ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 4, 1985 Математика

УДК 519.218.5

Р. В. АМБАРЦУМЯН

О ЗАДАЧАХ ТИПА СИЛЬВЕСТРА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПУАССОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Содержание настоящей заметки было темой доклада, сделанного автором на годичном собрании отделения физико-математических наук АН Армянской ССР, 28 марта 1984 г.

Напомним классическую задачу Сильвестра о четырех точках. На плоскости имеется ограниченная выпуклая область D. В нее случайно, независимо друг от друга, бросаются четыре точки, каждая с равномерным распределением внутри D. Найти вероятность того, что точки образуют выпуклый четырехугольник.

Мы предлагаем следующую модификацию этой задачи. Рассматриваем однородный пуассоновский точечный процесс $\{P_i\}$ на плоскости. Выбирается «типичная четверка точек» из $\{P_i\}$. Найти вероятность того, что точки «типичной четверки» образуют выпуклый четырехугольник. Отметим, что понятие «типичной четверки» нуждается в специальном определении.

Ниже приводятся необходимые определения и предложения, ведущие к решению модифицированной задачи, а также аналогичных задач для однородных пуассоновских процессов в пространствах R^n.

I. В основе предлагаемого подхода лежит следующее предложение, относящееся к интегральной геометрии.

Рассмотрим последовательности $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ точек из R^n, которые образуют в R^n невырожденный симплекс. Пространство таких последовательностей можно отождествить с произведением

$$\mathbf{A}_s(n) \times (0, \infty), \tag{1}$$

где $\mathbf{A}_s(n)$ — т. н. *специальная группа аффиных преобразований пространства* R^n (определитель каждого преобразования равен $+1$ или -1). Именно, с помощью гомотетии с центром в P_1, каждой последовательности $(P_1, \cdots, P_{n+1})$ ставится в соответствие подобный симплекс s единичного объема (с нумерованными вершинами).

Всегда существует единственное $A \in \mathbf{A}_s(n)$, переводящее точки

$$P_1^{(0)} = (0, \cdots, 0),\ P_2^{(0)} = (1, 0, \cdots, 0), \cdots,\ P_{n+1}^{(0)} = (0, \cdots, 0, 1)$$

в вершины симплекса s с соответствующими номерами. Представление (1) получается с помощью отображения

$$(P_1, \cdots, P_{n+1}) \to (A, V), \tag{2}$$

где V — объем симплекса $(P_1, \cdots, P_{n+1})$.

Используя общее предложение о факторизации (см. [1]), легко находим

$$\prod_{i=1}^{n+1} dP_i = \frac{1}{2}\, dA\, V^{n-1}\, dV, \tag{3}$$

здесь и ниже dP_i — меры Лебега в R^n, dA — (биинвариантная) мера Хаара на группе $\mathbf{A}_s(n)$. Автором получено следующее обобщение равенства (3), касающееся последовательностей $(P_1, \ldots, P_r)$ любой длины $r \geqslant 3$.

Именно

$$\prod_{i=1}^{r} dP_i = c_{n,r}\, dA\, V^{r-2}\, dV\, \mathbf{P}_{n,r}(d\tau), \tag{4}$$

где V теперь обозначает объем минимальной выпуклой оболочки множества $\{P_1, \cdots, P_r\}$, $\mathbf{P}_{n,r}$ — некоторая вероятностная мера в фактор-пространстве $(R^n)^r/\mathbf{A}_s(n) \times (0, \infty)$, $c_{n,r}$ — некоторая константа. Элементы τ из указанного фактор-пространства мы называем *неаффинными шейпами*.

Пример. Пусть $n = 2$, $r = 4$. В этом случае параметр τ двумерен, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$. Выбором

$$\tau_1 = V_1/V, \quad \tau_2 = V_2/V,$$

где V_1, V_2 — площади треугольников, указанных на рис. 1, мы отождествляем пространство неаффинных шейпов с объединением семи областей: трех единичных квадратов и четырех треугольников площади 1/2 каждый. Здесь для ясности мы выбросили из рассмотрения все четверки, содержащие тройки коллинеарных точек. На упомянутых компонентах мера $c_{2,4}\mathbf{P}_{2,4}$ совпадает со стандартной мерой Лебега. Таким образом, имеем

$$c_{2,4} = 5.$$

Укажем, что квадраты соответствуют трем конфигурациям типа б) (см. рис. 1), а треугольники—конфигурации а) и трем конфигурациям типа в). Отсюда следует решение задачи Сильвестра для вероятности $\mathbf{P}_{2,4}$:

$$\mathbf{P}_{2,4}\ (\text{выпуклый четырехугольник}) = \frac{3}{5}.$$

Естественно поставить задачу вычисления вероятностей компонент, на которые распадается (при исключении вырождений) пространство неаффинных шейпов для общих n и r. Эту задачу мы называем задачей *типа Сильвестра* для общей вероятности $\mathbf{P}_{n,r}$. Приведем решение задачи типа Сильвестра для $n = 3$, $r = 5$.

$\mathbf{P}_{3,5}$ (минимальная выпуклая оболочка пяти точек в R^3 есть тетраэдр) $= 1/7$. Задача быстро усложняется с ростом r. Ее решение для $n = 2$, $r = 5$ приведено в статье Р. Г. Арамяна, помещенной в настоящем номере журнала.

II. Частоты, соответствующие значениям вероятностей $\mathbf{P}_{n,r}$ должны наблюдаться в реализациях однородных точечных процессов Пуассона в R^n. Здесь мы имеем в виду следующее утверждение.

Пусть $\{P_i\}$ — однородный точечный процесс Пуассона в R^n. Через $\{P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}\}$, где $r > n+1$, обозначим случайную совокупность r-под

множеств, выбираемых из реализации процесса $\{P_i\}$, подчиненных условию: минимальная выпуклая оболочка точек $P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}$ содержит l

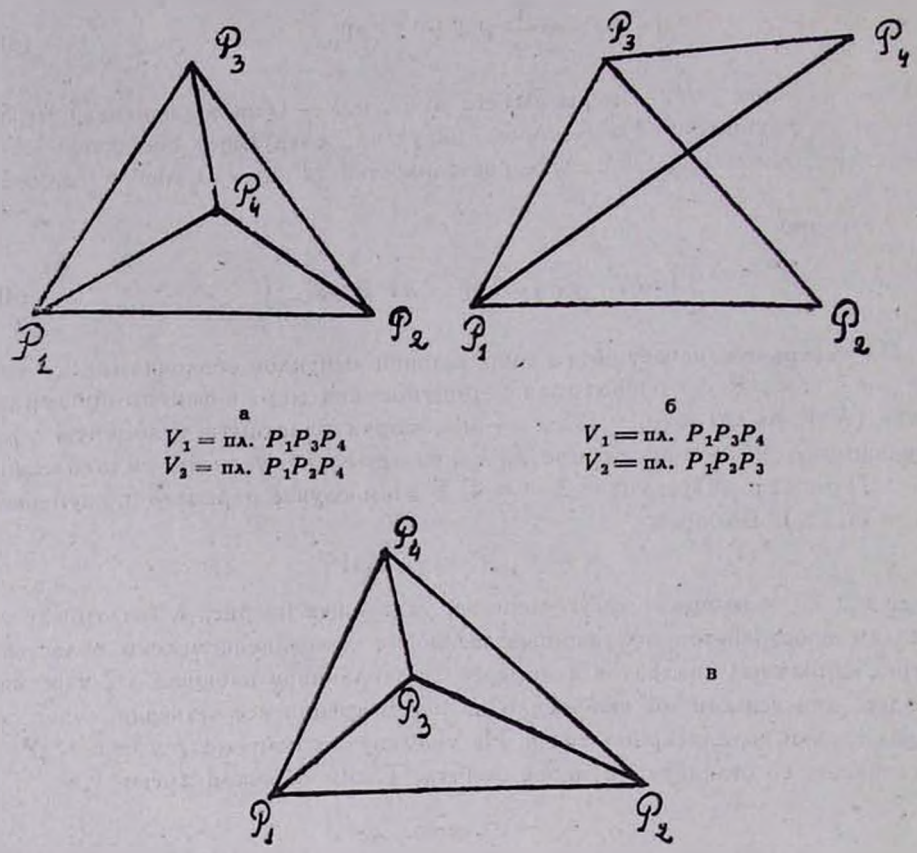

Рис. 1.

точек из $\{P_i\}$, не принадлежащих $\{P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}\}$. С помощью отображения (обозначения см. в пункте 1)

$$(P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}) \to (A_k, V_k, \tau_k)$$

получаем представление $\{P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}\}_l$ в виде *маркированного точечного процесса на группе* $\mathbf{A}_s(n)$:

$$\{P_{i_1}, \cdots, P_{i_r}\}_l = \{A_k, V_k, \tau_k\}^{(l)}.$$

Поскольку процесс $\{P_i\}$ инвариантен относительно группы $\mathbf{A}_s(n)$, то то же самое верно и по отношению к $\{A_k, V_k, \tau_k\}^{(l)}$. Из (4) следует, что интенсивность процесса $\{A_k\}^{(l)}$ (т. е. проекции рассматриваемого маркированного процесса на $\mathbf{A}_s(n)$) равна

$$\sigma = c_{n,r} \int \frac{(\lambda V)^l}{l!} e^{-\lambda V} V^{r-2} dV < \infty$$

(в частности, среднее число точек процесса $|A_k|^{(l)}$ в области $D \subset \mathbf{A}_s(n)$ равно $\sigma H(D)$), где H — мера Хаара на $\mathbf{A}_s(n)$.

Следовательно, определено распределение „типичной марки" (V, τ) (см. [1]). Из (4) и пуассоновой природы процесса $\{P_l\}$ следует, что

в типичной марке величины V и τ независимы; типичная V имеет Γ-распределение с параметром $l+r-2$; типичная τ имеет распределение $\mathbf{P}_{n,r}$, получаемое из (4). *Это распределение не зависит от l.*

В частности, для однородного пуассоновского процесса $\{P_l\}$ на плоскости получаем решение модифицированной задачи Сильвестра: вероятность того, что «типичная» четверка в процессе $\{P_{l_1}, P_{l_2}, P_{l_3}, P_{l_4}\}_l$ образует выпуклый четырехугольник для всякого l, равна 3/5.

III. В заключение отметим также следующее обстоятельство.

Каждое $A \in \mathbf{A}_s(n)$ можно единственным образом представить в виде

$$A = M \cdot \delta, \tag{5}$$

где M — евклидово движение пространства R^n, δ — преобразование из группы так называемых *аффинных деформаций* пространства R^n (равенство (5) можно принять за определение аффинной деформации). Можно показать, что

$$dA = dM \cdot d\delta, \tag{6}$$

где dM—мера Хаара на евклидовой группе, $d\delta$—правоинвариантная мера Хаара на группе аффинных деформаций. Можно показать также, что

$$\int d\delta = \infty \tag{7}$$

(мера Хаара всей группы аффинных деформаций бесконечна).

Из (7) с помощью (3) приходим к следующему выводу: *с помощью ограничений, налагаемых только на объемы симплексов, нельзя получить какого-либо вероятностного распределения для формы типичного симплекса, натянутого на точки однородного пуассоновского процесса в R^n.* Подробнее об этом для случая $n = 2$ см. в [1].

Аналогичный отрицательный результат имеет место и для аффинных шейпов типичных r-точечных подмножеств однородных пуассоновских процессов в R^n при $r > n+1$. В этом смысле ситуация с аффинными шейпами противоположна описанной выше ситуации с неаффинными шейпами.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20. XI. 1984

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ. Սիլվեստրի տիպի խնդիրներ՝ համասեռ Պուասոնի պրոցեսների համար *(ամփոփում)*

Ներմուծվում է R^n-ում r r-կետանոց բազմությունների ուղիղ շեյփերի գաղափարը։ Բերվում է Սիլվեստրի տիպի խնդրի լուծումը՝ պուասոնյան կետային պրոցեսներում ուղիղ պատահական շեյփերի համար։

R. V. AMBARTZUMIAN. *On the Sylvester-type problems for homogeneous Poisson processes* (summary)

The notion of nonaffine shape of a r-subset in R^n is introduced. Solutions of the Sylvester type problems for nonaffine shapes in Poisson point processes are described ($n=2$; $r=4$ and $n=3$, $r=5$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. V. Ambartzumian.* Factorization in Integral and Stochastic Geometry. Stochastic Geometry, Geometrical Statistics, Stereology (edited by Ruben Ambartzumian and Wolfgang Weil): Teubner Texte zur Mathematic, Band 65 (Leipzig, 1984).