ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 4, 1985 Математика

УДК 519.218.5

Г. С. СУКИАСЯН

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ РЕШЕТОК

В настоящей работе получены некоторые результаты по характеризации однородных или однородных и изотропных случайных решеток. Показано, что в пространстве R^n дискретность распределения Пальма однородного точечного процесса эквивалентна тому, что распределение процесса сосредоточено на так называемых k-решетках—объединениях k конгруентных решеток. Аналогичное утверждение получено для однородных и изотропных точечных процессов, у которых распределение Пальма сосредоточено на «пучках» реализаций.

Другой результат касается рандомизируемых множеств. Точечное множество $\omega \subset R^n$ назовем рандомизируемым относительно группы N преобразований пространства R^n в себя, если существует точечный процесс, распределение которого инвариантно относительно N и сосредоточено на множестве образов $N_\omega = \{\nu\omega\}_{\nu\in N}$.

Для групп параллельных переносов и всех движений показано, что рандомизируемы только k-решетки.

Отметим, что ряд связей между свойствами распределений однородных точечных процессов и свойствами их распределений Пальма указаны в монографии [1]. Наши результаты, касающиеся распределений Пальма, дополняют результаты [1].

В §§ 1, 2 даются все необходимые геометрические определения и используемые в дальнейшем результаты из дискретной геометрии. Отметим, что символ □ обозначает конец доказательства.

§ 1. Решетки и k-решетки

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — линейно независимые точки (векторы) n-мерного евклидового пространства R^n. Множество всех точек $\sum_{k=1}^{m} a_k e_k$, где a_k — целочисленные коэффициенты, называется решеткой. Если $m=n$, то соответствующая решетка называется невырожденной, а параллелепипед с вершинами $\sum_{k=1}^{n} \delta_k e_k$, $\delta_k = 0$ или 1, называется фундаментальным параллелепипедом решетки.

Множества $A_1, A_2 \subset R^n$ называем конгруентными, если их можно совместить параллельным переносом, то есть существует такая точка $x \in R^n$, что $A_1 - x = A_2$. Запись $A - x$ означает сдвиг множества A на вектор x. Все множества, конгруентные какой-либо решетке, также будем называть решетками.

Определение 1. Объединение k конгруентных решеток, которое нельзя представить как объединение меньшего количества решеток, называется k-решеткой.

Подмножества $\omega \subset R^n$, которые не имеют точек сгущения, будем называть точечными системами. Рассмотрим множество T_ω точечных систем конгруентных фиксированной системе ω:

$$T_\omega = \{\omega - x\}_{x \in R^n}.$$

Множество $T_\omega^0 = \{\omega - x\}_{x \in \omega}$ есть подмножество тех элементов из T_ω, которые содержат начало координат 0.

Лемма 1.1. (см. [2]). *Точечная система ω является решеткой тогда и только тогда, когда T_ω^0 состоит из одного элемента.*

Справедливо и более общее утверждение.

Лемма 1.2. *Для того, чтобы точечная система ω была k-решеткой необходимо и достаточно, чтобы множество T_ω^0 состояло из k элементов.*

Доказательство. Легко показать, что для всякой k-решетки ω множество T_ω^0 состоит из k элементов. Покажем справедливость обратного утверждения. Пусть имеем $T_\omega^0 = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k\}$. Обозначим

$$L_i = \{x \in R^n : \omega - x = \omega_i\}, \ i = 1, 2, \cdots, k.$$

Так как $0 \in \omega_i$, то имеем $L_i \subset \omega$, то есть

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{k} L_i, \ L_i \cap L_j = \varnothing, \ i \neq j. \tag{1.1}$$

Покажем, что $L_1, \cdots, L_k$ суть конгруентные решетки. Для любой тройки точек $x, y, z \in L_i$ имеет место

$$x - y + z \in L_i, \tag{1.2}$$

так как

$$\omega - (x - y + z) = \omega_i + y - z = \omega - z = \omega_i.$$

Ввиду того, что для любого движения m и всякого $A \subset R^n$ из $mA \subset A$ следует

$$mA = A, \tag{1.3}$$

то из (1.2) получаем

$$L_i - y + z = L_i \tag{1.4}$$

или

$$L_i - y = L_i - z.$$

Таким образом, множества $T_{L_i}^0$, $i = 1, 2, \cdots, k$ одноэлементны и в силу леммы 1.1, $L_1, \cdots, L_k$ суть решетки. Для любых $y \in L_i$, $z \in L_j$ аналогично (1.4) можно показать, что имеет место

$$L_i - y + z = L_j, \ i, j = 1, \cdots, k.$$

Следовательно, решетки $L_1, \ldots, L_k$ конгруентны друг другу и в силу (1.1) ω есть k-решетка. $\square$

§ 2. Правильные точечные системы

Пусть Г—группа вращений пространства R_n вокруг начала координат 0. Обозначим

$$\Delta_\omega = \{\gamma\omega\}_{\gamma\in\Gamma}, \quad (\text{т. н. „пучок"}),$$
$$S_\omega = \{x \in \omega : \omega - x \in \Delta_\omega\}.$$

Определение 2. (ср. [2, 3]). Точечная система ω называется правильной, если имеет место $S_\omega = \omega$.

Лемма 2.1. *Для любой точечной системы* ω, $0 \in \omega$ *множество* S_ω *является правильной точечной системой, то есть* $S_{S_\omega} = S_\omega$.

Доказательство. Для любой точки $x \in S_\omega$ существует такое вращение $\gamma_x \in \Gamma$, что $\omega - x = \gamma_x\omega$. Для произвольной точки $y \in S_\omega$ имеем $x + \gamma_x y \in S_\omega$, так как

$$\omega - (x + \gamma_x y) = \gamma_x\omega - \gamma_x y = \gamma_x(\omega - y) \in \Delta_\omega.$$

В силу (1.3) получаем

$$\gamma_x S_\omega = S_\omega - x, \quad x \in S_\omega. \tag{2.1}$$

Следовательно, $S_{S_\omega} = S_\omega$. □

Здесь и далее полагаем $0 \in \omega$, так что S_ω не пусто. Рассмотрим множество

$$F_\omega = \{\gamma \in \Gamma : \gamma\omega \in T^0_\omega\};$$

оно не пусто, так как всегда содержит единичный элемент γ_0 группы Г, оставляющий пространство R^n неподвижным. Заметим, что в общем случае, когда ω не обладает определенными свойствами симметрии типа решетчатости, $S_\omega = \{0\}$. Примем $F_{\{0\}} = \{\gamma_0\}$.

Лемма 2.2 (см. [2]). *Для всякой правильной точечной системы* ω *множество* F_ω *является конечной подгруппой группы вращений* Г *(в кристаллографии* F_ω *называют федоровской группой).*

Это утверждение справедливо и для неправильных точечных систем. Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.3. *Для любой точечной системы* ω *имеет место*

$$F_{S_\omega} = F_\omega.$$

Доказательство. Для любого $\gamma \in F_\omega$ существует такая точка $x_\gamma \in \omega$, что

$$\omega - x_\gamma = \gamma\omega.$$

Заметим, что $x_\gamma \in S_\omega$. Согласно (2.1) имеем $\gamma S_\omega = S_\omega - x_\gamma$. Следовательно, $\gamma \in F_{S_\omega}$. □

Из лемм 2.1, 2.2 и 2.3 следует

Утверждение 1. *Для любой точечной системы* ω *множество* F_ω *является конечной подгруппой группы вращений* Г.

Следствие. Для всякой точечной системы ω имеет место

$$\operatorname{card}(T^0_\omega \cap \Delta_\omega) \leqslant \operatorname{card} F_\omega < \infty. \tag{2.2}$$

§ 3. Дискретные распределения Пальма

В пространстве R^n рассмотрим однородный случайный точечный процесс ξ конечной интенсивности λ. Ниже всегда P обозначает распределение процесса ξ, а π — его распределение Пальма. Последнее определяется соотношением (см. [1]):

$$\pi(A) = \frac{1}{C} E \sum_{t \in \omega \cap b(x, r)} I_A(\omega - t), \tag{3.1}$$

где ω есть реализация точечного процесса ξ, E — математическое ожидание относительно распределения P, I — индикаторная функция, $b(x, r)$ — шар с центром x радиуса r. Нормирующая константа C равна $\lambda\mu(b(x, r))$, где μ—мера Лебега в R^n. В силу однородности процесса ξ (3.1) не зависит от положения центра шара $b(x, r)$.

Утверждения этого параграфа по существу касаются свойств распределений Пальма π, в случаях, когда имеются отдельные реализации ω, для которых $\pi(\{\omega\}) > 0$. (В «непрерывных» случаях эти утверждения тривиальны).

Лемма 3.1. *Для любой реализации ω, содержащей точки 0 и x имеет место*

$$\pi(\{\omega\}) = \pi(\{\omega - x\}).$$

Доказательство. Имеем

$$\pi(\{\omega\}) = \frac{1}{C} E \sum_{t \in v \cap b(-x, 1)} I_{\{\omega\}}(v - t) =$$

$$= \frac{1}{C} E \sum_{t + x \in v \cap b(0, r)} I_{\{\omega - x\}}(v - t - x) = \pi(\{\omega - x\}) \qquad \square$$

Лемма 3.2. *Для всякой вырожденной k-решетки ω всегда имеет место $\pi(\{\omega\}) = 0$.*

Доказательство. Если ω — вырожденная k-решетка, то существует такое полупространство H, что $\omega \cap H = \varnothing$. В силу леммы 3.1, без ограничения общности можно принять, что $0 \in \partial H$, где ∂H есть гиперплоскость, ограничивающая H. Рассмотрим в H прямоугольный параллелепипед D высотой h, в основании которого лежит гиперкуб $(0, a)^{n-1}$, где a—расстояние от 0 до ближайшей точки $\omega \setminus \{0\}$. По формуле Пальма [4] имеем

$$P(D_0) \leqslant 1 - \lambda\pi(\{\omega\})\, h\, a^{n-1},$$

где D_0—событие, состоящее в том, что в D нет точек процесса. Так как высоту h можно взять сколь угодно большой, то $\pi(\{\omega\}) = 0$.

$\square$

Лемма 3.3. *Если $\pi(\{\omega\}) > 0$, то реализация ω есть невырожденная k-решетка, причем $k \leqslant \dfrac{1}{\pi(\{\omega\})}$.*

Доказательство. Пусть $\pi(\{\omega\}) > 0$. Из (3.1) следует, что $0 \in \omega$. В силу леммы 3.1, для любой реализации $\omega_1 \in T^0_\omega$ имеет место

$$\pi(\{\omega_1\})=\pi(\{\omega\})>0 \tag{3.2}$$

Следовательно, T^0_ω состоит из конечного числа элементов, и согласно лемме 1.2 ω есть k-решетка, причем $k\leqslant\dfrac{1}{\pi(\{\omega\})}$. Невырожденность следует из леммы 3.2. □

§ 4. Однородные рандомизации

Определение 3. Если для точечной системы $\omega\subset R^n$ существует однородный случайный точечный процесс ξ, распределение которого сосредоточено на T_ω, то ω называется однородно рандомизируемой точечной системой, а ξ—однородной рандомизацией точечной системы ω.

Покажем, что всякая невырожденная k-решетка ω однородно рандомизируема. Пусть D — какой-нибудь фундаментальный параллелепипед одной из решеток, из которых составлена ω. Заметим, что у фиксированной решетки имеется много фундаментальных параллелепипедов, но все они имеют одинаковый объем $\mu(D)$. Имеем

$$T_\omega=\{\omega-x\}_{x\in D}\,.$$

Рассмотрим отображение $f: T_\omega\to D$, которое каждой k-решетке $\omega_1\in T_\omega$ ставит в соответствии точку $x=f(\omega_1)$ такую, что $\omega_1=\omega-x$. Заметим, что это отображение однозначно (с точностью до множества μ-меры нуль).

Распределение P конструируемого точечного процесса определяется соотношением

$$P(A)=\frac{\mu(f(A))}{\mu(D)}\,,\quad A\subset T_\omega.$$

Так построенное распределение P однородно и сосредоточено на T_ω. Итак, всякая k-решетка является однородно рандомизируемой. Для доказательства обратного утверждения нам потребуется следующая лемма, непосредственно вытекающая из (3.1).

Лемма 4.1. *Если множество точечных систем Ω замкнуто относительно параллельных переносов, и распределение P однородного случайного точечного процесса сосредоточено на Ω, то его распределение Пальма π сосредоточено на $\Omega_0=\{\omega\in\Omega:0\in\omega\}$.*

Теорема 1. *Для того, чтобы точечная система ω была однородно рандомизируемой необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной k-решеткой.*

Доказательство. Покажем, что только k-решетки однородно рандомизируемы. Пусть существует однородный точечный процесс, распределение которого сосредоточено на T_ω. Тогда, в силу леммы 4.1, его распределение Пальма π сосредоточено на T^0_ω. Но множество T^0_ω не более чем счетно, следовательно распределение π дискретно. Значит, существует такое $\omega_1\in T^0_\omega$, что $\pi(\{\omega_1\})>0$. Из леммы 3.3 следует, что ω_1 и конгруентная ей ω являются k-решетками. Отметим, что в силу лемм 1.2 и 3.1 имеет место

$$\pi(\{\omega\}) = \frac{1}{k}. \qquad \square$$

Из доказательства теоремы 1 видно, что конечные и счетные смеси однородных рандомизаций k-решеток имеют дискретные распределения Пальма. Известно [1, 4], что распределением Пальма π однозначно определяется распределение P однородного точечного процесса. В силу леммы 3.3 получается следующее утверждение.

Теорема 2. *Распределение Пальма однородного случайного точечного процесса ξ в R^n дискретно тогда и только тогда, когда ξ есть смесь конечного либо счетного числа однородных рандомизаций k-решеток.*

§ 5. Однородные и изотропные рандомизации

В пространстве R^n рассмотрим однородный и изотропный случайный точечный процесс ξ с распределением P и интенсивностью $\lambda < \infty$. Его распределение Пальма π будет изотропным [4], то есть инвариантным относительно группы вращений вокруг 0.

Лемма 5.1. *Для всякой реализации ω, содержащей точки 0 и $x \in R^n$, имеет место*

$$\pi(\Delta_\omega) = \pi(\Delta_{(\omega - x)}).$$

Доказательство ради наглядности приведем для плоского случая. Пусть γA означает поворот множества $A \subset R^2$ вокруг 0 на угол γ. Обозначим

$$B(\omega, \alpha) = \{\gamma\omega: |\gamma| < \alpha\}, \quad \alpha \in (0, \varphi],$$

где φ — минимальный угол, для которого $\varphi\omega = \omega$.

В силу изотропности распределения π имеем

$$\pi(B(\omega, \alpha)) = \frac{\alpha}{2\varphi}\, \pi(\Delta_\omega), \tag{5.1}$$

Если точка t из точечной системы v со свойством $v - t = \gamma(\omega - x)$ лежит в круге $b(0, r)$, то точка $y = t - \gamma x$ лежит в $Q(\alpha, r) = \bigcup_{|\gamma| < \alpha} \gamma b(-x, r)$, и $v - y = \gamma\omega$. Из (3.1) для всех $x \in \omega$ получается

$$\pi(B(\omega - x, \alpha)) = \frac{1}{C} E \sum_{t \in v \cap b(0, r)} I_{B(\omega - x, \alpha)}(v - t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{C} E \sum_{y \in v \cap Q(\alpha, r)} I_{B(\omega, \alpha)}(v - y) = \frac{\mu(Q(\alpha, r))}{\mu(b(0, r))}\, \pi(B(\omega, \alpha)).$$

Аналогичным образом можно получить следующее неравенство:

$$\pi(B(\omega, \alpha)) \leqslant \frac{\mu(Q(\alpha, r))}{\mu(b(0, r))}\, \pi(B(\omega - x, \alpha)).$$

В силу (5.1) имеем

$$\frac{\mu(b(0, r))}{\mu(Q(\alpha, r))}\, \pi(\Delta_{\omega - x}) \leqslant \pi(\Delta_\omega) \leqslant \frac{\mu(Q(\alpha, r))}{\mu(b(0, r))}\, \pi(\Delta_{\omega - x}).$$

Для доказательства леммы остается заметить, что при $\alpha \to 0$ имеем

$$\mu(Q(\alpha, r)) \downarrow \mu(b(0, r)). \qquad \square$$

Лемма 5.1 является аналогом леммы 3.1 в изотропном случае. Аналогом леммы 3.3 является следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Пусть π — распределение Пальма однородного и изотропного случайного точечного процесса. Если $\pi(\Delta_\omega) > 0$, то точечная система ω есть k-решетка.*

Доказательство. Пусть $\pi(\Delta_\omega) > 0$. Из леммы 5.1 имеем

$$\{\Delta_{\omega-x}\}_{x\in\omega} = \{\Delta_{\omega_1}, \Delta_{\omega_2}, \cdots, \Delta_{\omega_l}\}, \ l < \infty,$$

где $\omega_i = \omega - x_i$, $i = 1, 2, \cdots, l$.

Заметим, что согласно определению, множества Δ_{ω_i}, $i = 1, 2 \cdots, l$ непересекающиеся. Из конгруентности точечных систем $\omega_1, \cdots, \omega_l$ следует

$$T^0_{\omega_j} = T^0_\omega \subset \bigcup_{i=1}^{l} \Delta_{\omega_i}, \ j = 1, 2, \cdots, l. \tag{5.2}$$

Из неравенства (2.2) получаем

$$\operatorname{card}(T^0_\omega \cap \Delta_{\omega_i}) < \infty, \ i = 1, 2, \cdots, l. \tag{5.3}$$

Из (5.2) и (5.3) следует

$$\operatorname{card} T^0_\omega = \sum_{i=1}^{l} \operatorname{card}(T^0_\omega \cap \Delta_{\omega_i}) < \infty.$$

Согласно лемме 1.2 ω есть k-решетка. Отметим, что в отличие от однородного случая не всегда имеет место $k = l$. $\square$

Пусть M—группа всех евклидовых движений в R_n. Обозначим

$$M_\omega = \{m\omega\}_{m\in M}, \ \omega \subset R^n.$$

Определение 4. Если для точечной системы ω существует однородный и изотропный случайный точечный процесс ξ, распределение которого сосредоточено на M_ω, то ω называется однородно и изотропно рандомизируемой точечной системой, а ξ — однородной и изотропной рандомизацией точечной системы ω.

Теорема 3. *Для того, чтобы точечная система ω была однородно и изотропно рандомизируемой необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной k-решеткой.*

Доказательство. Нужная рандомизация невырожденной k-решетки получается случайным движением этой k-решетки, равномерно распределенным на $D \times \Gamma$, где D—фундаментальный параллелепипед k-решетки, Γ — группа вращений R^n вокруг 0. Докажем обратное утверждение, а именно, что однородно и изотропно рандомизируемы только k-решетки.

Пусть ξ — однородная и изотропная рандомизация точечной системы ω. Ее распределение Пальма π, в силу леммы 4.1, сосредоточено на множестве

$$M^0_\omega = \{v \in M_\omega : 0 \in v\} = \bigcup_{x\in\omega} \Delta_{\omega-x}. \tag{5.4}$$

Согласно лемме 5.1 „пучки“ реализаций $\Delta_{\omega-x}$ имеют для всех $x \in \omega$ одинаковую π-вероятность. Следовательно, сумма в (5.4) состоит из конечного числа l слагаемых. Таким образом, $\pi(\Delta_{\omega-x}) = \frac{1}{l} > 0$ и в силу леммы 5.2, ω есть невырожденная k-решетка. □

Аналогично теореме 2 можно получить следующее утверждение.

Теорема 4. *Однородный и изотропный точечный процесс является конечной (счетной) смесью однородных и изотропных рандомизаций k-решеток тогда и только тогда, когда его распределение Пальма сосредоточено на конечном (счетном) объединении пучков реализаций.*

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12. XII. 1983

Հ. Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ. Պատահական կավարների բնութագրման մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում առաջարկվում է ձևափոխությունների խմբերի նկատմամբ կետային բազմությունների ռանդոմիզացման հասկացողությունը։ Ապացուցվում է, որ R^n տարածության մեջ զուգահեռ տեղափոխությունների և բոլոր շարժումների խմբերի նկատմամբ ռանդոմիզացման ենթակա են միայն k-կավարները՝ k կոնգրուենտ կավարների միավորումները։

Ցույց է տրվում, որ համասեռ պատահական կետային պրոցեսի Պալմի բաշխման դիսկրետ լինելը համարժեք է այդ պրոցեսի բաշխման կենտրոնացմանը k-կավարների վրա։

G. S. SUKIASIAN. *On characterization of random lattices* (summary)

The concept of point set randomization with respect to a group is introduced. It is shown that only socalled k—lattices are randomizable both for the parallel translations and all motions of the R^n space. It is shown that the Palm distribution of a homogeneous random point process in R^n is discrete iff the process is concentrated on k-lattices.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Керстан, К. Маттес, И. Мекке.* Безгранично делимые точечные процессы, М. «Наука», 1982.
2. *Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен.* Наглядная геометрия, М., «Наука», 1981.
3. *Л. Фейеш Тот.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., Физматгиз, 1958.
4. *Р. В. Амбарцумян.* Однородные и изотропные случайные точечные поля на плоскости, Math. Nachrichten, 70, 1976, 365—385.