)$ принимает каждое значение $a_1, a_2, \cdots, a_q$ за исключением возможно двух из них. Последнее, в силу того, что, в среднем, диаметры областей $E_i(r)$ „малы“ — меньше чем $\frac{\varphi(r}{A^{1/2}(r)} r$*, означает, что эти $a_1, a_2, \cdots, a_q$-точки располагаются близко друг от друга и лежат как бы кучками. Если, например, $z_i(a_{\nu_1})$ и $z_i(a_{\nu_2})$ a_{ν_1} и a_{ν_2}-точки, которые принадлежат $E_i(r)$, то в силу предыдущего

$$|z_i(a_{\nu_1}) - z_i(a_{\nu_2})| \leqslant \frac{K\varphi(r)}{A^{1/2}(r)}\ r,$$

т. е. расстояния между ними стремятся к нулю при возрастании i, если порядок функции больше двух (заметим, что $\varphi(r)$ может иметь произвольно медленный рост); если же порядок функции меньше двух, то, во всяком случае, при возрастании i стремится к нулю угол, под которым видны эти точки $z_i(a_{\nu_1})$, $z_i(a_{\nu_2})$. Так что в любом случае $a_1, a_2, \cdots, a_q$-точки, лежащие в $\bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} E_i(r)$, оказываются „близки“ друг к другу, откуда и название — „свойство близости a-точек“.

Укажем еще, что несколько более подробный анализ этого свойства и методические замечания о его применимости приводятся в [4].

4°. **Выделение однолистных областей на римановой поверхности функции w^{-1}.** Известные нами применения теории однолистных функций к изучению распределения корней мероморфных носят эпизодический характер и действуют в случаях, когда риманову поверхность функции $w^{(-1)}$ удается эффективно разбить на листы; образно говоря, выделить из римановой поверхности однолистные области, в которых $w^{(-1)}$ однозначна, и, следовательно, осуществляет взаимно однозначное отображение. Как на это неоднократно указывалось в литературе, вряд ли в общем случае возможно эффективное разбиение на листы.

Представляется, что в общем случае такое разбиение на листы могла бы успешно заменить информация следующего типа: выделение из римановой поверхности F_r по возможности большего числа однолистных областей, в которых $w^{(-1)}$ однозначна и которые образованы удалением из плоскости по возможности минимального количества областей с малыми диаметрами. Если, при этом, области, в которых $w^{(-1)}$ однозначна, «почти» исчерпывают поверхность F_r, то «почти» на всей поверхности могут действовать теоремы теории однолистных функций.

---

* Это вытекает из предложений I и V теоремы 1.1.

Ввиду того, что удаляемые области могут являться окрестностями точки бесконечность, рассмотрение задачи естественно проводить на поверхности $\bar{F}_r$ над сферой, с тем, чтобы уметь оценивать «малость» удаляемых окрестностей бесконечности.

Решение поставленного вопроса вытекает из утверждений II—IV теоремы 1.2 и формулируется у нас как

Теорема 1.4. *Из поверхности $\bar{F}_r$ можно выделить $\Phi(r)$ однолистных областей WE_i, (WE_i — область, полученная стереографическим отображением на сферу области $w(E_i(r))$), замыкание каждой из которых является сферой с некоторым числом k_i удаленных из сферы односвязных областей Δ_j^i, $j = 1, 2, \ldots, k_i$, причем для суммы k_i выполняется предложение IV теоремы 1.2, а диаметры областей Δ_{ij} стремятся к нулю при $r \to \infty$, $r \bar{\in} E$.*

Рассмотрим подробнее этот результат. В силу предложения I теоремы 1. 2 и $\rho(\Delta_j^i) \to 0$, $r \to \infty$, $r \bar{\in} E$, и определения $A(r)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} J_0(WE_i) = \pi A(r) + o[A(r)], \quad r \to \infty, \quad r \bar{\in} E,$$

где $J_0(x)$ — сферическая площадь x. Таким образом, совокупность наших однолистных областей получена выбрасыванием из $\bar{F}_r$ множеств пренебрежительно малой площади, так что фактически мы выделили максимальное число (с точностью до $o[A(r)]$ точное) таких однолистных областей. Из предложения IV вытекает, что каждая из этих областей является сферой с, в среднем не более чем четырьмя, выброшенными из сферы областями Δ_j^i. Число четыре здесь также точное, как показывает пример функции Вейерштрасса, для которой все точки $\bar{F}_r$, проектирующиеся в определенные точки a_1—a_4, являются алгебраическими точками ветвления и, следовательно, при выделении из $\tilde{F}_r$ любой однолистной области, совпадающей со сферой с некоторым числом удаленных «малых» областей, необходимо удалить из сферы не менее четырех «малых» окрестностей точек a_1—a_4, в которых $w^{(-1)}$ не однозначна.

Таким образом, из $\bar{F}_r$ выделено максимальное число однолистных областей, замыкания которых совпадают со сферой, в среднем, не более чем четырьмя выброшенными областями малых диаметров.

Здесь отметим лишь, что полученные результаты позволяют получить различные оценки производных функции w^{-1} на множествах $w(E_i(r))$, т. е. на всем $\tilde{F}_r$, исключая множества малой сферической площади.

5° О структуре первой основной теоремы теории поверхностей наложения Л. Альфорса. Пусть D—область на сфере Римана, $J(r, D)$—сумма площадей всех частей поверхности $\bar{F}_r$, лежащих над D; $S(r, D) = \frac{J(r, D)}{J_0(D)}$—„среднее число листов поверхности $\bar{F}_r$ над D".

Первая основная теорема теории поверхностей наложения Л. Альфорса утверждает:

$$|A(r)-S(r, D)|=O[L(r)]=o[A(r)],\ r\to\infty,\ r\overline{\in} E.$$

Теорема показывает, что каждая область D на сфере накрывается поверхностью $\widetilde{F}_r$ с одинаковой «плотностью». Однако в ней не отражена структура множеств, накрывающих область D.

Из предложений II, III, IV теоремы 1.2 вытекает

$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} J_0(WE_i\cap D)=J_0(D)\Phi(r)-\sum_{i=1}^{\Phi(r)} J_0(\bigcup_j(\Delta_j^i\cap D))=$$

$$=J_0(D)\Phi(r)+o[A(r)],\ r\to\infty,\ r\overline{\in} E,$$

откуда с учетом предложения I имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{\Phi(r)}\frac{J_0(WE_i\cap D)}{J_0(D)}-A(r)\right|=o[A(r)],\ r\to\infty,\ r\overline{\in} E.$$

Это соотношение выявляет, что из частей поверхности $\widetilde{F}_r$, проектирующихся в D, можно выбросить некоторое множество, суммарная площадь которой есть $o[A(r)]$, $r\to\infty$, $r\overline{\in} E$, так что оставшееся множество распадается на примерно $A(r)$ однолистных областей, среднее число листов которых уже примерно равно $S(r, D)$, чем усиливается первая основная теорема Л. Альфорса.

6°. **Теоремы 1.1 и 1.1′ как теоремы о кругах наполнения.** В 1924 году Мийю доказал [7] следующий результат: для мероморфной в $|z|<\infty$ функции $w(z)$ и произвольных последовательнотей $\varepsilon_n\to 0$ и $\beta_n\to 0$ ($\varepsilon_n>0$, $\beta_n>0$), можно указать в z-плоскости такую последовательность $z_n\to\infty$, что образ каждого кружка $|z-z_n|<\varepsilon_n|z_n|$ при отображении $w(z)$ и последующем стереографическом отображении получнного множества на риманову сферу, сферические диаметры которых не превосходят β_n.

Отсюда легко вывести, что в указанных кружках z-плоскости, называемых кругами наполнения, функция $w(z)$ принимает бесконечно часто все значения $a\in\overline{\mathbb{C}}$ за исключением двух, что усиливает теорему Пикара, выявляя структуру множеств, в которых эта теорема верна.

В последнем плане, очевидно, наибольший интерес представляет вопрос о том, сколь малыми могут быть круги наполнения, т. е. круги в z-плоскости, радиусы которых есть $o(|z_n|)$, $|z_n|\to\infty$, где z_n—центры этих кругов, и образ каждого из которых заполняет всю сферу за исключением двух кружков, диаметры которых стремятся к нулю при $n\to\infty$. порядка. Тогда

Уточняя более ранний результат Мийю [8], Дюфренуа доказал [9]: пусть $w(z)$—мероморфная в $|z|<\infty$ функция конечного нс нулевого А. для любой функции $\varphi(r)$, монотонно стремящейся к $+\infty$ при $r\to\infty$, существует последовательность кругов наполнения

$$|z - z_n| < \frac{\varphi(|z_n|)\,|z_n|}{\sqrt{U^*(|z_n|)}}, \tag{1.11}$$

где $U^*(r) = r^{\rho(r)}$, а $\rho(r)$ - уточненный порядок функции $A(r)$.
чений a, выполняется неравенство

В. можно указать в z-плоскости последовательность кругов наполнения с центрами z_n, что для любого $a \in \overline{\mathbf{C}}$, исключая не более двух зна-

$$n^*(z_n, a) > \frac{1}{\varphi(|z_n|)} U^*(|z_n|), \quad n \to \infty, \tag{1.12}$$

где $n^*(z_n, a)$ — количество a-точек в n-ом круге.

Если в определении кругов наполнения допустить, что образы их заполняют всю сферу за исключением некоторого числа k кружков на сфере, где k — не обязательно меньше или равно двум, как в классическом случае, то области $E_i(r)$ с диаметрами $\leqslant \dfrac{\varphi(r)}{A^{1/2}(r)} r$ как раз выполняют роль таких кругов наполнения, причем в дополнение к процитированному результату А оказывется, что в $|z| \leqslant r$ можно указать $\Phi(r)$ таких кругов. Более того, в этих $\Phi(r)$ кругах, согласно пункту 2, выполняется второе основное предложение теории распределения значений (сравните с неравенством (1.12)).

Поскольку число $\Phi(r)$ асимптотически предельно точное (см. п. 4), то может быть последнее понимание кругов наполнения не менее естественно.

Если же следовать классическому варианту $k \leqslant 2$, то учитывая предложения I и IV теоремы 1.1 получим, что количество $\Phi_1(r)$ тех областей $E_{1,i}(r)$ из множества $\{E_i(r)\}_{i=1}^{\Phi(r)}$, для которых $k_i \leqslant 2$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi_1(r) \geqslant \frac{1}{3} A(r) - o[A(r)], \quad r \to \infty, \ r \overline{\in} E. \tag{1.13}$$

Следовательно, из теоремы 1.1′ вытекает

Теорема 1.1″ (о кругах наполнения). *В круге $|z| \leqslant r$, $r \overline{\in} E$, можно указать $\Phi_1(r)$ областей $E_{1,i}(r)$ (кругов наполнения), диаметр каждой из которых удовлетворяет неравенству*

$$d(E_{1,i}(r)) \leqslant \frac{K\varphi(r)}{A^{1/2}(r)} r, \tag{1.14}$$

и образ каждой из которых является сферой с не более чем двумя исключенными из сферы кружками, диаметры которых не больше, чем $1/\varphi^8(r)$. Количество областей $\Phi_1(r)$ удовлетворяет неравенству (1.13).

Теорема 1″ уточняет предложение А, указывая количество кругов наполнения (точное с точностью до постоянной 1/3).

В силу рассуждений А отсюда следует предложение: для любого $a \in \overline{\mathbf{C}}$, исключая не более чем два значения a, выполняется неравенство

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{n'(r, a)}{A(r)} \geqslant \frac{2}{9},$$

где $n'(r, a)$ — количество a-точек в $\{E_{1,i}(r)\}_{i=1}^{\Phi_1(r)}$ (сравните с неравенством (1.12)).

7°. **Теоремы о лучах Бореля.** Известная теорема Жулиа утверждает: для целой функции $w(z)$ существует такой луч $J=\{z:\arg z=\varphi_0,\ |z|>0\}$, что для любого $\beta>0$ в угловой области $\Delta_\beta(J)=\{z: |\arg z-\varphi_0|<2\pi\beta,\ |z|>0\}$ функция $w(z)$ принимает бесконечное число раз каждое значение $a\in\overline{C}$, исключая не более двух значений a. Этот результат уточняет теорему Пикара.

Уточняя известную теорему Бореля в духе теоремы Жулиа Валирон доказал [10] (см. также [11], гл. XIII): Пусть ρ — порядок мероморфной в $|z|<\infty$ функции $w(z)$, $0<\rho<\infty$. Тогда существует такой луч J (луч Бореля), что для любого $\beta>0$ в угловой области $\Delta_\beta(J)$ для всех $a\in\overline{C}$, исключая не более двух значений a, выполняется

$$\sum_{z_\nu(a)\in\Delta_\beta(J)}\frac{1}{|z_\nu(a)|^{\rho-\varepsilon}}=\infty, \tag{1.15}$$

где $z_\nu(a)$ — a-точки функции $w(z)$, $\varepsilon>0$.

При $\beta=\pi$ — это теорема Бореля; для целой функции с $0<\rho<\infty$ — это уточняет теорему Жулиа.

Обозначим

$$n_\beta(J,r,a)=\sum_{z_\nu(a)\in\Delta_\beta(J)\cap\{z:|z|<r\}}1;\quad \rho(\psi(r))=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\psi(r)}{\ln r}$$

порядок функции $\psi(r)$. Учитывая, что $n(r,a)\geqslant n_\beta(J,r,a)$ и в силу известного соотношения: если количество a-точек бесконечно, то выражение

$$\sum_{z_\nu(a)\in\Delta_\beta(J)}\frac{1}{|z_\nu(a)|^{\rho(n_\beta(J,r,a))+\alpha}}$$

сходится при $\alpha=\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ и расходится при $\alpha=-\varepsilon$, можем следующим образом переформулировать теорему Валирона: при предположениях этой теоремы для любого $a\in\overline{C}$, исключая не более двух значений a, выполняется неравенство

$$\rho(n_\beta(J,r,a))\geqslant\rho. \tag{1.16}$$

По-видимому наиболее точный результат, в котором сравниваются не порядки функций $n_\beta(J,r,a)$ и $T(r)$, а сами эти функции, следующий [12] в теореме Валирона неравенство (1.16) можно заменить оценкой

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n_\beta(J,r,a)}{U(r)}>0, \tag{1.17}$$

где $U(r)=r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ — уточненный порядок функции $T(r)$.

Заметим, что из последней оценки еще не следует неравенство (1.16).

Однако и этот результат не может являться предельным. Это почти очевидно, так как согласно теории Л. Альфорса точные оценки числа корней $n(r,a)$ даются посредством характеристики $A(r)$, точно так же как оценки $N(r,a)$ через $T(r)$ и поэтому, в общем случае, оценки $n_\beta(J,r,a)$ через уточненный порядок функции $T(r)$ не могут быть точными.

Следующий наш результат позволяет сразу усилить предыдущие, причем с точностью до постоянных (а не порядка) оценки уже не улучшаемы.

Теорема 1.5. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z|<\infty$ функция порядка $\rho>0$; ε_n', ε_n, $n=1, 2,\cdots$ — монотонно убывающие последовательности, стремящиеся к нулю $\varepsilon_n<\varepsilon_n'$. Тогда существует такая последовательность вложенных друг в друга угловых областей*

$$\Delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(\varphi(n)),\ n=1, 2\cdots\ (\Delta_\alpha(\varphi)=\{z: |\arg z-\varphi|<2\pi\alpha,\ |z|>0\}),$$

что для любого n на некоторой последовательности $r_k'(n)\to\infty$ выполняются соотношения

$$\Phi_{\varepsilon_k'+2\varepsilon_n}(r_k'(n)\varphi(n))\geqslant\varepsilon_n' A(r_k'(n))+o[A(r_k'(n))],\ n=1, 2,\cdots \qquad (1.18)$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln A(r_k(n))}{\ln r_k(n)}=\rho,\ n=1, 2,\cdots, \qquad (1.19)$$

где $\Phi_\alpha(r, \varphi)$ — количество тех областей $E_l(r)$ из теоремы, l' замыкания которых целиком лежат в $\Delta_\alpha(\varphi)\cap\{z: |z|\leqslant r\}$.

Заметим, что в силу предложений I теоремы 1.1 и 1.2' величину $A(r)$ можно заменить на $\Phi(r)$ и рассматривать последнюю как характеристику. Аналогично, рассматривая $\Phi_\alpha(r, \varphi)$ как характеристику в угловой области $\Delta_\alpha(\psi)$ и применив к областям $E_l(r)$ рассуждения A, получим следующий аналог соотношения дефектов для последовательнсти вложенных друг в друга областей $\Delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}$, т. е. следующее

Следствие 1.1. В условиях теоремы 1.5, при заданном n и для любого $a\in\overline{\mathbf{C}}$, исключая, быть может, не более чем счетное множество значений a, выполняется неравенство

$$\delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(a)\overset{\text{def}}{=}1-\overline{\lim_{r_k'(n)\to\infty}}\frac{n_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(a, r_k'(n), \varphi(n))}{\Phi_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(r_k'(n), \varphi(n))}\leqslant 0. \qquad (1.20)$$

где $n_\alpha(a, r, \varphi)$ — количество a-точек, принадлежащих множеству $\{E_l(r)\}\cap\Delta_\alpha(\varphi)\cap\{z: |z|\leqslant r\}$, и выполняются неравенства

$$\sum_{(a)}\delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(a)\leqslant 2,\ n=1, 2,\cdots. \qquad (1.21)$$

Заметим, что из неравенств (1.18) и (1.20) вытекает оценка

$$\overline{\lim_{r_k'(n)\to\infty}}\frac{n_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(a, r_k'(n), \varphi(n))}{A(r_k'(n))}\leqslant\varepsilon_n', \qquad (1.22)$$

справедливая для любого $a\in\overline{\mathbf{C}}$, исключая, быть может, не более чем счетное множество значений a, и из (1.18), (1.21) вытекает оценка

$$\overline{\lim_{r_k'(n)\to\infty}}\frac{v_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}(a, r_k'(n), \varphi(n))}{\Phi_{\varepsilon_n+2\varepsilon_n}(r_k'(n), \varphi(n))}\geqslant\frac{2}{3}\varepsilon_n. \qquad (1.22')$$

справедливая для всех $a \in \overline{C}$ за исключением, быть может, двух значений a.

Геометрические соображения подсказывают, что последний предел должен быть наименьшим для функций, a-точки которых «распределяются очень равномерно по аргументам». Для таких функций вместо ε_n' могло бы стоять $\varepsilon_n' + \frac{\varepsilon_n}{\pi}$ что в силу произвольности ε_n указывает на предельную точность оценки (1.22).

Пусть $\varphi = \lim \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ определяется в теореме 1.5. Предел существует, так как области $\Delta_{\varepsilon_n'+2\varepsilon_n}$ вложены друг в друга. Тогда, в силу рассуждений А, для любого $\varepsilon > 0$ в $\Delta_\varepsilon(\varphi)$ выполняется неравенство (1.20) с заменой $\frac{2\pi}{2^n} + 2\varepsilon_n$ на ε и $r_k'(n)$ на $r_k(\varepsilon)$. Выберем $\varepsilon_n', \varepsilon_n = \frac{\pi}{2^n}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Из геометрических соображений следует, что область $\Delta_\varepsilon(\varphi)$ содержит в себе область $\Delta_{\frac{1}{2^{n+1}}+2\varepsilon_{n+1}}(\varphi(n))$, так что

$$\Phi_\varepsilon(r_k'(n+1), \varphi) > \Phi_{\frac{1}{2^{n+1}}+2\varepsilon_{n+1}}(r_k'(n+1), \varphi(n+1)).$$

Отсюда, из неравенства (1.18) и в силу выбора ε_n вытекает

Теорема 1.6. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция порядка $\rho > 0$. Тогда существует такой луч $\{z : \arg z = \varphi, |z| > 0\}$, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется*

$$\sum_{(a)} \delta_\varepsilon(a) = \sum_{(a)} \left(1 - \lim_{r_k(\varepsilon)\to\infty} \frac{n_\varepsilon(a, r_k(\varepsilon), \varphi)}{\Phi_\varepsilon(r_k(\varepsilon), \varphi)}\right) \leqslant 2, \tag{1.23}$$

причем

$$\Phi_\varepsilon(r_k(\varepsilon), \varphi) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} A(r_k(\varepsilon)) + 0[A(r_k(\varepsilon))], \quad r_k(\varepsilon) \to \infty \tag{1.24}$$

и

$$\lim_{r_k(\varepsilon)\to\infty} \frac{\ln A(r_k(\varepsilon))}{\ln r_k(\varepsilon)} = \rho. \tag{1.25}$$

Предыдущие рассуждения показывают, что если бы вместо $\varepsilon/2$ в неравенстве (1.24) стояло бы ε, то теорема была бы точная.

Из теоремы 1.5 вытекает

Следствие 1.2. Существует такой луч $\{r : \arg z = \varphi, |z| > 0\}$ что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\overline{\lim_{r_k(\varepsilon)\to\infty}} \frac{n_\varepsilon(a, r_k(\varepsilon), \varphi)}{A(r_k(\varepsilon))} \geqslant \frac{1}{6}\varepsilon \tag{1.26}$$

выполняется для всех a, исключая, быть может, не более двух a.

Из неравенств (1.25) и (1.26) немедленно вытекает теорема Валирона (сравните неравенства (1.26) и (1.17)).

Еще раз отметим, что $\Phi_\varepsilon(r_k(\varepsilon), \varphi)$ — это количество областей $E_l(r)$ в $\Delta_\varepsilon(\varphi) \cap \{z: |z| \leqslant r_k(\varepsilon)\}$, т. е. количество областей, которые можно рассматривать как круги наполнения, если в определении последних допустить $k_l > 2$.

В классическом случае ($k \leqslant 2$) вместо теоремы 1.6 имеет место следующая

Теорема 1.7. *В условиях теоремы* 1.6 *одновременно выполняются соотношения*

$$\sum_{(a)} \delta_{1,\varepsilon}(a) = \sum_{(a)} \left(1 - \varlimsup_{r_k(\varepsilon)\to\infty} \frac{n_{1,\varepsilon}(a, r_k(\varepsilon), \varphi)}{\Phi_{1,\varepsilon}(r_k(\varepsilon), \varphi)}\right) \leqslant 2,$$

$$\Phi_{1,\varepsilon}(r_k(\varepsilon), \varphi) > \frac{\varepsilon}{6} A(r_k(\varepsilon)) + o[A(r_k(\varepsilon))], \quad r_k(\varepsilon) \to \infty$$

и неравенство (1.25), *где* $\Phi_{1,\varepsilon}(r_k(\varepsilon), \varphi)$ — *количество областей* $E_{1,l}(r)$, *целиком лежащих в* $\Delta_\varepsilon(\varphi) \cap \{z: |z| \leqslant r_k(\varepsilon)\}$, *а* $n_{1,\varepsilon}(a, r_k(\varepsilon), \varphi)$ — *количество а-точек, лежащих в*

$$\{E_{1,l}(r)\} \cap \Delta_\varepsilon(\varphi) \cap \{z: |z| \leqslant r_k(\varepsilon)\}.$$

8°. Некоторые обобщения и аналоги. Для краткости изложения результатов работы проводились только в случае мероморфных в $|z| < \infty$ функций. Однако все без исключения теоремы настоящей работы верны также в случае, когда $w(z)$—псевдомероморфная в $|z| < \infty$ (т. е. является суперпозицией мероморфной функции и K—квазиконформного отображения), если в каждой из этих теорем, в оценках диаметров множеств $E_l(r)$ (или $\tilde{E}_l(r)$, $E_{1,l}(r)$), вместо постоянной K поставить $\mathrm{K}K$.

Если функция $w(z)$ мероморфна в $|z| < R < \infty$ и для нее справедливо $\varlimsup_{r\to R} (R-r)A(r) = +\infty$, то все теоремы из пунктов 1°—6° справедливы для этих функций, если в них множества $(0, \infty)\setminus E$ заменить некоторой последовательностью $r_k \to R$. С некоторыми изменениями можно изложить для таких функций результаты пункта 7°.

Относительно таких обобщений на псевдомероморфные функции и их аналогов в случае конечного круга см. рассуждения, приводимые после доказательства теорем 1.1 и 1.2.

9°. Литературные примечания. Как уже отмечалось выше, тематика о кругах наполнения и лучах Жулиа, Бореля развивалась менее систематически, чем теории Р. Неванлинны и Л. Альфорса. Между тем 1) рассмотрение областей $E_l(r)$, выполняющих роль кругов наполнения, причем таких, что функция $w(z)$ в них однолистна, 2) установление своеобразных аналогов соотношения дефектов для угловых областей, 3) выявление новых закономерностей — свойства близости a-точек, свойства римановой поверхности распадаться на однолистные области, 4) точность описаний областей $E_l(r)$ и точность следствий, позволяют надеяться, что возврат к указанной тематике может оказаться плодотворным. Поскольку за последние времена даже в обстоятельных обзорах этой тематике уделялось очень мало места, мы приведем ниже список работ по кругам наполнения, лучам Жулиа, Бореля, ограничиваясь (учитывая характер настоящей работы) лишь очень краткими пояснениями предметов их исследования.

Рассмотрение различных характеристик при описании количеств a-точек в кругах наполнения и угловых областях, привело к дополнительному исследованию этих количеств (см. [8], [13]—[24]) в случаях, когда рассматриваются функции бесконечного или нулевого порядка. (В нашем случае характеристика $A(r)$ одинаково хорошо описывает ситуацию как при функциях конечного, так и при функциях бесконечного порядка).

В ряде работ [21], [25]—[28] изучаются распределения a-точек в угловых областях в зависимости от роста функции по лучу.

Функции, заданные в угловой области, рассмотрены в работах [12], [29], [30].

В работе [31] была предпринята попытка рассмотреть вместо a-точек области D. Луч, в произвольно малой окрестности которого накапливаются прообразы областей D, был назван лучом Альфорса. Детальное изучение таких лучей см. в [32]—[33].

Замена a-точек на функции малого роста была изучена в работах [34], [35].

Случай функций, мероморфных в конечном круге, приведен в [36], [37].

В 50-х годах появились работы Мийю [38]—[40] о лучах, являющихся лучами Бореля и для функции и для ее последовательных производных. Эти результаты были в дальнейшем развиты в направлении лучей Бореля максимального рода [41] и точек Бореля порядка λ [42].

Количества лучей Жулиа, Бореля, точек Бореля для различных классов функций изучались в работах [12], [43]—[47]; связь количества лучей Бореля и дефектных значений — в [48], [49]; построение заданных особых направлений — в [50].

Неевклидовые круги наполнения рассматривались в работах [51]—[54]; «евклидовые» аналоги $M^{(1)}$ и $\mu^{(1)}$-точек — $M^{(p)}$ и $\mu^{(p)}$-точки и их последующие обобщения и характеристики — в [55]—[59]; случаи алгебраических функций — в [60], [61]; связь кругов наполнения и асимптотического поведения функций — в [62]—[64]; ряд разнообразных задач — в [65]—[70].

В заключение отметим, что три основных метода изучения «кругов» и «лучей», основанных на 1) теории нормальных семейств, 2) теории поверхностей наложения, 3) оценках мероморфных функций, изложены, соответственно, в книгах [71], [11], [72].

§ 2. п. 1. Сведения из теории поверхностей наложения Л. Альфорса

Одним из основных моментов в доказательстве результатов работы является построение областей с определенными свойствами, зависящими от функции $w(z)$ и заданного значения r $(z = re^{i\varphi})$. При этом мы используем теорию Л. Альфорса и нам нужно иметь значения постоянных, фигурирующих в его теоремах.

Отметим, что в случае, когда рассматриваемые в теоремах Л. Альфорса области являются кругами, подсчет постоянных приводится в работе [73], однако этот подсчет недостаточен в нашем случае, поскольку области у нас в основном многоугольники. Ниже мы будем пользоваться подсчетом, проведенным в работе [4].

Предварительно сделаем некоторые допущения, которые будем иметь в виду на протяжении всего доказательства.

А) Конечносвязная область на сфере у нас — область, полученная выбрасыванием из сферы конечного числа односвязных, с непересекающимися замыканиями областей с кусочно аналитическими границами.

В) Рассматриваемые далее поверхности наложения над сферой (или областью на сфере) являются w-образами лежащих в $|z| < R \leqslant \infty$ односвязных областей с гладкими границами. Полагаем, что эти поверхности наложения не имеют алгебраических точек ветвления над линиями конструкций, приводимых при доказательстве. Этого всегда можно добиться небольшой деформацией поверхности (что то же—деформции области в z-плоскости) произвольно мало меняющей фигурирующие в теоремах величины.

Теорема А (первая освновная теорема Л. Альфорса). *Пусть F_0 — конечносвязная область на сфере Римана s (в частности, сама сфера s); F — конечная поверхность наложения над F_0; $S(F_0) = \frac{J}{J_0}$, где J — площадь поверхности наложения над F_0: J_0—площадь области F_0; D— область, лежащая внутри F_0; $S(D) = \frac{J(D)}{J_0(D)}$, где $J(D)$ — сумма площадей всех частей поверхности наложения, лежащих над D, $J_0(D)$ — площадь D. Тогда существует конечное число $h_1(F_0)$, зависящее лишь от F_0 такое, что*

$$|S(F_0) - S(D)| < \frac{h_1(F_0)}{J_0(D)} L,$$

где L — длина относительной границы F, а

$$h_1(F_0) = 2 \max \left\{ \sup_{\gamma} \frac{C(\gamma)}{|\gamma|}, \frac{\pi}{\varkappa} \right\},$$

где γ — кривая длины $|\gamma| < \varkappa$, целиком лежащая в области F_0 кроме двух концов, расположенных на одной из связных компонент границы F_0, $C(\gamma)$—меньшая из площадей двух областей, на которые γ делит область F_0, $\varkappa$ — минимальное расстояние между граничными компонентами области F_0 ($\varkappa$ положим равным π, если область F_0 односвязна).

Скажем, что простая (замкнутая или открытая) кривая $\beta \in \overline{F_0}$ сильно регулярна, если существуют такие числа $k > 1$ и $d < \varkappa/2$, что если для любой точки $P \in s$ обозначить $U_p(d')$ множество точек сферы s, отстоящих от P на расстоянии d', то при $d' < d$ суммарная длина частей кривой β, лежащих в $U_p(d')$, мажорируется величиной kd',

Теорема A′ (первая основная теорема Л. Альфорса). *Пусть F_0 — конечносвязаная область на сфере Римана s (в частности, сама сфера s), притом полагаем, что если $F_0 \neq s$, то граничные кривые области F_0 сильно регулярны; $\beta \subset F_0$ — кусочно аналитическая и сильно регулярная дуга; $S(\beta) = \dfrac{L(\beta)}{L_0(\beta)}$, где $L(\beta)$ — с мма длин всех лежащих над β дуг поверхности F; $L_0(\beta)$ — длина кривой β;*

$$h'(F_0, \beta) = 2\max\left\{\sup_{\gamma}\frac{c(\gamma)}{|\gamma|}, \frac{L_0(\beta)}{d}, k\right\},$$

где γ — кривая длины $|\gamma| < d$, целиком лежащая в области F_0, кроме двух концов, расположенных на одной из связных компонент границы F_0, $c(\gamma) = \min \lambda'(\gamma), \lambda''(\gamma))$, где $\lambda'(\gamma)$, $\lambda''(\gamma)$ — длины частей кривой β, лежащих в двух областях, на которые γ разделяет область F_0. Тогда существует такая постоянная $h_2(F_0, \beta)$, зависящая только от F_0 и β, что выполняется неравенство

$$|S(F_0) - S(\beta)| \leqslant h_2(F_0, \beta)\, L,$$

а h_2 следующим образом зависит от F_0 и β.

1) *Если β — кривая, разбивающая область F_0 на две части и D — та из ограничиваемых кривой β частей F_0, которая имеет меньшую площадь, то*

$$h_2(F_0, \beta) = h_{2,1}(F_0, \beta) = \frac{2h_1(F_0)\, h'(F_0, \beta)}{J_0(D)};$$

2) *Если β не разбивает область F_0, то дополнив ее до кривой β', удовлетворяющей условию 1), имеем*

$$h_2(F_0, \beta) = h_{2,2}(F_0, \beta) = \frac{2h_1(F_0)\, h'(F_0, \beta')}{J_0(D)} + \frac{h'(F_0, \beta')}{L_0(\beta)}.$$

Теорема B (вторая основная теорема Л. Альфорса). *Пусть D_i $(i = 1, 2, \dots, q)$, $(q > 3)$ — односвязные области на s, ограниченные кусочно-аналитическими сильно регулярными кривыми, $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \varnothing$, при $i \neq j$. Тогда для любой конечной односвязной поверхности наложения F над римановой сферой s имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{q} [S(s) - n(D_i)] + \sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leqslant$$
$$\leqslant 2S(s) + h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q)\, L,$$

где $n(D_i)$ — количество островов поверхности F над D_i с учетом кратности, $n_1(D_i)$ — сумма порядков всех островов над D_i, а $h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q)$ определяется следующим образом.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ — кусочно аналитические, сильно регулярные кривые на s, соединяющие области $D_1, D_2, \cdots, D_q$ так, что после проведения сечений по $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ область $F_0 = s \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \overline{D}_i$ распадается на две односвязные области F_0' и F_0''. Тогда

$$h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q) = 4q \max \{(J_0(s \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \bar{D}_i))^{-1};$$

$$\max_i h_2(F_0', \beta_i); \max_i h_2(F_0'', \beta_i); \max_i h_2(F_0, \beta_i)\}.$$

п. 2. Построение областей $B(n, i)$ — „скелетов дракона"

Пусть $n_0(X)$ — количество простых (с кратностью единица) островов поверхности F над областью X.

Наряду со второй основной теоремой Л. Альфорса мы используем следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{q} [S(s) - n_0(D_i)] \leqslant 4S(s) +$$

$$+ \left\{ q \frac{h_1(s)}{\min_i J_0(D_i)} + 2h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q) \right\} L. \qquad (2.1)$$

Докажем его. Из теоремы В, учитывая очевидное неравенство $n(X) - n_0(X) \leqslant 2n_1(X)$, имеем

$$\sum_{i=1}^{q} [S(s) - n_0(D_i)] - \sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leqslant 2S(s) + h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q) L.$$

Учитывая, что

$$S(s) - n(D_i) \geqslant \frac{h_1(s)}{J_0(D_i)} L, \ i = 1, 2, \cdots, q,$$

из теоремы В имеем

$$\sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leqslant 2S(s) + \left\{ q \frac{h_1(s)}{\min_i J_0(D_i)} + h_0(D_1, D_2, \cdots, D_q) \right\} L, \qquad (2.1')$$

так что из последних соотношений получаем неравенство (2.1).

Точке на римановой сфере сопоставим то же значение (положим a), в которое она проектируется при стереографическом отображении сферы на плоскость, ρ-окрестность точки a на сфере, т. е. множество точек, отстоящих от точки a на сферическом расстоянии, меньшем числа ρ, обозначим через $D(\rho, a)$.

Для описания областей на сфере будем пользоваться полярными координатами в трехмерном пространстве — (φ, θ, ρ), где φ показывает угол в горизонтальной плоскости, θ — угол в вертикальной плоскости, ρ — модуль точки.

В дальнейшем у нас n — четное число ($n > 100$).

Определим $\Gamma(k, \varphi_1)$ как кривые со следующими параметрическими представлениями:

$$\Gamma(k, \varphi_1) = \{\varphi(t), \theta(t), \rho(t)\},$$

где φ_1 — целое число, большее единицы

$$\varphi(t) = \varphi(k, \varphi_1, t) = 2\pi t + \frac{\pi k}{n^{\varphi_1 - 1} - 1}; \ \theta(t) = \theta(k, \varphi_1, t) = \frac{\pi}{2n} t;$$

$$\rho(t)=\frac{1}{2};\ t\in[-(n-5);\ n+5],\quad k=0,1,\cdots,n^{\varphi_1-1}-1.$$

Пусть

$$\Gamma^*(k,\varphi_1)=\Gamma(k,\varphi_1)\diagdown\left\{D\left(\frac{9}{n},\infty\right)\cup D\left(\frac{9}{n},0\right)\right\},\ k=0,1,\cdots,n^{\varphi_1-1}-1;$$

G — та из двух односвязных областей на сфере, ограниченных кривыми $\Gamma^*(0,\varphi_1)$, $\Gamma^*(n^{\varphi_1-1}-1,\varphi_1)$ и частями границы $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$ и $D\left(\frac{9}{n},0\right)$, соединяющими концы кривых $\Gamma^*(0,\varphi_1)$, $\Gamma^*(n^{\varphi_1-1}-1,\varphi_1)$, которая содержит кривые $\Gamma^*(k,\varphi_1)$, $k=1,2,\cdots,n^{\varphi_1-1}-2$. Обозначим через G_m, $m=1,2,\cdots,n^{\varphi_1-1}/2$ области, принадлежащие G и ограниченные кривыми $\Gamma^*(2m-2,\varphi_1)$, $\Gamma^*(2m-1,\varphi_1)$ и частями границы $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$ и $D\left(\frac{9}{n},0\right)$, соединяющими концы кривых

$$\Gamma^*(2m-2,\varphi_1),\ \Gamma^*(2m-1,\varphi_1).$$

Подсчитаем теперь для заданной конечной односвязной поверхности наложения F над римановой сферой s и областей G_m, $m=1,2,\cdots,n^{\varphi_1-1}/2$ постоянные, фигурирующие во второй основной теореме Л. Альфорса. При этом мы вместо кривых β_m $\left(m=1,2,\cdots,\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}-1\right.$ (см. п. 1) выберем участки границы $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$, соединяющие концы кривых $\Gamma^*(2m-1,\varphi_1)$, $\Gamma^*(2m,\varphi_1)$ и являющиеся граничными для области G. В качестве кривой $\beta_{\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}}$ выберем участок границы $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$, соединяющий концы кривых $\Gamma^*(0,\varphi_1)$, $\Gamma^*(n^{\varphi_1-1}-1,\varphi_1)$ и не являющийся граничной дугой области G.

В качестве области F_0 (фигурирующей в теореме B) у нас выступает область $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$, а область $F_0^{\bullet}$ — область

$$s\diagdown\left\{\overline{D}\left(\frac{9}{n},\infty\right)\cup\left\{\bigcup_{m=1}^{\frac{\varphi_1-1}{2}}\overline{G}_m\right\}\right\}.$$

Далее, в этом пункте через K_1, K_2, ... будем обозначать постоянные, не зависящие от числа n.

Заметим, что минимальное расстояние между граничными компонентами области $F_0=s\diagdown\{\bigcup_{m=1}^{\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}}\overline{G}_m\}$ есть величина, большая чем K_1/n^{φ_1} и меньшая, чем K_2/n^{φ_1}, где K_1 и K_2 — некоторые постоянные. С другой стороны, все рассмотренные кривые сильно регулярны, если d взять равным K_3/n^{φ_1} (где K_3 — некоторая постоянная $<K_2$), а число k, фигурирующее в определении сильной регулярности, взять равным не-

которой постоянной K_4. Для подсчета $h_2(F_0^*, \beta_m)$, $m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$ нужно сначала дополнить кривую β_m до некоторой замкнутой кривой β_m'. В качестве β_m' возьмем границу односвязной области D_m, окруженной областями $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, $\left(D\left(\frac{9}{n}, 0\right)\right)$, G_m, G_{m+1}, притом при $m < \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$ полагаем $D_m \subset G$, и при $m = \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$ полагаем $D_m \overline{\subset} G$.

Легко убедиться в существовании таких постоянных K_5, K_6, K_7, что

$$J_0(D_m) \geqslant \frac{K_5}{n^{\varphi_1-1}};\ L_0(\beta_m') \leqslant K_6 n;\ L_0(\beta_m) \geqslant \frac{K_7}{n^{\varphi_1}}.$$

Заметим еще, что для области F_0^* величина $\sup\limits_{\gamma} \frac{c(\gamma)}{|\gamma|}$ не превосходит числа 2, так что имеем

$$h'(F_0^*, \beta_m') = 2\max\left\{2, \frac{K_6}{K_3} n^{\varphi_1+1}, K_4\right\} \leqslant K_8 n^{\varphi_1+1},$$

где K_8 не зависит от n (будем помнить, что n предполагается достаточно большим).

Далее, из геометрических рассмотрений видим, что $h_1(F_0^*) < K_9 n$, так что с учетом предыдущего неравенства и оценок величин $J_0(D_m)$ и $L_0(\beta_m)$ для величины h_2 получим

$$h_2(F_0^*, \beta_m) \leqslant 2\,\frac{2K_9 K_8}{K_5} n^{2\varphi_1+1} + \frac{2K_8}{K_7} n^{2\varphi_1+1} \leqslant K_{10}\, n^{2\varphi_1+1}.$$

Проведем аналогичные построения для области F_0. Поскольку F_0— многосвязная область, притом $\varkappa > K_1/n^{\varphi_1}$, то легко убедимся в существовании постоянной K_{11}, с которой верно неравенство $h_1(F_0) \leqslant K_{11} n^{\varphi_1}$. Возьмем в качестве кривой β_m', $m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$, граничную кривую области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$. Поскольку $L_0(\beta_m') \leqslant K_{12}/n$, легко придем к оценке

$$h'(F_0, \beta_m') = 2\max\left\{2, \frac{K_{12}}{K_3} n^{\varphi_1-1}, K_4\right\} \leqslant K_{13}\, n^{\varphi_1-1}.$$

Учитывая еще, что $J_0\left(D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)\right) \geqslant K_{14}/n^2$ и подставив оценки для $L_0(\beta_m)$ и $h_1(F_0)$ в выражение для $h_2(F_0, \beta_m)$, будем иметь

$$h_2(F_0, \beta_m) = \frac{2K_{11} K_{13}}{K_{14}} n^{2\varphi_1+1} + \frac{K_{13}}{K_7} n^{2\varphi_1-1} \leqslant K_{15}\, n^{2\varphi_1+1},$$

$$m = 1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}.$$

Очевидно, для области $F_0' \left(= D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)\right)$ более просто устроенной, чем области F_0^* и F_0, величина $h_2(F_0, \beta_m)$ значительно меньше, чем в случае областей F_0^* и F_0 и уж во всяком случае

$$h_2(F_1', \beta_m) \leqslant K_{16}\, n^{2\varphi_1+1},\ m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}.$$

Из предыдущих оценок и очевидной оценки $J_0(F_0) > 1/4$ теперь получим

$$h_0\left(G_1, G_2, \cdots, G_{\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}}\right) = 2n^{\varphi_1-1} \max\,(K_{10}, K_{15}, K_{16})\, n^{2\varphi_1+1} = K_{17}\, n^{3\varphi_1}.$$

Так как, к тому же, с некоторой постоянной K_{18} справедливы неравенства

$$J_0(G_m) > \frac{K_{18}}{n^{\varphi_1-1}},\ m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2},$$

то, записав неравенство (2.1) для областей G_m, $m=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$, с учетом последних двух соотношений, получим неравенство

$$\sum_{m=1}^{\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}} [S(s) - n_0(G_m)] \leqslant 4\, S(s) + K_{19}\, n^{3\varphi_1} L.$$

Обозначим через $B_0'(n, 1)$ ту из областей G_m, для которой достигается минимум выражения $S(s) - n_0(G_m)$, $m = 1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$ (если таких областей несколько, обозначим через $B_0'(n, 1)$ произвольную из них). Из последнего неравенства имеем

$$S(s) - n_0(B_0'(n, 1)) < \frac{8\, S(s)}{n^{\varphi_1-1}} + 2K_{19}\, n^{2\varphi_1+1} L. \tag{2.2}$$

Пусть $B_0'(n, 1) = G_{m_1}$; $\Gamma' = \Gamma^*\left(2m_0 - 2 + \frac{1}{3}, \varphi_1\right)$; $\Gamma'' = \Gamma^*\left(2m_0 - 2 + \frac{2}{3}, \varphi_1\right)$.

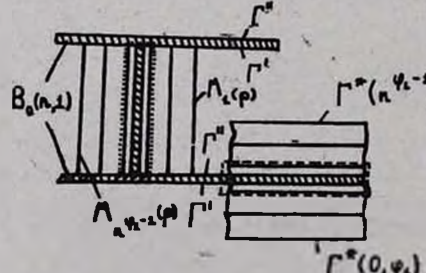

Рис. 1. Область (справа внизу), обведенная штриховкой — часть области $B_0'(n, 1)$. Область (слева), обведенная точками — область $\tilde{B}_p'(n)$, заштрихованная область внутри последней — область $\bar{B}_p(n)$.

Кривые Γ' и Γ'' делят область $B_0^*(n, 1)$ на три „подобные" области. Обозначим $B_0(n, 1)$ (см. рис. 2) среднюю из этих трех областей, т. е. ту из них, граничными дугами которой являются кривые Γ' и Γ''.

Далее нам удобно пользоваться следующим символом $\sqcup$. *Соединением* $C = A \sqcup B$ двух открытых множеств A и B назовем множество $C = \operatorname{int}\overline{(A \cup B)}$, где черта сверху обозначает замыкание, а int — внутренность множества*.

Пусть $B_0^*(n) = S \setminus \left\{B_0(n, 1) \sqcup D\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \sqcup D\left(\frac{9}{n}, 0\right)\right\}$; M_0 — та из дуг большой окружности сферы, проходящих через точки ∞ и $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, целиком лежащих в области $B_0^*(n)$, которая наиболее близка к точке $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ (если таких дуги две, то возьмем в качестве M_0 произвольную из них); w_0 — тот из концов дуги M_0, координата θ которого имеет меньшее значение (очевидно, точка w_0 принадлежит кривой Γ'').

Отложим на кривой Γ'' точки $w_0, w_1, \cdots, w_{\tau'}$ (величина τ' будет ясна из дальнейшего) таким образом, чтобы длина дуги кривой Γ'', лежащая между произвольными последовательными точками w_0 и w_1, w_1 и $w_2, \cdots, w_{\tau'-1}$ и $w_{\tau'}$, равнялась бы $1/n$, притом, чтобы координаты θ_i' точек w_i (в представлении полярными координатами (φ, θ, ρ)) возрастали вместе с i. Таким же образом отложим на Γ'' точки w_0, $w_{-1}, \cdots, w_{-\tau''}$, с той лишь разницей, что координаты θ_i'' точек w_{-i} убывали при возрастании i. Пусть M_i, (M_{-i}) — дуга большой окружности сферы, проходящей через точки ∞ и w_i (w_{-i}) и целиком лежащая в области $B_0^*(n)$, кроме двух концов, принадлежащих границе $B_0^*(n)$ ($w_i \in \overline{M}_i$, $w_{-i} \in \overline{M}_{-i}$).

Дуги M_{2p} и M_{2p+1}, при $p = 0, 1, \cdots, \tau^*$ (где τ^* — некоторое число) делят область $B_0^*(n)$ на три односвязные области. Обозначим $\widetilde{B}_p^*(n)$ среднюю из этих трех областей, т. е. область, частями границы которой являются и M_{2p} и M_{2p+1}. Число τ^* определяется следующим образом. Очевидно, найдутся номера p, при которых частью границы области $\widetilde{B}_p^*(n)$ является некоторый участок границы области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$. Пусть p_0 — первый, встретившийся при возрастании p номер, при котором это так. Тогда $\tau^* = p_0 - 2$. Области $\widetilde{B}_p^*(n)$, $p = -1, -2, \cdots, -\tau^{**}$ определим аналогичным образом с заменой M_{2p} и M_{2p+1} на, соответственно, M_{2p+1} и M_{2p}. Очевидно, найдутся номера p (<0), при которых частью границы области $\widetilde{B}_p^*(n)$ является некото-

* Эта операция часто встречается в работах по топологии. Символ $\sqcup$ и термин соединение введены А. А. Гольдбергом и А. Э. Еременко.

рый участок границы $D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$. Пусть p_0 — первый, встретившийся при убывании p номер, при котором это так. Тогда $-\tau^{**}=p_0+2$.

Разделим дугу P_p^* кривой Γ'', лежащую между точками w_{2p} и w_{2p+1} на $n^{\varphi_2-1}-1$ равных частей. Пусть $w_i(p)$, $i=1, 2, \cdots, n^{\varphi_2-1}$ — точки этих делений, притом $w_1(p)=w_{2p}$, а $w_{n^{\varphi_2}-1}(p)=w_{2p+1}$; $M_i(p)$ — дуги большой окружности сферы, проходящие через точки ∞ и $w_i(p)$ и целиком лежащие в области $\widetilde{B}_p^*(n)$, кроме двух концов, принадлежащих границе $\widetilde{B}_p^*(n)$. Обозначим через $B_{p,t}^*(n)$, $t=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$, односвязные области, являющиеся частью области $\widetilde{B}_p^*(n)$, заключенной между дугами $M_{2t-1}(p)$ и $M_{2t}(p)$ (см. рис. 1).

Подсчитаем постоянную $h_0\left(B_{p,1}^*(n), \cdots, B_{p,\frac{n^{\varphi_2-1}}{2}}^*(n)\right)$. Соединим точки $w_1(p)$ и $w_{n^{\varphi_2}-1}$ дугой $\beta_{\frac{n^{\varphi_2}-1}{2}}$ на сфере, являющейся частью окружности радиуса 1/4 и не имеющей общих точек с $\bigcup\limits_{t=1}^{\frac{n^{\varphi_2}-1}{2}} B_{p,t}^*(n)$. Эта дуга совместно с дугой P_p^*, ограничивает некоторую область F_0^*, не имеющую общих точек с $B_{p,t}(n)$, $t=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$. В качестве дуг β_t, $t=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}-1$ возьмем дуги кривой P_p^*, лежащие между точками $w_{2t}(p)$ и $w_{2t+1}(p)$. Области F_0^* и F_0 определяется однозначно. Подсчитаем $h_2(F_0^*, \beta_t)$, $t\neq\frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$. В качестве кривой β_t' возьмем границу односвязной области $D_t\subset\widetilde{B}_p^*(n)$, заключенной между кривыми $M_{2t}(p)$ $M_{2t+1}(p)$. Легко убедиться, что существуют такие постоянные K_{20}—K_{23}, с которыми при любых n верны неравенства

$$J_0(D_t)>\frac{K_{20}}{n^{\varphi_2+1}};\quad L_0(\beta_t')<\frac{K_{21}}{n};$$

$$L_0(\beta_t)\geqslant K_{22}\frac{1}{n^{\varphi_2}};\quad h_1(F_0^*)\leqslant K_{23},$$

и что все рассмотренные кривые сильно регулярны, если с некоторой постоянной K_{24} величину d выбрать равной K_{24}/n^{φ_2}, а число k, фигурирующее в определении сильной регулярности, взять равным некоторой постоянной K_{25}. Тогда (см. вывод подсчета h_2 для областей G_m), $h'(F_0^*, \beta_t')\leqslant K_{26}\, n^{\varphi_2-1}$ и с учетом предыдущих неравенств получим $h_2(F_0^*, \beta_t)\leqslant K_{27}\, n^{2\varphi_2}$, $t=1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_2}-1}{2}-1$. Так же, как и в случае областей G_m убедимся, что с соответствующими постоянными K_{28} и

(K_{29}, K_{30}) последнее неравенство верно, если в нем заменить ρ_t, $t < \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$ на $\beta_{\frac{n^{\varphi_2}-1}{2}}$ и (область F_0^* заменить на F_0' или F_0).

В итоге, согласно подсчету постоянной во второй основной теореме Л. Альфорса,

$$h_0(B^*_{p,1}(n), \cdots, B^*_{p,\frac{n^{\varphi}-1}{2}}(n)) \leqslant K_{31} n^{3\varphi_1-1}.$$

С другой стороны, выполняется, очевидно, неравенство

$$J_0(B^*_{p,t}(n)) > K_{32}/n^{\varphi_2+1}, \quad t = 1, 2, \cdots, \frac{n^{\varphi_2}-1}{2}.$$

Из неравенства (2.1), с учетом последних двух неравенств, вытекает

$$\sum_{t=1}^{\frac{n^{\varphi_2}-1}{2}} [S(s) - n_0(B^*_{p,t}(n))] < 4S(s) + K_{33}\, n^{3\varphi_1-1} L.$$

Обозначим через $\tilde{B}_p'(n)$ (см. рис. 1) ту из областей $B^*_{p,t}(n)$, для которой достигается минимум выражения $S(s) - n_0(B^*_{p,t}(n))$, $t=1, 2, \cdots \cdots, \frac{n^{\varphi_2}-1}{2}$ (если таких областей несколько, то обозначим через $\tilde{B}_p'(n)$ произвольную из них). Из последнего неравенства вытекает оценка

$$S(s) - n_0(\tilde{B}_p'(n)) \leqslant \frac{1}{n^{\varphi_2}-1} S(s) + 2K_{33} n^{2\varphi_1} L.$$

Проведем сечения сферы двумя такими большими окружностями сферы, проходящими через точку ∞ так, что точки пересечения этих окружностей с линией $\partial\tilde{B}_p'(n) \cap \Gamma''$ делят эту линию на три равные части. Такие сечения делят область $\tilde{B}_p'(n)$ на три „подобные" области, среднюю из которых, т. е. ту, для которой граничными являются дуги обеих окружностей, обозначим через $\bar{B}_p(n)$.

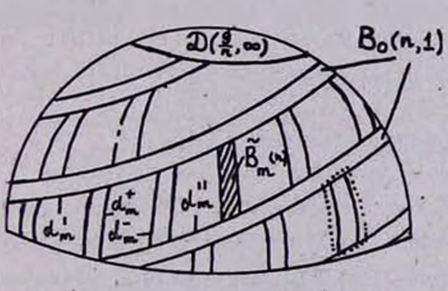

Рис. 2. (Точками обведена область $\tilde{B}_m'(n)$).

Обозначим через $n_c'(X)$ количество тех простых островов над областью X, каждая из которых является частью простого острова над областью X'. С учетом того, что $n_0'(\bar{B}_p(n)) = n_0(\tilde{B}_p'(n))$, последнее неравенство перепишем следующим образом:

$$S(s) - n_0'(\bar{B}_p(n)) \leqslant \frac{8}{n^{\varphi_2}-1} S(s) + 2K_{33} n^{2\varphi_1} L. \tag{2.3}$$

Пусть $t_{\tau^*} - t$ — индекс той из областей $B^*_{\tau^*, t}(n)$, которую мы приняли за область $\widetilde{B}_{\tau^*}(n)$. Дуга большой окружности, соединяющая точки ∞ и $w_{2t_{\tau^*}}(\tau^*)$ и содержащая кривую $M_{2t_{\tau^*}}(\tau^*)$, рассекает область $B_0'(n, 1)$ на две односвязные области. Обозначим через $B_0'(n, 2)$ ту из этих двух областей, граница которой не имеет общих точек с границей области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$.

Проделаем ту же процедуру с заменой τ^* на $-\tau^{**}$ и заменой ∞ на 0. В качестве аналога области $B_0'(n, 2)$ получим некоторую область $B_0'(n, 3)$.

Обозначим $B_0'(n) = B_0'(n, 2) \cap B_0'(n, 3)$, (см. рис. 3, помещенный во второй части работы).

Пусть W_{1,τ^*} и W_{2,τ^*} — те концы дуг больших окружностей, являющихся граничными дугами области $\widetilde{B}_{\tau^*}(n)$, которые лежат на линии $\partial\widetilde{B}_{\tau^*}(n) \cap \Gamma''$. Положим при этом, что W_{2,τ^*} лежит на этой линии между точками W_{1,τ^*} и $w_{2t_{\tau^*}}(\tau^*)$. Дуга большой окружности, соединяющая точки ∞ и W_{2,τ^*} и содержащая часть границы $\widetilde{B}_{\tau^*}(n)$, рассекает область $B_0(n, 1)$ на две односвязные области. Обозначим через $B_0(n, 2)$ ту из этих двух областей, граница которой не имеет общих точек с границей области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$.

Проделаем ту же процедуру с заменой τ^* на $-\tau^{**}$ и заменой ∞ на 0. В качестве аналога области $B_0(n, 2)$ получим некоторую область $B_0(n, 3)$.

Обозначим $B_0(n) = B_0(n, 2) \cap B_0(n, 3)$ (см. рис. 3); $n_0'(B_0(n))$ — количество простых островов над областью $B_0(n)$, каждая из которых является частью простого острова над $B_0'(n)$. Так как $B_0'(n) \subset B_0(n, 1)$, то $n_0(B_0'(n)) \geqslant n_0(B_0'(n, 1))$, так что неравенство (2.2) справедливо, если в нем заменить область $B_0'(n, 1)$ на $B_0'(n)$. Отсюда, учитывая, что $n_0'(B_0(n)) = n_0(B_0'(n))$, получим утверждение

$$S(s) - n_0'(B_0(n)) \leqslant \frac{8}{n^{\varphi_1 - 1}} S(s) + 2K_{19}\, n^{2\varphi_1 + 1} L. \tag{2.4}$$

Теперь можем перейти к построению областей $B(n, i)$.

Лежащая над некоторой кривой Γ связная часть поверхности F, на замыкании которой не лежит ни одна точка границы Γ, естественно является аналогом острова (назовем островом над Γ); кратность острова — число листов этой связной части: простой остров над Γ — остров с кратностью единица.

В дальнейшем будем помнить, что, как это обусловлено допущением в п. 1, § 2 все острова над линиями рассматриваемых нами конструкций, являются простыми.

Пусть $n_0(\Gamma)$ — количество простых островов над Γ; $n^*(\Gamma, A, B)$ — количество простых островов над отрезком Γ, которые являются граничными дугами одновременно и для простого острова над областью A и для простого острова над областью B, причем каждый простой остров над A является одновременно частью простого острова над $A' \supset A$, и каждый простой остров над B является одновременно частью простого острова над $B' \supset B$. Обозначим через $b_p^{\cdot}$ общую часть границы области $\bar{B}_p(n)$ и кривой Γ''; b_p' — общую часть границы области $\tilde{B}_p(n)$ и кривой Γ'.

Если простой остров над $b_p^{\cdot}$ является, одновременно, граничной дугой и для простого острова над $\bar{B}_p(n)$, являющегося, одновременно, частью простого острова над $\tilde{B}_p'(n)$, и для простого острова над $B_0(n)$, являющегося, одновременно, частью простого острова над $B_0'(n)$, то, очевидно, вклад от каждой тройки таких островов в величину $n_0(B_0(n)) + n_0(\tilde{B}_p(n))$ — $- n^*(b_p^{\cdot}, B_0(n), \bar{B}_p(n))$ равен единице, так что $n_0(b_p^{\cdot})$ не меньше последнего выражения: иначе справедливо неравенство

$$n^*(b_p^{\cdot}, B_0(n), \tilde{B}_p(n)) \geqslant n_0'(B_0(n)) + n_0'(\tilde{B}_p(n)) - n_0(b_p^{\cdot}). \tag{2.5}$$

Из первой основной теоремы Л. Альфорса легко вытекает справедливое для любого $p\ (= -\tau^{**}, \ldots, \tau^*)$ неравенство

$$n_0(b_p^{\cdot}) \leqslant S(s) + K_{34} n^{\varphi_2} L. \tag{2.6}$$

Пусть $\varphi_1 = \varphi_2 = 6$. Тогда с учетом неравенств (2.3), (2.4) и последнего неравенства, из утверждения (2.5) получим следующую оценку:

$$n^*(b_{-\tau^{**}}^{\cdot}, B_0(n), \tilde{B}_{-\tau^{**}}(n)) \geqslant S(s) - \left\{\frac{8}{n^5} + \frac{8}{n^5}\right\} S(s) -$$
$$- \{2K_{19} n^{13} + 2K_{33} n^{12} + K_{34} n^6\} L. \tag{2.7}$$

Это означает, что количество тех простых островов над множеством $\{B_0(n) \sqcup \tilde{B}_{-\tau^{**}}(n)\} \setminus b_{-\tau^{**}}$, принадлежащий к каждому из которых простой остров над $B_0(n)$ $(\bar{B}_{-\tau^{**}}(n))$ является, в свою очередь, частью простого острова над $B_0'(n)$ $(\tilde{B}_{-\tau^{**}}'(n))$, не меньше, чем величина в правой части последнего неравенства.

Повторив эту процедуру с заменой $b_{-\tau^{**}}^{\cdot}$ на $b_{-\tau^{**}+1}^{\cdot}$, заменой $B_0(n)$ на $\{B_0(n) \sqcup \bar{B}_{-\tau^{**}}(n)\} \setminus b_{-\tau^{**}}^{\cdot}$ и заменой $\tilde{B}_{-\tau^{**}}(n)$ на $\tilde{B}_{-\tau^{**}+1}(n)$ получим, что количество тех простых островов над множеством

$$\{B_0(n) \sqcup \bar{B}_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \bar{B}_{-\tau^{**}+1}(n)\} \setminus \{b_{-\tau^{**}}^{\cdot} \cup b_{-\tau^{**}+1}^{\cdot}\},$$

принадлежащий к каждому из которых простой остров над $B_0(n)$ $(\tilde{B}_{-\tau^{**}}(n), \tilde{B}_{-\tau^{**}+1}(n))$, является, в свою очередь, частью простого острова над $B_0'(n)$, $(\tilde{B}_{-\tau^{**}}'(n), \tilde{B}_{-\tau^{**}+1}'(n))$, не меньше следующей величины:

$$S(s) - \left\{\frac{8}{n^5} + 2 \cdot \frac{8}{n^5}\right\} S(s) - \{2K_{19} n^{13} + 2 \cdot 2K_{33} n^{12} + 2K_{34} n^6\} L.$$

Повторяя эту процедуру с последующими $p\ (= -\tau^{**} + 2, \cdots, \tau^*)$, в конечном итоге придем к утверждению: количество $\Phi'(n)$ тех простых островов $B'(n, \mu)$, $\mu = 1, 2, \cdots, \Phi'(n)$ над множеством

$$B(n, *) = [B_0(n) \sqcup \widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{B}_{\tau^*}(n)] \setminus \left\{ \bigcup_{p=-\tau^{**}}^{\tau^*} b_p^* \right\},$$

принадлежащий к каждому из которых простой остров над $B_0(n)$ $(\widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n), \cdots, \widetilde{B}_{\tau^*}(n))$, является, в свою очередь, частью простого острова над $B_0'(n)$ $(\widetilde{B}'_{-\tau^{**}}(n), \cdots, \widetilde{B}'_{\tau^*}(n))$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi'(n) = S(s) - C(n), \tag{2.8}$$

где

$$C(n) = \left\{ \frac{8}{n^5} + \frac{8(\tau^{**} + \tau^* + 1)}{n^5} \right\} S(s) - [2K_{10} n^{13} +$$

$$+ 2(\tau^{**} + \tau^* + 1) K_{33} n^{13} + (\tau^{**} + \tau^* + 1) n^6] L.$$

Далее, учитывая неравенства (2.4), (2.8), а также, что неравенство (2.6) справедливо, если в нем заменить b_p^* на b_p', а K_{34} — на некоторое K_{35}, как и при выводе неравенства (2.7) придем к следующему аналогичному утверждению: количество тех островов $B'(n, \mu)$, к каждому из которых вдоль линии $b'_{-\tau^{**}}$ примыкает простой остров над $B_0(n)$, являющийся частью простого острова над $B_0'(n)$, не меньше, чем

$$S(s) - C(n) - K_{35} n^6 L - \frac{8}{n^5} S(s) - 2K_{10} n^{13} L.$$

Повторяя (так же, как это было сделано выше) эту процедуру с последующими $p\ (= -\tau^{**} + 1, \ldots, \tau^*)$, в конечном итоге придем к заключению: количество $\Phi(n)$ тех простых островов $B(n, i) \in \{B'(n, \mu)\}_{\mu=1}^{\Phi'(n)}$ $(i = 1, 2, \cdots, \Phi(n))$, к каждому из которых вдоль каждой из линий b_p' $(p = -\tau^{**}, \cdots, \tau^*)$, присоединяется простой остров над $B_0(n)$, являющийся, в свою очередь, частью простого острова над $B_0'(n)$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi(n) \geqslant S(s) - C(n) - (\tau^{**} + \tau^* + 1) \Big[K_{35} n^6 L - \frac{8}{n^5} S(s) -$$

$$- 2K_{10} n^{13} L \Big] \geqslant S(s) - \frac{16(\tau^{**} + \tau^* + 1)}{n^5} S(s) - \tag{2.9}$$

$$- (\tau^{**} + \tau^* + 1) K_{36} n^{13} L,$$

где K_{36} — некоторая новая постоянная.

Для правильного понимания идеи доказательства, важно заметить и помнить, что хотя области $B(n, *)$ и $B_0(n)$ примыкают друг к другу вдоль произвольной из линий b_p', но вовсе не обязательно примыкание простого острова над $B(n, *)$ к себе через линию b_p', а также вовсе не обязательно, чтобы простые острова над $B_0(n)$, примыкающие через линии b'_{p_1} и b'_{p_2}, $p_1 \neq p_2$ к простому острову над $B(n, *)$, совпадали бы.

(Продолжение в следующем номере)

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15. VIII. 1984