ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 4, 1985 Математика

УДК 517.988

А. А. ПАПОЯН

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С РАЗНОСТНО-СУММАРНО-ГАРМОНИЧЕСКИМ ЯДРОМ

Введение

Рассмотрим интегральные операторы

$$(J-\mathbf{K}^{\pm})(Y)=Y(x)-\int_0^{\tau}K^{\pm}(x,s)\,Y(s)\,ds \tag{1}$$

с ядрами

$$K^{\pm}(x,t)=f(x-t)+g(x+t)\pm H(x,t), \tag{2}$$

где функция $H(x,t)$ гармоническая в квадрате $D=\{0<x,\ t<\tau\}$, т. е.

$$\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial t^2}=0. \tag{3}$$

Считается, что $f(x)\in C^2-(\tau,\tau)$, $g(x)\in C^2((0,2\tau)$, $H\in C(\overline{D})$. Предполагая существование операторов $J+\mathbf{R}^{\pm}=(J-\mathbf{K}^{\pm})^{-1}$, поставим задачу их эффективного построения.

В работе [1] выясняется, что для построения операторов $J+\mathbf{R}^{\pm}$, вообще говоря, достаточно решить 8 уравнений с ядром K^{+} и столько же с «сопутствующим» ядром K^{-}.

В данной работе разработан конкретный путь (алгоритм), соответствующий этому подходу, основанный на предварительном решении четырёх уравнений с ядром K^{+} и восьми уравнений — с ядром K^{-}.

§ 1. Вывод основных соотношений

Резольвентные ядра $R^{\pm}$ удовлетворяют известным соотношениям

$$R^{\pm}(x,t)=K^{\pm}(x,t)+\int_0^{\tau}K^{\pm}(x,s)\,R^{\pm}(s,t)\,ds, \tag{1.1}$$

$$R^{\pm}(x,t)=K(x,t)+\int_0^{\tau}R^{\pm}(x,s)\,K^{\pm}(s,t)\,ds. \tag{1.2}$$

Применим схему работы [1]. Дифференцируя (1.1) дважды по x и имея в виду следующее из (2) соотношение

$$\frac{\partial^2 K^{\pm}(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 K^{\mp}(x,t)}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

получим

$$\frac{\partial^2 R^{\pm}(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 K^{\mp}(x,t)}{\partial t^2}+\int_0^{\tau}\frac{\partial^2 K^{\mp}(x,s)}{\partial s^2}R^{\pm}(s,t)\,ds. \tag{1.4}$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле и применяя оператор $J+R^{\mp}$ к (1.4), с помощью (1.2) получим

$$\frac{\partial^2 R^{\pm}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 R^{\mp}(x,t)}{\partial t^2}=\left|\frac{\partial R^{\mp}(x,s)}{\partial s}R^{\pm}(s,t)-\right.$$
$$\left.-R^{+}(x,s)\frac{\partial R^{\pm}(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0}^{s=\tau}.$$

Таким образом

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mp\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(R^{-}\pm R^{+})=F^{+}(x,t)\pm F^{-}(x,t), \tag{1.5}$$

где использованы следующие обозначения ($i=0,1$):

$$\left.\frac{\partial^i R^{\pm}(x,s)}{\partial s^i}\right|_{s=0}=\alpha_1^{\pm i}(x),\quad \left.\frac{\partial^i R^{\pm}(x,s)}{\partial s^i}\right|_{s=\tau}=\alpha_2^{\pm i}(x), \tag{1.6}$$
$$\left.\frac{\partial^i R^{\pm}(s,t)}{\partial s^i}\right|_{s=0}=\beta_1^{\pm i}(t),\quad \left.\frac{\partial^i R^{\pm}(s,t)}{\partial s^i}\right|_{s=\tau}=\beta_2^{\pm i}(t),$$

$$F^{\pm}(x,t)=\alpha_2^{\pm 1}(x)\,\beta_2^{\mp 0}(t)-\alpha_2^{\pm 0}(x)\,\beta_2^{\mp 1}(t)-\alpha_1^{\pm 1}(x)\,\beta_1^{\mp 0}(t)+\alpha_1^{\pm 0}(x)\,\beta_1^{\mp 1}(t). \tag{1.7}$$

Здесь функции (1.6) удовлетворяют уравнениям ($i=0,1$)

$$\alpha_1^{\pm i}(x)=\left.\frac{\partial^i K^{\pm}(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}+\int_0^{\tau}K^{\pm}(x,s)\,\alpha_1^{\pm i}(s)\,ds,$$

$$\alpha_2^{\pm i}(x)=\left.\frac{\partial^i K^{\pm}(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=\tau}+\int_0^{\tau}K^{\pm}(x,s)\,\alpha_2^{\pm i}(s)\,ds, \tag{1.8}$$

$$\beta_1^{\pm i}(t)=\left.\frac{\partial^i K^{\pm}(x,t)}{\partial x^i}\right|_{x=0}+\int_0^{\tau}\beta_1^{\pm i}(s)\,K^{\pm}(s,t)\,ds,$$

$$\beta_2^{\pm i}(t)=\left.\frac{\partial^i K^{\pm}(x,t)}{\partial x^i}\right|_{x=\tau}+\int_0^{\tau}\beta_2^{\pm i}(s)\,K^{\pm}(s,t)\,ds.$$

Таким образом, резольвентные ядра интегральных операторов с ядрами (2) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.5), где функции (1.6) определяются из интегральных уравнений (1.8).

§ 2. Структура резольвентных ядер

Решим дифференциальные уравнения (1.5) в квадрате $D = [0, \tau] \times [0, \tau]$. Решения второго и зних по формуле Грина можно представить в виде

$$(R^- - R^+)(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\tau\int_0^\tau (F^- - F^+)(s, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+(t-\eta)^2}} ds d\eta +$$

$$+ \int_0^\tau [\alpha_1^{+1}(s) - \alpha_1^{-1}(s)] \ln \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+t^2}} ds + \int_0^\tau [\alpha_1^{-0}(s) - \alpha_1^{+0}(s)] \times$$

$$\times \frac{t}{(x-s)^2+t^2} ds + \int_0^\tau [\beta_2^{-1}(s) - \beta_2^{+1}(s)] \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\tau)^2+(t-s)^2}} ds +$$

$$+ \int_0^\tau [\beta_2^{+0}(s) - \beta_2^{-0}(s)] \frac{x-\tau}{(x-\tau)^2+(t-s)^2} ds + \int_0^\tau [\alpha_2^{+1}(s) - \alpha_2^{-1}(s)] \ln \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+(t-\tau)^2}} ds + \int_0^\tau [\alpha_2^{-0}(s) - \alpha_2^{+0}(s)] \frac{t-\tau}{(x-s)^2+(t-\tau)^2} ds + \quad (2.1)$$

$$+ \int_0^\tau [\beta_1^{-1}(s) - \beta_1^{+1}(s)] \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+(t-s)^2}} ds +$$

$$+ \int_0^\tau [\beta_1^{+0}(s) - \beta_1^{-0}(s)] \frac{x}{x^2+(t-s)^2} ds \overset{\text{def}}{=} G(x, t).$$

Первое из уравнений (1.5) в треугольнике $0 < t \leqslant \min(x, \tau - x)$ можно решить по формуле Даламбера

$$R^-(x, t) + R^+(x, t) = \frac{\alpha_1^{+0}(x-t) + \alpha_1^{-0}(x-t) + \alpha_1^{+0}(x+t) + \alpha_1^{-0}(x+t)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} [\alpha_1^{+1}(s) + \alpha_1^{-1}(s)] ds - \quad (2.2)$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t d\eta \int_{x-t+\tau}^{x+t-\eta} [F^+(s, \eta) + F^-(s, \eta)] ds \overset{\text{def}}{=} G_1(x, t).$$

Соответственно в остальных треугольниках ($\max(t, \tau - t) \leqslant x < \tau$, $\max(x, \tau - x) \leqslant t < \tau$, $0 < x < \min(t, \tau - t)$) решения будут иметь следующий вид:

$$R^+(x, t) + R^-(x, t) =$$

$$= \frac{\beta_2^{+0}(x+t-\tau) + \beta_2^{-0}(x+t-\tau) + \beta_2^{+0}(\tau-x+t) + \beta_2^{-0}(\tau-x+t)}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+t-\tau}^{\tau-x+t}\left[\beta_2^{+1}(s)+\beta_2^{-1}(s)\right]ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\tau}ds\int\limits_{x+t-s}^{s-x+t}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,d\eta\overset{\text{def}}{=}G_2(x,t), \tag{2.3}$$

$$R^+(x,t)+R^-(x,t)=$$

$$=\frac{\alpha_2^{+0}(\tau+x-t)+\alpha_2^{-0}(\tau+x-t)+\alpha_2^{+0}(x+t-\tau)+\alpha_2^{-0}(x+t-\tau)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\tau+x-t}^{x+t-\tau}[\alpha_2^{+1}(s)+\alpha_2^{-1}(s)]\,ds- \tag{2.4}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{\tau}d\eta\int\limits_{x+t-\eta}^{\eta+x-t}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,ds\overset{\text{def}}{=}G_3(x,t),$$

$$R^+(x,t)+R^-(x,t)=\frac{\beta_1^{+0}(x+t)+\beta_1^{-0}(x+t)+\beta_1^{+0}(t-x)+\beta_1^{-0}(t-x)}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x-t}[\beta_1^{+1}(s)+\beta_1^{-1}(s)]\,ds+ \tag{2.5}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}ds\int\limits_{s-x+t}^{x+t-s}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,d\eta\overset{\text{def}}{=}G_4(x,t),$$

Из формул (2.1)—(2.5) получим

$$R^\pm(x,t)=\frac{1}{2}[G_1(x,t)\mp G(x,t)],\quad 0<t\leqslant\min(x,\tau-x), \tag{2.6}$$

$$R^\pm(x,t)=\frac{1}{2}[G_2(x,t)\mp G(x,t)],\quad \max(t,\tau-t)\leqslant x<\tau, \tag{2.7}$$

$$R^\pm(x,t)=\frac{1}{2}[G_3(x,t)\mp G(x,t)],\quad \max(x,\tau-x)\leqslant t<\tau, \tag{2.8}$$

$$R^\pm(x,t)=\frac{1}{2}[G_4(x,t)\mp G(x,t)],\quad 0<x\leqslant\min(t,\tau-t). \tag{2.9}$$

Таким образом, с помощью решений интегральных уравнений (1.8) строятся резольвентные ядра интегральных операторов с ядрами $K^\pm$.

§ 3. Алгоритм обращения

Покажем, что 4-е уравнение из (1.8) можно заменить более простой системой интегральных уравнений с разностно-суммарным ядром.

Приравняем значения резольвент (2.6)—(2.9) на сторонах соответствующих треугольников, составляющих квадрат D, имея в виду непрерывность в вершинах квадрата

$$\alpha_1^{\pm l}(\tau) = \beta_2^{\pm l}(0), \quad \beta_2^{\pm l}(\tau) = \alpha_2^{\pm l}(\tau),$$
$$\alpha_2^{\pm l}(0) = \beta_1^{\pm l}(\tau), \quad \beta_1^{\pm l}(0) = \alpha_1^{\pm l}(0). \tag{3.1}$$

В результате придем к системе ($y \in [0, \tau)$]

$$\alpha_1^{+0}(\tau - y) - \beta_2^{+0}(y) = \beta_2^{-0}(y) - \alpha_1^{-0}(\tau - y) - \int_0^y [\beta_2^{+1}(s) + \beta_2^{-1}(s) +$$
$$+ \alpha_1^{+1}(\tau - s) + \alpha_1^{-1}(\tau - s)]\, ds + \int_0^y d\eta \int_{\eta+\tau-y}^{\tau} [F^+(s, \eta) + F^-(s, \eta)]\, ds,$$

$$\alpha_2^{+0}(y) - \beta_2^{+0}(y) = \beta_2^{-0}(y) - \alpha_2^{-0}(y) + \int_y^{\tau} [\beta_2^{+1}(s) + \beta_2^{-1}(s) - \alpha_2^{+1}(s) -$$
$$- \alpha_2^{-1}(s)]\, ds + \int_y^{\tau} d\eta \int_{y+\tau-\eta}^{\tau} [F^+(s, \eta) + F^-(s, \eta)]\, ds, \tag{3.2}$$

$$\alpha_2^{+0}(y) - \beta_1^{+0}(\tau - y) = \beta_1^{-0}(\tau - y) - \alpha_2^{-0}(y) + \int_0^y [\beta_1^{+1}(\tau - s) + \beta_1^{-1}(\tau - s] +$$
$$+ \alpha_2^{+1}(s) + \alpha_2^{-1}(s)]\, ds + \int_{\tau-y}^{\tau} d\eta \int_0^{\eta-\tau+y} [F^+(s, \eta) + F^-(s, \eta)]\, ds,$$

$$\alpha_1^{+0}(\tau + y) + \beta_1^{+0}(\tau - y) = \beta_1^{-0}(\tau - y) - \alpha_1^{-0}(\tau - y) + \int_0^{\tau-y} [\beta_1^{+1}(s) + \beta_1^{-1}(s) -$$
$$- \alpha_1^{+1}(s) - \alpha_1^{-1}(s)]\, ds + \int_0^{\tau-y} d\eta \int_0^{\tau-y-\eta} [F^+(s, \eta) + F^-(s, \eta)]\, ds.$$

В этой системе левые части линейно зависимы. Продифференцировав уравнения, следующие из линейной зависимости правых частей, получим

$$-2\beta_2^{+1}(y) = 2[\beta_2^{-1}(y) - \alpha_1^{+1}(\tau - y) - \alpha_1^{-1}(\tau - y) - \alpha_2^{+1}(y) - \alpha_2^{-1}(y) +$$
$$+ \beta_1^{+1}(\tau - y) + \beta_1^{-1}(\tau - y)] + \int_0^y [F^+ + F^-](\eta + \tau - y, \eta)\, d\eta +$$
$$+ \int_y^{\tau} (F^+ + F^-)(y + \tau - \eta, \eta)\, d\eta + \int_{\tau-y}^{\tau} (F^+ + F^-)(\eta - \tau + y, \eta)\, d\eta + \tag{3.3}$$

$$+\int_0^{\tau-y}(F^+ + F^-)(\tau-y-\eta,\ \eta)\,d\eta.$$

Имея в виду (1.7), интеграл в первом уравнении системы (3.2) можно преобразовать следующим образом:

$$\int_0^y d\eta \int_{\eta+\tau-y}^{\tau}[F^+(s,\eta)+F^-(s,\eta)]\,ds=\int_0^y\int_{\eta-\tau-y}^{\tau}Q(s,\eta)\,ds\,d\eta+$$

$$+\int_0^y\Big\{\alpha_1^{+0}(\tau-s)\int_0^{y-s}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta+\beta_2^{+0}(s)\int_{s+\tau-y}^{\tau}\alpha_2^{-1}(\eta)\,d\eta-$$

$$-\beta_2^{+1}(s)\int_{s+\tau-y}^{\tau}\alpha_2^{-0}(\eta)\,d\eta\Big\}\,ds-\int_{\tau-y}^{\tau}\beta_1^{+0}(\tau-s)\int_{2\tau-s-y}^{\tau}\alpha_1^{-1}(\eta)\,d\eta, \tag{3.4}$$

где

$$Q(s,\eta)=\alpha_2^{+1}(s)\,\beta_2^{-0}(\eta)-\alpha_2^{+0}(s)\,\beta_2^{-1}(\eta)-\alpha_1^{+1}(s)\,\beta_1^{-0}(\eta)+\alpha_1^{-0}(s)\,\beta_1^{+1}(\eta). \tag{3.5}$$

Аналогичными преобразованиями интегралов остальных 2-х уравнений системы (3.2) и в уравнении (3.3) придем к системе

$$V(y)=\Phi(y)+\int_y^y A_1(y-s)\,V(s)\,ds+\int_{\tau-y}^{\tau}A_2(y+s)\,V(s)\,ds+ \tag{3.6}$$

$$+\int_y^{\tau}A_3(y-s)\,V(s)\,ds+\int_0^{\tau-y}A_4(y+s)\,V(s)\,ds.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$V(y)=(\alpha_1^{+0}(\tau-y),\ \beta_2^{+0}(y),\ \beta_1^{+0}(\tau-y),\ \beta_2^{+1}(y))^{tr},$$

$$\Phi(y)=(\Phi_1(y),\ \Phi_2(y),\ \Phi_3(y),\ \Phi_4(y))^{tr}, \tag{3.7}$$

$$\Phi_1(y)=\alpha_2^{+0}(y)+\alpha_2^{-0}(y)-\alpha_1^{-0}(\tau-y)+\int_0^y[\beta_2^{-1}(s)-\alpha_1^{+1}(\tau-s)-$$

$$-\alpha_1^{-1}(\tau-s)]\,ds-\int_y^{\tau}[\beta_2^{-1}(s)-\alpha_2^{+1}(s)-\alpha_2^{-1}(s)]\,ds+\int_0^y\int_{\eta+\tau-y}^{\tau}Q(s,\eta)\,ds\,d\eta-$$

$$-\int_y^{\tau}\int_{y+\tau-\eta}^{\tau}Q(s,\eta)\,ds\,d\eta, \tag{3.8}$$

$$\Phi_2(y)=\alpha_2^{+0}(y)+\alpha_2^{-0}(y)-\beta_2^{-0}(y)-\int_y^{\tau}[\beta_2^{-1}(s)-\alpha_2^{+1}(s)-$$

$$-\alpha_2^{-1}(s)]\,ds-\int\limits_y^{\tau}\int\limits_{y+\tau-\eta}^{\tau} Q(s,\eta)\,ds\,d\eta, \tag{3.9}$$

$$\Phi_3(y)=\alpha_2^{+0}(y)+\alpha_2^{-0}(y)-\beta_1^{-0}(\tau-y)-\int\limits_0^{y}[\beta_1^{+1}(\tau-s)+\beta_1^{-1}(\tau-s)-$$

$$-\alpha_2^{+1}(s)-\alpha_2^{-1}(s)]\,ds-\int\limits_{\tau-y}^{\tau}\int\limits_0^{\eta-\tau+y} Q(s,\eta)\,ds\,d\eta, \tag{3.10}$$

$$\Phi_4(y)=\alpha_1^{+1}(\tau-y)+\alpha_1^{-1}(\tau-y)+\alpha_2^{+1}(y)+\alpha_2^{-1}(y)-$$

$$-\beta_2^{-1}(y)-\beta_1^{+1}(\tau-y)-\beta_1^{-1}(\tau-y)-\frac{1}{2}\Bigg[\int\limits_0^{y} Q(s+\tau-y,s)\,ds+$$

$$+\int\limits_y^{\tau} Q(y+\tau-s,s)\,ds+\int\limits_{\tau-y}^{\tau} Q(s-\tau+y,s)\,ds+$$

$$+\int\limits_0^{\tau-y} Q(\tau-y-s,s)\,ds\Bigg], \tag{3.11}$$

где $Q(s,\eta)$ определяется с помощью формулы 3.5 и

$$A_1(y-s)=$$

$$=\begin{vmatrix} \int\limits_0^{y-s}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta & \int\limits_{s+\tau-y}^{\tau}\alpha_2^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & 1-\int\limits_{s+\tau-y}^{\tau}\alpha_2^{-0}(\eta)\,d\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int\limits_0^{y-s}\alpha_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_1^{-1}(y-s) & -\frac{1}{2}\alpha_2^{-1}(s+\tau-y) & \frac{1}{2}\alpha_1^{-1}(y-s) & \frac{1}{2}\alpha_2^{-0}(s+\tau-y) \end{vmatrix}, \tag{3.12}$$

$$2A_2(y+s)=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0-2\int\limits_{2\tau-s-y}^{\tau}\alpha_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\int\limits_{2\tau-s-y}^{\tau}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta & -2\int\limits_0^{s-\tau+y}\alpha_2^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & 2\int\limits_0^{s-\tau+y}\alpha_2^{-0}(\eta)\,d\eta \\ -\beta_1^{-1}(2\tau-y-s) & -\alpha_2^{-1}(s-\tau+y) & \alpha_1^{-1}(2\tau-s-y) & \alpha_2^{-0}(s-\tau+y) \end{vmatrix}, \tag{3.13}$$

$$A_3(y-s)=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -\int\limits_{y+\tau-s}^{\tau}\alpha_2^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & -\left(1+\int\limits_{y+\tau-s}^{\tau}\alpha_2^{-0}(\eta)\,d\eta\right) \\ 0 & -\int\limits_{y+\tau-s}^{\tau}\alpha_2^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & -\left(1+\int\limits_{y+\tau-s}^{\tau}\alpha_2^{-0}(\eta)\,d\eta\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_1^{-1}(s-y) & -\frac{1}{2}\alpha_2^{-1}(y+\tau-s) & \frac{1}{2}\alpha_1^{-1}(s-y) & \frac{1}{2}\alpha_2^{-0}(y+\tau-s) \end{vmatrix}, \tag{3.14}$$

$$A_4(y+s)=$$

$$=\begin{vmatrix} -\int\limits_{y+s}^{\tau}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & \int\limits_{y+\tau}^{\tau}\alpha_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 \\ -\int\limits_{y+s}^{\tau}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 & \int\limits_{y+s}^{\tau}\alpha_1^{-1}(\eta)\,d\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_1^{-1}(y+s) & -\frac{1}{2}\alpha_2^{-1}(\tau-y-s) & \frac{1}{2}\alpha_1^{-1}(y+s) & \frac{1}{2}\alpha_2^{-0}(\tau-y-s) \end{vmatrix}. \tag{3.15}$$

Матричные уравнения (3.6) с помощью обозначений

$$A(y-s)=\begin{cases} A_1(y-s) & \text{при} \quad 0<s\leqslant y \\ A_3(y-s) & \text{при} \quad y<s<\tau, \end{cases} \tag{3.16}$$

$$B(y+s)=\begin{cases} A_2(y+s) & \text{при} \quad \tau-y\leqslant s<\tau \\ A_4(y+s) & \text{при} \quad 0<s<\tau-y \end{cases} \tag{3.17}$$

можно записать в виде системы интегральных уравнений с разностно-суммарным ядром

$$V(y)=\Phi(y)+\int\limits_0^{\tau}[A(y-s)+B(y+s)]\,V(s)\,ds. \tag{3.18}$$

Известен эффективный метод решения уравнений типа (3.18) (см. [1], [2]).

Заметим, что система (3.18) относительно компонент β_2^{+0} и β_1^{+0} вольтеррова и это можно эффективно использовать.

Таким образом, мы пришли к следующему алгоритму построения обратных к $J-\mathbf{K}^{\pm}$ операторов.

1. Обратим оператор $J-\mathbf{K}^{+}$ на элементах $(i=0,1)$ $\left.\dfrac{\partial K^{+}(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}$

$\left.\frac{\partial^i K^+(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=\tau}$, $\left.\frac{\partial K^+(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$, а $J-K^-$ на элементах $(i=0,1)$

$$\left.\frac{\partial^i K^-(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0}, \left.\frac{\partial^i K^-(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=\tau}, \left.\frac{\partial^i K^-(x,t)}{\partial x^i}\right|_{x=0}, \left.\frac{\partial^i K^-(x,t)}{\partial x^i}\right|_{x=\tau}$$

(см. (1.8)).

2. Решим систему (3.18) с помощью известного рекуррентного алгоритма (см. [1], [2]).

3. С помощью формул (2.6)—(2.9) восстановим резольвентные ядра $R^{\pm}$.

§ 4. Некоторые замечания

1. Требования гладкости функций f, g и H не являются существенными. Функции f и g достаточно считать суммируемыми, а H — имеющей слабые сингулярности на ∂D. В этом случае формулы § 2, восстанавливающие резольвенту, сохраняют свою силу (см. также [1], § 2).

В случае чисто гармонического ($f \equiv g \equiv 0$) ядра можно воспользоваться более простой схемой (см. [1], пример 5).

2. В принципе, для обращения оператора $J-\mathbf{K}^+$ достаточно предварительно решить 8 уравнений, т. е. в алгоритме § 3 использованы избыточные условия. Это является следствием того, что применена формула Грина (2.1), в то время, как значения H и $\frac{\partial H}{\partial n}$ на ∂D не независимы. Однако использование функции Грина для решения задачи Дирихле или Неймана в квадрате D приводит к дополнительным сложностям и вряд ли целесообразно с прикладной точки зрения.

3. Изложенный метод легко обобщается на случай оператора на полуинтервале ($\tau=\infty$). В этом случае $f \in L_1(-\infty, +\infty)$, $g \in L_1(0, \infty)$, а H можно считать достаточно быстро убывающей в квадрате $x, t>0$, обеспечив ограниченность операторов $J-\mathbf{K}^{\pm}$, скажем в $L_1(0, \infty)$.

В этом случае основные формулы примут вид:

$$R^{\pm}(x,t)=\frac{1}{2}[G_1(x,t)\mp G(x,t)],\ 0<t\leqslant x<\infty, \tag{4.1}$$

$$R^{\pm}(x,t)=\frac{1}{2}[G_1(x,t)\mp G(x,t)],\ 0<x\leqslant t<\infty, \tag{4.2}$$

где приняты следующие обозначения:

$$F^{\pm}(x,t)=\alpha_1^{\pm 0}(x)\beta_1^{\mp 1}(t)-\alpha_1^{\pm 1}(x)\beta_1^{\mp 0}(t), \tag{4.3}$$

$$G(x,t)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(F^- - F^+)(s,\tau)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+(t-\tau)^2}}\,ds\,d\tau+\right.$$

$$+\int_0^{\infty}[\alpha_1^{+1}(s)-\alpha_1^{-1}(s)]\ln\frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+t^2}}\,ds+$$

$$+\int_0^\infty [\alpha_1^{-0}(s)-\alpha_1^{+0}(s)]\frac{t}{(x-s)^2+t^2}\,ds+\int_0^\infty [\beta_1^{-1}(s)-\beta_1^{+1}(s)]\times \tag{4.4}$$

$$\times \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(t-s)^2}}\,ds+\int_0^\infty [\beta_1^{+0}(s)-\beta_1^{-0}(s)]\frac{x}{x^2+(t-s)^2}\,ds,$$

$\alpha_1^{\pm i}$, $\beta_1^{\pm i}$ $(i=0,1)$ определяются из соответствующих интегральных уравнений (1.8), где вместо τ подставлено ∞, а G_1 и G_4 определяются, соответственно, из (2.2) и (2.5).

Приравнивая значения резольвент (4.1) и (4.2) на прямой $x=t$, вместо системы (3.3) получим уравнения

$$\alpha_1^{+0}(y)=\varphi(y)+\int_0^y a(y-s)\,\alpha_1^{+0}(s)\,ds, \tag{4.5}$$

где

$$\varphi(y)=\beta_1^{+0}(y)+\beta_1^{-0}(y)-\alpha_1^{-0}(y)+\int_0^y [\beta_1^{+1}(s)+\beta_1^{-1}(s)-$$

$$-\alpha_1^{+1}(s)-\alpha_1^{-1}(s)]\,ds+\int_0^y ds\int_0^{y-s}[\alpha_1^{-0}(s)\,\beta_1^{+1}(\eta)-$$

$$-\alpha_1^{-1}(s)\,\beta_1^{+0}(\eta)-\alpha_1^{+1}(s)\,\beta_1^{-0}(\eta)]\,d\eta,$$

$$a(y-s)=\int_0^{y-s}\beta_1^{-1}(\eta)\,d\eta.$$

Таким образом, в случае $\tau=\infty$ получим следующий алгоритм построения обратного оператора к $J+\mathbf{K}^{\pm}$:

1. Из семи соответствующих интегральных уравнений (1.8) найдем

$$\alpha_1^{-i},\ \alpha_1^{+1},\ \beta_1^{\pm i}\ (i=0,\ 1).$$

2. Решим вольтерровое интегральное уравнение с разностным ядром (4.5).

3. С помощью формул (4.1), (4.2) восстановим резольвентные ядра $R^{\pm}$.

Институт математики АН Армянской ССР.
Кироваканский филиал ЕрПИ

Поступила 14. III. 1985

Ա. Ա. ՊԱՊՈՅԱՆ. Տարբերակա-զումարային և հարմոնիկ ֆունկցիաների զումար կորիզով ինտեգրալային օպերատորի մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի օպերատոր, որի կորիզը տարբերակա-զումարային և հարմոնիկ ֆունկցիաների զումար է։ Մշակված է հակադարձ օպերատորի կառուցման ալգորիթմ։

A. A. PAFOIAN. *On the integral operators with sum-difference-harmonic kernel* (summary)

The Fredholm integral operator of the second kind is considered, whose kernel is a sum of a function depending on the sum of arguments, a function depending on their difference and a harmonic function. An algorithm for constructing the inverse operator is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян.* Структура резольвент некоторых интегральных операторов. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XVII, № 6, 1982, 442—463.
2. *И. И. Кальмушевский.* О решении некоторых интегральных уравнений с ядрами, зависящими от суммы и разности аргументов, Диф. уравн. 16, № 5, 1980, 941—943.