

УДК 519.218.5

Р. Г. АРАМЯН

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕАФФИННЫХ ШЕЙПОВ

В предыдущей статье Р. В. Амбарцумяна были определены вероятностные меры $P_{n,r}$ в пространстве $T_{n,r}$ «неаффинных шейпов» r -точечных множеств в R^n . Там же была поставлена общая задача о вычислении вероятностей компонентов на которые распадаются (при исключении вырождений) пространства $T_{n,r}$.

В настоящей работе определяются рекуррентные соотношения между вероятностями событий $B_r^k \subset T_{n,r}$,

$$B_r^k = \left\{ \begin{array}{l} \text{минимальная выпуклая оболочка } r\text{-множества} \\ \text{имеет } k \text{ вершин} \end{array} \right\}$$

и вычисляются вероятности этих событий для $T_{2,5}$.

1. Рассмотрим упорядоченные последовательности $(P_1, \dots, P_r), v \geq n+1$ точек из R^n . Предполагаем, что никакие $n+1$ точки из $(P_1, \dots, P_r)$ не лежат на одной гиперплоскости.

Фактор-пространство

$$T_{n,r} = [(R^n)' / Z] \setminus A_s(n) \times (0, \infty),$$

где Z — множество исключенных последовательностей, $A_s(n)$ — специальная группа аффинных преобразований пространства R^n , называется пространством неаффинных шейпов (см. [1]).

Неаффинные шейпы естественно описывать с помощью отношений объемов симплексов с вершинами из $\{P_1, \dots, P_r\}$ к объему минимальной выпуклой оболочки (м.в.о.) множества $[P_1, \dots, P_r]$. Каждую точку из $[P_1, \dots, P_r]$ можно описать однозначно с помощью n таких отношений. Пространство $T_{n,r}$ распадается на объединение попарно несвязанных компонентов, каждая из которых представляет собой область в $R^{n(r-(n+1))}$.

Рассмотрим меру $L' = \prod_{i=1}^r L_i$ на $(R^n)'$, где $L_i, i = \overline{1, r}$ мера Лебега на R^n с элементом dP_i .

Согласно (4) (см. [1])

$$\prod_{i=1}^r dP_i = c_{n,r} dA V^{r-2} P_{n,r}(dt), \quad (1.1)$$

где V — объем (м.в.о.) множества $[P_1, \dots, P_r]$, $P_{n,r}$ — вероятностная мера в $T_{n,r}$, dA — элемент меры Хаара на $A_s(n)$, $c_{n,r}$ — константы.

Тройку (A, V, τ) , соответствующую $(P_1, \dots, P_r)$ обозначим через $g(P_1, \dots, P_r) = (A(P_1, \dots, P_r), V(P_1, \dots, P_r), \tau(P_1, \dots, P_r))$. Обозначим через $B_r^k \subset T_{n,r}$ события

$B_r^k = \{\tau(P_1, \dots, P_r): \text{м.в.о. множества } \{P_1, \dots, P_r\} \text{ имеет } k \text{ вершин}\}$, где $r = n+1, n+2, \dots, k = n+1, \dots, r$.

Заметим, что каждое B_r^k представляет собой объединение конечного числа областей из $R^{n(r-(n+1))}$.

Лемма. При любом (r, k) , где $r > n+1$ и $k = n+1, \dots, r$, имеют место рекуррентные соотношения

$$c_{n,r} P_{n,r}(B_r^k) = C_r^* c_{n,k} P_{n,k}(B_k^k). \quad (1.2)$$

Доказательство. Обозначим

$$E_r^k = \{(P_1, \dots, P_r): g(P_1, \dots, P_r) \in G \times (0, 1) \times B_r^k\},$$

здесь и далее $G \subset A_s(n)$ и $\mu(G) < \infty$, μ — мера Хаара на $A_s(n)$. Тогда согласно (1.1) и по теореме Фубини имеем

$$L^r(E_r^k) = \int_{\sigma \times (0,1) \times B_r^k} c_{n,r} dA V^{r-2} dV P_{n,r}(d\tau) = c_{n,r} P_{n,r}(B_r^k) \mu(G) \int_0^1 V^{r-2} dV. \quad (1.3)$$

Теперь подсчитаем $L^r(E_r^k)$ другим способом. Произведение $\prod_{i=1}^r dP_i$ можно представить следующим образом:

$$\prod_{i=1}^r dP_i = c_{n,k} dA V^{k-2} dV P_{n,k}(d\tau) dP_{k+1} \dots dP_r,$$

здесь тройка (A, V, τ) соответствует $(P_1, \dots, P_k)$.

Обозначим

$$E_{r,k}^k = \{(P_1, \dots, P_r): (A, V, \tau) \in G \times (0, 1) \times B_k^k, \\ \text{а } P_i \in \text{м.в.о. } \{P_1, \dots, P_k\} \text{ для } i = k+1, \dots, r\}.$$

Из соображений симметрии, используя теорему Фубини получаем

$$\begin{aligned} L^r(E_r^k) &= C_r^* L^r(E_{r,k}^k) = C_r^* \int_{E_{r,k}^k} c_{n,k} dA V^{k-2} dV P_{n,k}(d\tau) dP_{k+1} \dots dP_r = \\ &= C_r^* \int_{\sigma \times (0,1) \times B_k^k} c_{n,k} dA V^{k-2} dV P_{n,k}(d\tau) \int_{\substack{\{P_j \in \text{м.в.о. } \{P_1, \dots, P_k\} \\ j=k+1, \dots, r}} dP_{k+1} \dots dP_r = \\ &= C_r^* \int_{\sigma \times (0,1) \times B_k^k} c_{n,k} dA V^{k-2} V^{r-k} dV P_{n,k}(d\tau) = \\ &= C_r^* c_{n,k} P_{n,k}(B_k^k) \mu(G) \int_0^1 V^{r-2} dV, \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь

$$C_r^k = \frac{r!}{k! (r-k)!}.$$

Сравнивая оба выражения (1.3) и (1.4) получаем (1.2).

2. Покажем как можно вычислить меры $c_{2,5} P_{2,5}(B_5^4)$ для $k=3, 4, 5$ в случае $r=5, n=2$. Известно (см. [1]), что $c_{2,3} P_{2,3}(B_3^3) = \frac{1}{2}$ и $c_{2,4} P_{2,4}(B_4^1) = 3$.

Откуда сразу заключаем, что

$$c_{2,5} P_{2,5}(B_5^3) = C_5^3 c_{2,3} P_{2,3}(B_3^3) = 5.$$

$$c_{2,5} P_{2,5}(B_5^4) = C_5^4 c_{2,4} P_{2,4}(B_4^1) = 15.$$

Для вычисления $c_{2,5} P_{2,5}(B_5^5)$ применим подобный подход. Запишем $\prod_{l=1}^5 dP_l$ двумя способами

$$\prod_{l=1}^5 dP_l = c_{2,5} dA S^3 dS P_{2,5}(d\tau), \quad (2.1)$$

$$\prod_{l=1}^5 dP_l = c_{2,4} dA S_1^3 dS_1 P_{2,4}(d\tau) dP_5. \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) (A, S_1, τ) соответствует (P_1, P_2, P_3, P_4) . Отсюда получаем

$$c_{2,5} dA e^{-S} S^3 dS P_{2,5}(d\tau) = c_{2,4} dA S_1^3 dS_1 P_{2,4}(d\tau) e^{-S} dP_5.$$

Проинтегрируем обе части этого тождества по множеству $D = \{(P_1, \dots, P_5): \text{м.в.о. множества } \{P_1, \dots, P_5\} \text{ есть пятиугольник и } A(P_1, \dots, P_5) \in G\}$.

Проинтегрировав левую часть, получаем

$$\begin{aligned} \int_D c_{2,5} dA e^{-S} S^3 dS P_{2,5}(d\tau) &= c_{2,5} \mu(G) P_{2,5}(B_5^5) \int_0^\infty e^{-S} S^3 dS = \\ &= 6 \mu(G) c_{2,5} P_{2,5}(B_5^5). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Интегрирование правой части тождества с использованием теоремы Фубини дает

$$\int_D c_{2,4} dA S_1^3 dS_1 P_{2,4}(d\tau) e^{-S} dP_5 = c_{2,4} \int_{0 \times (0, \infty) \times B_4^4} dA S_1^3 dS_1 P_{2,4}(d\tau) \int_{\substack{\{P_5: \text{м.в.о. } \{P_1, \dots, P_5\} \\ \text{есть пятиугольник}\}}} e^{-S} dP_5. \quad (2.4)$$

Рассмотрим отдельно внутренний интеграл в последнем выражении. К фиксированному четырехугольнику добавим одну точку так, чтобы в результате получился выпуклый пятиугольник и вычислим $\int e^{-S} dP_5$, где S — площадь полученного пятиугольника.

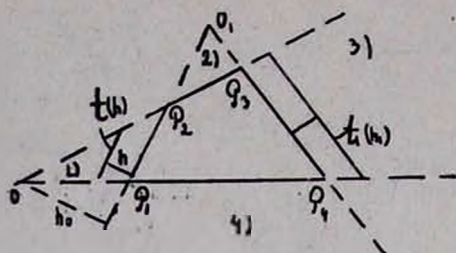


Рис. 1.

Для того, чтобы у нас получился выпуклый пятиугольник необходимо, чтобы точка P находилась в областях 1). 2). 3). 4). (см. рис. 1).

Для области 1) имеем

$dP = dt dh$, где $t \perp h$, $h \perp P_1 P_2$ и из подобия треугольников получаем $t(h) = a \left(\frac{h_0 - h}{h_0} \right)$.

Используя теорему Фубини, получаем

$$\int_1 e^{-s} dP = \int_1 e^{-s} dt dh = \int_0^{h_0} e^{-s_1 - \frac{ah}{2}} a \left(1 - \frac{h}{h_0} \right) dh = 2e^{-s_1} \left[\frac{e^{-s_{12}} - 1}{S_{12}} + 1 \right].$$

Для области 3) имеем

$dP = dt_1 dh_1$, где $t_1 \perp h_1$ и $h_1 \perp P_3 P_4$, H высота $\triangle O P_3 P_4$, опущенная из O . Из подобия треугольников следует $t_1(h) = b \left(\frac{H + h_1}{H} \right)$.

Снова используя теорему Фубини получаем

$$\int_3 e^{-s} dP = \int_0^{bh_1} e^{-s_1 - \frac{bh_1}{2}} b \left(1 + \frac{h_1}{H} \right) dh_1 = 2e^{-s_1} \left[1 + \frac{1}{S_1 + S_{12}} \right].$$

Подобным же образом в оставшихся случаях будет:

$$\int_2 e^{-s} dP = 2e^{-s_1} \left[\frac{e^{-s_{22}} - 1}{S_{23}} + 1 \right], \quad \int_4 e^{-s} dP = 2e^{-s_1} \left[1 + \frac{1}{S_1 + S_{23}} \right].$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\int_{1 \cup 2 \cup 3 \cup 4} e^{-s} dP = 2e^{-s_1} \left[4 + \frac{e^{-s_{12}} - 1}{S_{12}} + \frac{e^{-s_{22}} - 1}{S_{23}} + \frac{1}{S_1 + S_{12}} + \frac{1}{S_1 + S_{23}} \right]. \quad (2.5)$$

Обозначим

$$S_{12} = x S_1, \quad S_{23} = y S_1.$$

Подставляя выражение (2.5) в (2.4) и интегрируя по S_1 , получаем

$$c_{2.4} \int_{\alpha \times (0, \infty) \times B_1^4} dA P_{2.4}(d\tau) 2e^{-s_1} \left[4 + \frac{e^{-s_{12}} - 1}{S_{12}} + \frac{e^{-s_{22}} - 1}{S_{23}} + \frac{1}{S_1 + S_{12}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{S_1 + S_2} \left] S_1^2 dS_1 = c_{2,4} \int_{\gamma \times B_1^4} \left(16 - \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+y)^2} \right) P_{2,4}(d\tau) dA.$$

B_1^4 есть объединение трех единичных открытых квадратов, а $c_{2,4} P_{2,4}(d\tau)$ — мера Лебега на них (см. [1]). Следовательно, в силу симметрии последний интеграл равен

$$3 \int_{\sigma \times [0,1]^2} \left[16 - \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+y)^2} \right] dv_1 dv_2 dA. \quad (2.6)$$

Остается выразить x и y через (v_1, v_2) ,

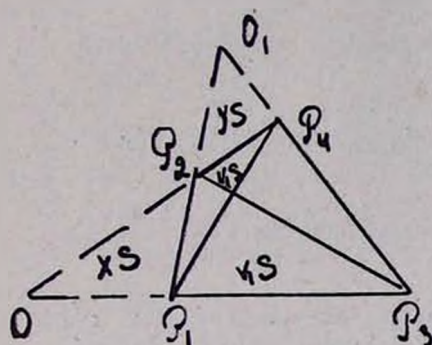


Рис. 2.

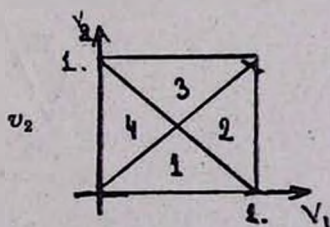
S — площадь $P_1P_2P_4P_3$
 v_1S — площадь $\triangle P_1P_2P_3$
 v_2S — площадь $\triangle P_2P_3P_4$
 xS — площадь $\triangle OP_2P_1$
 yS — площадь $\triangle O_1P_4P_2$

Здесь (v_1, v_2) — это $\tau(P_1, P_2, P_3, P_4)$. Возможны четыре случая, в зависимости от того, какие стороны четырехугольника $P_1P_2P_4P_3$ являются основаниями получающихся треугольников xS и yS . Эти случаи легко рассмотреть, сравнивая расстояния точек P_2 и P_4 от ребра P_1P_3 , и расстояния точек P_4 и P_3 от ребра P_1P_2 .

Соответствующие области имеют вид

$$1 \begin{cases} v_1 < 1 - v_2, \\ v_2 < v_1 \end{cases} \quad 2 \begin{cases} v_1 > 1 - v_2, \\ v_2 < v_1 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} v_1 > 1 - v_2, \\ v_2 > v_1 \end{cases} \quad 4 \begin{cases} v_1 < 1 - v_2, \\ v_2 > v_1 \end{cases}$$

и на единичном квадрате выглядят следующим образом:



В каждом из этих четырех случаев определим x и y через v_1 и v_2 ,

$$1) \begin{cases} v_1 < 1 - v_2 \\ v_2 < v_1 \end{cases}$$

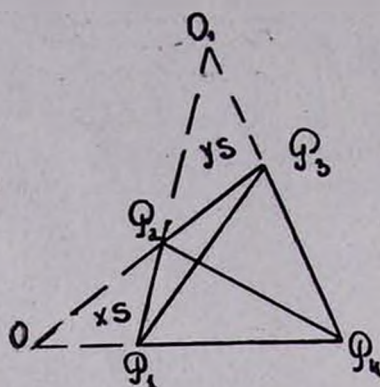


Рис. 3.

$v_1 S$ — площадь $\triangle P_1 P_2 P_4$
 $v_2 S$ — площадь $\triangle P_1 P_2 P_5$
 S — площадь $P_1 P_2 P_3 P_4$
 $x S$ — площадь $\triangle O P_2 P_1$
 $y S$ — площадь $\triangle O P_3 P_2$

Легко видеть, что

$$\frac{xS + v_1 S}{(1 - v_1) S} = \frac{|O P_2|}{|P_2 P_3|} = \frac{xS}{v_2 S}, \text{ следовательно, } x = \frac{v_1 v_2}{1 - v_1 - v_2}$$

$$\text{и } \frac{yS + (1 - v_1) S}{v_1 S} = \frac{|O P_2|}{|P_2 P_1|} = \frac{yS}{v_2 S}, \text{ следовательно, } y = \frac{(1 - v_1) v_2}{v_1 - v_2}.$$

Аналогичными соображениями в остальных случаях получаем

2)

$$x = \frac{(1 - v_2)(1 - v_1)}{v_1 + v_2 - 1}$$

$$y = \frac{(1 - v_1) v_2}{v_1 - v_2}$$

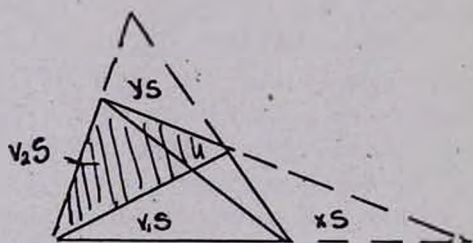


Рис. 4.

3)

$$x = \frac{(1 - v_2)(1 - v_1)}{(v_2 + v_1 - 1)}$$

$$y = \frac{(1 - v_2) v_1}{v_2 - v_1}$$

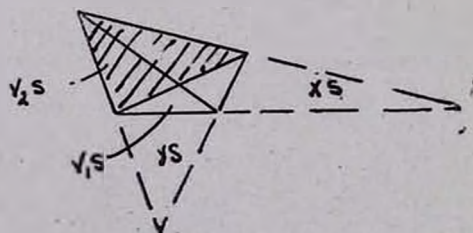


Рис. 5.

4)

$$x = \frac{v_1 v_2}{1 - v_1 - v_2} \quad y = \frac{(1 - v_2) v_1}{v_2 - v_1}$$

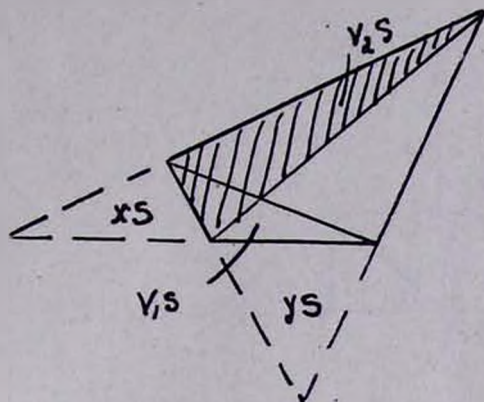


Рис. 6.

Подставляя вместо x и y полученные значения в выражение

$$8 - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(1+y)^3}, \text{ получаем:}$$

в 1-ом случае

$$8 - \frac{(1-v_1-v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)^2} - \frac{(v_1-v_2)^2}{v_1^2(1-v_2)^2} = f_1(v_1, v_2),$$

во 2-ом случае

$$8 - \frac{(1-v_1-v_2)^2}{v_1^2 v_2^2} - \frac{(v_1-v_2)^2}{v_1^2(1-v_2)^2} = f_2(v_1, v_2),$$

в 3-ем случае

$$8 - \frac{(1-v_1-v_2)^2}{v_1^2 v_2^2} - \frac{(v_2-v_1)^2}{v_2^2(1-v_1)^2} = f_3(v_1, v_2),$$

в 4-ом случае

$$8 - \frac{(1-v_1-v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)^2} - \frac{(v_2-v_1)^2}{(1-v_1)^2 v_2^2} = f_4(v_1, v_2).$$

Заменой переменных легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \int_{(1)} \int f_1(v_1, v_2) dv_1 dv_2 &= \int_{(2)} \int f_2(v_1, v_2) dv_1 dv_2 = \int_{(3)} \int f_3(v_1, v_2) dv_1 dv_2 = \\ &= \int_{(4)} \int f_4(v_1, v_2) dv_1 dv_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Легко видеть, что и область (1) можно разделить на две части (см. рис. 7), на которых интегралы от $f_1(v_1, v_2)$ равны.

Подставляя выражение для $8 - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(1+y)^3}$ в (2.6), учитывая (2.7) и интегрируя по dA , получаем

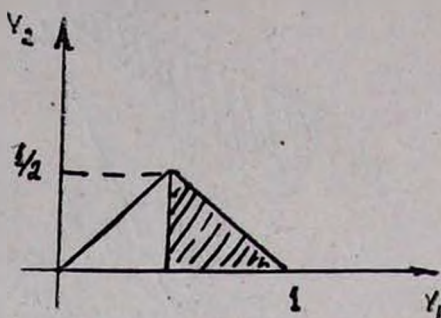


Рис. 7.

$$48 \mu(G) \int_0^{1/2} dv_1 \int_0^{v_1} f_1(v_1, v_2) dv_2 = 48 \mu(G) \times \\ \times \left(1 - \int_0^{1/2} dv_1 \int_0^{v_1} \left[\frac{(1-v_1-v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)^2} + \frac{(v_1-v_2)^2}{v_1^2(1-v_2)^2} \right] dv_2 \right). \quad (2.9)$$

Отдельно рассмотрим несколько интегралов.

1.) Заменой переменной $1-v_2=a$ получаем

$$\int_0^{v_1} \left| \frac{(1-v_1-v_2)^2}{(1-v_1)^2(1-v_2)^2} + \frac{(v_1-v_2)^2}{v_1^2(1-v_2)^2} \right| dv_2 = \\ = \int_{1-v_1}^1 \left| \frac{a^2-2v_1a+v_1^2}{a^2(1-v_1)^2} + \frac{a^2-2a(1-v_1)+(1-v_1)^2}{v_1^2 a^2} \right| da = \\ = \frac{v_1}{(1-v_1)^2} + \frac{2v_1}{(1-v_1)^2} \ln(1-v_1) + \frac{v_1^3}{(1-v_1)^2} - 1 + \\ \frac{a(v_1)}{b(v_1)} + \frac{2}{v_1} + \frac{2(1-v_1)}{v_1^2} \ln(1-v_1) \quad (2.10)$$

2.) Заменой переменной $1-v_1=a$ получаем

$$\int_0^{1/2} a(v_1) dv_1 = \int_{1/2}^1 \left[\frac{1-a}{a^2} + \frac{2(1-a) \ln a}{a^2} + \frac{(1-a)^2}{a^3} - 1 \right] da = \\ = (1 - \ln 2)^2 - \frac{1}{2}. \quad (2.11)$$

3.) Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^{1/2} b(v_1) dv_1 = -2 \int_0^{1/2} [v_1 + (1-v_1) \ln(1-v_1)] d \frac{1}{v_1} = -2 [1 - \ln 2] - 2 \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-v_1)}{v_1} dv_1. \quad (2.12)$$

4) Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-v_1)}{v_1} dv_1 = \int_0^{1/2} \ln(1-v_1) d \ln v_1 = \ln^2 2 + \int_0^{1/2} \frac{\ln v_1}{1-v_1} dv_1 = \ln^2 2 + \int_0^1 \frac{\ln v_1}{1-v_1} dv_1 - \int_0^1 \frac{\ln(1-v_1)}{v_1} dv_1.$$

Следовательно

$$2 \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-v_1)}{v_1} dv_1 = \ln^2 2 + \int_0^1 \frac{\ln v_1}{1-v_1} dv_1 = \ln^2 2 - \frac{\pi^2}{6}, \quad (2.13)$$

так как интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln v_1}{1-v_1} dv_1 = -\frac{\pi^2}{6} \quad (\text{см. [2]}).$$

Теперь продолжая (2.12) с учетом (2.13), имеем

$$\int_0^{1/2} b(v_1) dv_1 = -2 [1 - \ln 2] - \ln^2 2 + \frac{\pi^2}{6}. \quad (2.14)$$

Окончательно, продолжая (2.9) с использованием (2.10), (2.11), (2.14), получаем

$$48 \mu(G) \left[1 - \int_0^{1/2} [a(v_1) + b(v_1)] dv_1 \right] = 8 \mu(G) [15 - \pi^2]. \quad (2.15)$$

Сравнивая выражения (2.15) и (2.3), имеем

$$c_{2,5} P_{2,5}(B_5^3) = \frac{4}{3} [15 - \pi^2].$$

Для $c_{2,5}$ имеем

$$c_{2,5} = \sum_{k=3}^5 c_{2,5} P_{2,5}(B_5^k) = 40 - \frac{4}{3} \pi^2,$$

а соответствующие вероятности будут

$$P_{2,5}(B_5^3) = \frac{15}{120 - 4\pi^2}, \quad P_{2,5}(B_5^4) = \frac{45}{120 - 4\pi^2}, \quad P_{2,5}(B_5^5) = \frac{15 - \pi^2}{30 - \pi^2}.$$

Работа выполнена под руководством Р. В. Амбарцумяна, которому автор приносит глубокую благодарность.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 8. VII. 1984

Ռ. Ն. ԱՐԱՄՅԱՆ. Ոչաֆին շեյֆերի հավանականությունների հաշվման մասին. (ամփոփում)

Ռ. Վ. Համբարձումյանի նախորդ հոդվածում սահմանվել է $P_{n,r}$ հավանականային շափեր R^n -ի r -կետանոց ենթարազմությունների «ոչաֆին շեյֆերի» $T_{n,r}$ տարածությունում: Այնտեղ նաև որոշվում է կոմպոնենտների հավանականությունների հաշվման վերաբերյալ ընդհանուր խրո-դիբը, որոնց տրամիտ է $T_{n,r}$: Այդ հոդվածում որոշված են ունիտրենտ հարաբերություններ $B_r^k \subset T_{n,r}$ պատահարների հավանականությունների միջև, որտեղ

$$B_r^k = \left\{ \begin{array}{l} r\text{-բազմություն միևնույն ունիտրիկ թաղանթը} \\ \text{ունի } k\text{-գազաթ} \end{array} \right\}$$

և հաշվված են այդ պատահարների հավանականությունները $T_{2,3}$ տարածությունում:

R. H. ARAMIAN. On probabilities of nonaffine shapes (summary)

In [1] R. V. Ambartsumian has defined certain natural probability measure $P_{n,r}$ in the spaces $T_{n,r}$ of r -point nonaffine shapes in R^n . The problem of calculation of probabilities of the components of these spaces (which remain after removing degeneracies) has been mentioned in [1] as basic.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян. О задачах типа Сильвестра для однородных пуассоновских процессов, Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, 20, № 4, 1985, 284—288.
2. И. С. Градштейн и Н. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений, М., Физматгиз, 1963.