

УДК 517.512

И. А. ДЖВАРШЕЙШВИЛИ

ОБ ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Некоторые предварительные сведения

Обозначим через I множество непрерывных, действительных функций ω , определенных на $]0, +\infty[$ таких, что

- (а) ω — монотонно убывающая функция,
- (б) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \omega(\lambda) = 0, \lim_{\lambda \rightarrow 0} \omega(\lambda) = +\infty$,
- (в) существует хотя бы одно число $\alpha \in]0, 1[$ такое, что

$$\sup_{\lambda > 0} \frac{\omega(\alpha\lambda)}{\omega(\lambda)} \leq C_\alpha < +\infty, \quad (1.1)$$

где C_α — константа, зависящая только от α и функции ω . Нетрудно показать, что если условие (в) имеет место, то неравенство (1.1) выполняется для любого $\alpha \in]0, +\infty[$. Справедлива следующая [1]

Теорема 1. Для любой действительной, непрерывной и удовлетворяющей условиям (а) и (б) функции $v(\lambda), \lambda \in]0, +\infty[$, существует функция $\omega \in I$ такая, что

$$v(\lambda) \leq \omega(\lambda), \lambda \in]0, +\infty[.$$

§ 2. Пространство $D_\infty(\Omega, F, \mu)$ и его основные свойства

Пусть (Ω, F, μ) — вероятностное пространство с мерой μ , а $S(\Omega, F)$ — пространство F -измеримых μ почти всюду (μ -п.в.) конечных на Ω действительных функций. Для каждой функции $f \in S(\Omega, F)$ определим множество

$$E(f, \lambda) = \{x \in \Omega; |f(x)| > \lambda\},$$

где $\lambda > 0$. Для фиксированной функции $\omega \in I$ и F -измеримой функции f введем функцию

$$J_\infty(f, v) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\mu(E(f, \lambda v))}{\omega(\lambda)} = \sup_{\lambda > 0} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega\left(\frac{\lambda}{v}\right)}, \quad (2.1)$$

где $\lambda, v > 0$. Приведем некоторые свойства функции $J_\infty(f, v)$ (см. [2]).

Свойство 1. $J_\infty(f, v)$ — неотрицательная, монотонно убывающая на $]0, +\infty[$ и непрерывная справа функция.

Свойство 2. Если $J_{\omega}(f, \nu) \leq M < +\infty$, $\nu > 0$, то $f(x) = 0$, μ -п.в. на Ω .

Доказательство свойства 2. Действительно, в силу определения функции $J_{\omega}(f, \nu)$ имеем

$$\mu(E(f, \lambda\nu)) \leq M\omega(\lambda) \quad (2.2)$$

для любых $\lambda, \nu > 0$. Из (2.2) и в силу свойств функции $\omega(\lambda)$ имеем

$$\mu(E(f, 0)) = \lim_{\lambda, \nu \rightarrow 0} \mu(E(f, \lambda\nu)) \leq M \lim_{\lambda \rightarrow 0} \omega(\lambda) = 0.$$

Таким образом, $f(x) = 0$, μ -п.в. на Ω и свойство 2 доказано.

Заметим теперь, что в силу монотонности функция $J_{\omega}(f, \nu)$ может иметь не более чем счетное число точек разрыва, и то значение ν_j аргумента ν , для которого выполняется условие

$$J_{\omega}(f, \nu_j^-) > \nu_j \geq J_{\omega}(f, \nu_j^+)$$

будет единственным, здесь $J_{\omega}(f, \nu_j^-)$ и $J_{\omega}(f, \nu_j^+)$ левосторонний и правосторонний пределы функции $J_{\omega}(f, \cdot)$ в точке $\nu = \nu_j$. Введем обозначение $\|f\|_{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \nu_j$. Справедливы следующие предложения.

Предложение 1. Имеет место равенство

$$\|f\|_{\omega} = \inf \{ \nu > 0; J_{\omega}(f, \nu) \leq \nu \}.$$

Предложение 2. Пусть f и g — F -измеримые функции, а a и b — действительные числа такие, что $|a| \geq 1$, $|b| \leq 1$, тогда

$$\|f + g\|_{\omega} \leq \|f\|_{\omega} + \|g\|_{\omega},$$

$$|b| \|f\|_{\omega} \leq \|bf\|_{\omega} \leq \|f\|_{\omega} \leq \|af\|_{\omega} \leq |a| \|f\|_{\omega}.$$

Предложение 3. Для F -измеримой функции f , $\|f\|_{\omega} = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ μ -п.в. на Ω .

Определение 1. Скажем, что F -измеримая функция f принадлежит пространству $D_{\omega}(\Omega, F, \mu) = D_{\omega}$, если

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} = 0.$$

Следствие 1. Если $f \in D_{\omega}$, то $\|f\|_{\omega} < +\infty$.

Доказательство. Действительно, в силу определения пространства D_{ω} , для $\varepsilon > 0$ существуют $\lambda_{\varepsilon} > 0$ такое, что при $\lambda > \lambda_{\varepsilon}$ имеем

$$\frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} < \varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$J_{\omega}(f, 1) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} \leq \sup_{0 < \lambda < \lambda_{\varepsilon}} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} + \varepsilon \leq \frac{1}{\omega(\lambda_{\varepsilon})} + \varepsilon.$$

Далее, так как $J_{\omega}(f, \nu)$ — монотонно убывающая функция и в точке $\nu_0 = 1$ функция $J_{\omega}(f, \nu_0)$ ограничена, то ее график, начиная с некоторого ν , будет лежать ниже биссектрисы первого квадранта, то есть существует значение $\nu_j = \|f\|_{\omega}$ такое, что

$$J_{\omega}(f, v_f^+) \leq v_f \leq J_{\omega}(f, v_f^-),$$

и следствие доказано.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$S(\Omega, F) = \bigcup_{\omega \in I} D_{\omega}(\Omega, F, \mu). \quad (2.3)$$

Доказательство. Покажем сначала, что для любой функции $\omega \in I$ $D_{\omega}(\Omega, F, \mu) \subset S(\Omega, F)$. Действительно, пусть $f \in D_{\omega}$ и допустим, что существует множество $E \in F$, $\mu(E) > 0$ и $f(x) = \infty$ при $x \in E$, тогда

$$J_{\omega}(f, v) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\mu(E(f, \lambda v))}{\omega(\lambda)} \geq \sup_{\lambda > 0} \frac{\mu(E)}{\omega(\lambda)} = +\infty$$

для любого $v > 0$. Отсюда следует, что $\|f\|_{\omega} = +\infty$, а это, в силу следствия 1, невозможно, то есть наше допущение не верно, а потому для любого $\omega \in I$

$$D_{\omega}(\Omega, F, \mu) \subseteq S(\Omega, F)$$

и

$$\bigcup_{\omega \in I} D_{\omega} \subseteq S(\Omega, F). \quad (2.4)$$

Докажем теперь обратное включение. Пусть $f \in S(\Omega, F)$. В силу теоремы 1 существует $\omega(\lambda) \in I$ такое, что $\omega(\lambda) \geq \mu(E(f, \lambda))$. Тогда

$$\frac{\mu(E(f, \lambda))}{\sqrt{\omega(\lambda)}} = \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} \sqrt{\omega(\lambda)} \leq \sqrt{\omega(\lambda)}$$

и в силу свойств функции $\omega(\lambda)$ имеем $\sqrt{\omega(\lambda)} \in I$ и

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\sqrt{\omega(\lambda)}} = 0.$$

Таким образом, $f \in D_{\sqrt{\omega}}(\Omega, F, \mu)$, то есть

$$S(\Omega, F) \subseteq \bigcup_{\omega \in I} D_{\omega}(\Omega, F, \mu). \quad (2.5)$$

Суммируя (2.4) и (2.5), получаем утверждение теоремы.

Предложение 4. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ принадлежит пространству D_{ω} и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\omega} = 0$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится по мере к нулю, то есть для любого $a > 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E(f_n, a)) = 0.$$

Доказательство непосредственно следует из определения класса функций I , $\omega \in I$, и неравенства

$$\mu(E(f_n, a)) \leq \|f_n\|_{\omega} \omega\left(\frac{a}{\|f_n\|_{\omega}}\right).$$

Заметим, что для постоянной C имеет место следующее равенство:

$$\|C\|_\infty = \frac{1}{\omega\left(\frac{C}{\|C\|_\infty}\right)},$$

а также предельные равенства

$$\lim_{C \rightarrow 0} \|C\|_\infty = 0, \quad \lim_{C \rightarrow \infty} \|C\|_\infty = +\infty, \quad \lim_{\|C\|_\infty \rightarrow 0} C = 0, \quad \lim_{\|C\|_\infty \rightarrow +\infty} C = \infty.$$

Теорема 3. Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ принадлежит пространству D_ω и $\lim_{m, n \rightarrow +\infty} \|f_n - f_m\|_\omega = 0$. Тогда существует измеримая функция f такая, что $f \in D_\omega$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\omega = 0$.

Доказательство. Как видно из предложения 4 последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ будет сходиться по мере к некоторой измеримой функции f , тогда в силу определения функции J_ω и предложения 1 имеем

$$\mu(E(f - f_m, \lambda)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E(f_n - f_m, \lambda)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f_m\|_\omega \omega\left(\frac{\lambda}{\|f_n - f_m\|_\omega}\right). \quad (2.6)$$

Далее в силу условия теоремы для $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n, m > N(\varepsilon)$ имеем $\|f_n - f_m\|_\omega < \varepsilon$. Отсюда и в силу (2.6) при $n, m > N(\varepsilon)$ получим

$$\frac{\mu(E(f - f_m, \lambda))}{\omega\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)} \leq \varepsilon.$$

Из предложения 1 имеем $\|f - f_m\|_\omega < \varepsilon$, при $m > N(\varepsilon)$, то есть

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f - f_m\|_\omega = 0. \quad (2.7)$$

Покажем теперь, что $f \in D_\omega$. Действительно

$$\begin{aligned} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} &\leq \frac{\mu\left(E\left(f - f_m, \frac{\lambda}{2}\right)\right) \omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right) \omega(\lambda)} + \\ &+ \frac{\mu\left(E\left(f_m, \frac{\lambda}{2}\right)\right) \omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right) \omega(\lambda)} \leq C_{\frac{1}{2}} \left[\frac{\mu\left(E\left(f - f_m, \frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)} + \right. \\ &\left. + \frac{\mu\left(E\left(f_m, \frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В силу (2.7) для $0 < \varepsilon < 1$ существует число $M > 0$ такое, что при $m \geq M$ получим $\|f - f_m\|_\omega < \varepsilon$, тогда из предложения 1 имеем

$$\frac{\mu\left(E\left(f-f_m, \frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \leq \frac{\mu\left(E\left(f-f_m, \frac{\lambda}{2}\|f-f_m\|_{\infty}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \leq \|f-f_m\|_{\infty} < \varepsilon.$$

(2.9)

Из (2.8) и (2.9) получаем

$$\frac{\mu\left(E\left(f, \lambda\right)\right)}{\omega(\lambda)} < C_1 \left[\varepsilon + \frac{\mu\left(E\left(f_m, \frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right].$$

Переходя в обеих частях неравенства к пределу при $\lambda \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} \leq C_1 \cdot \varepsilon.$$

В силу произвольности ε , $0 < \varepsilon < 1$, имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} = 0,$$

то есть $f \in D_{\omega}$ и теорема доказана.

Функция $\rho_{\omega}(f, g)$, сопоставляющая измеримым функциям $f, g \in D_{\omega}$ число $\|f - g\|_{\omega}$, то есть $\rho_{\omega}(f, g) = \|f - g\|_{\omega}$, является метрикой в пространстве D_{ω} . Таким образом, из предыдущих результатов видно, что D_{ω} — метрическое и полное пространство относительно введенной метрики.

Приведем теперь пример последовательности измеримых функций $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ из пространства D_{ω} таких, что $|f_n|_{n=1}^{+\infty}$ сходится μ -п.в. к нулю, однако $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\omega} \neq 0$. Для этого выберем последовательность измеримых множеств $E_n \in \mathcal{F}$ так, чтобы $E_{n+1} \subset E_n$, $n=1, 2, \dots$, и $0 < \mu(E_n) = \omega(n)$, $n=1, 2, \dots$, это сделать возможно, так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega(n) = 0$. Определим теперь последовательность измеримых функций следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{когда } x \in E_n, n=1, 2, \dots \\ 0 & \text{— в остальных точках.} \end{cases}$$

Тогда последовательность $\{f_n\}$ μ -п.в. сходится к нулю на Ω . Далее

$$J_{\omega}(f_n, \nu) = \frac{\mu(E_n)}{\omega\left(\frac{n}{\nu}\right)} = \frac{\omega(n)}{\omega\left(\frac{n}{\nu}\right)},$$

$$J_{\omega}(f_n, 1) = 1, \quad n=1, 2, \dots$$

Таким образом, мы видим, что для каждого $n=1, 2, \dots$ график функции $J_{\omega}(f_n, \nu)$ пересекает биссектрису первого квадранта в точке $\nu=1$, а так как $J_{\omega}(f_n, \nu)$ — монотонно убывающая функция, то в силу предложения 1 имеем

$$\|f_n\|_0 = 1, n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, из сходимости μ -почти всюду к нулю последовательности $\{f_n\} \subset D_\omega$ не вытекает сходимости в метрике пространства D_ω к 0.

§ 3. Сепарабельность пространства D_ω

Пусть $\Omega = [0, 1]$, F — σ -алгебра и μ — мера Лебега. Следуя [3], приведем

Определение. Пусть $P = \{\tau(t)\}$ — некоторый класс конечных и измеримых функций на $[0, 1]$. Скажем, что класс P обладает свойством W (свойством Вейерштрасса) относительно множества A , где $A \in D_\omega$, если для любого $f \in A$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\tau \in P$ такая, что $\|f - \tau\|_\omega < \varepsilon$.

Лемма 1. Пусть $v(\lambda)$ — непрерывная, монотонная функция на $]0, +\infty[$ такая, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} v(\lambda) = +\infty$ и $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v(\lambda) = 0$. Пусть также даны два действительных числа A и B . Тогда на отрезке $[0, 1]$ существует непрерывная функция $f(x)$ такая, что $f(0) = A$, $f(1) = B$ и

$$\mu(\{x; |f(x)| > \lambda\}) \leq v(\lambda). \quad (3.1)$$

Доказательство. Для простоты рассуждений будем считать, что $A \geq B > 0$. Если $v(A) \geq 1$, то определим функцию $f(x)$ следующим образом: $f(x) = (B - A)x + A$, $x \in [0, 1]$. Очевидно, что $|f(x)| \leq A$, $x \in [0, 1]$, и если $0 < \lambda < A$, то имеем

$$\mu(E(f, \lambda)) < v(A) < v(\lambda). \quad (3.2)$$

Пусть теперь $v(A) < 1$. Определим функцию f следующим образом: если $x \in \left[0, \frac{v(A)}{2}\right]$, то $f(x) = -\frac{2A}{v(A)}x + A$, если же $x \in \left[\frac{v(A)}{2}, 1 - \frac{v(A)}{2}\right]$, то $f(x) = 0$, наконец, если $x \in \left[1 - \frac{v(A)}{2}, 1\right]$, то положим $f(x) = \frac{2B}{v(A)}x + \frac{2B}{v(A)}\left[\frac{v(A)}{2} - 1\right]$. Очевидно, что $|f(x)| < A$ когда $x \in [0, 1]$ и $\mu(E(f, 0)) = v(A)$. Далее, если $\lambda \geq A$, то неравенство (3.1) очевидно. Пусть $0 < \lambda < A$, в силу свойства функции v имеем

$$\mu(E(f, \lambda)) \leq v(A) \leq v(\lambda).$$

Отсюда и из (3.2) вытекает справедливость леммы.

Пользуясь этой леммой докажем следующую теорему.

Теорема 4. Пусть класс $P = \{\tau(x)\}$, состоящий из некоторых измеримых функций на $[0, 1]$ таков, что для всякой функции $g \in C[0, 1]$ ($C[0, 1]$ — множество непрерывных на $[0, 1]$ функций) и любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\tau_0 \in P$ со свойством $\sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - \tau_0(x)| < \varepsilon$.

Тогда класс P обладает W свойством относительно D_ω .

Доказательство. Пусть функция f принадлежит пространству D_ω , $0 < \varepsilon_n < 1$ и $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. По теореме Лузина (см.,

например, [4]) для ε_n существует совершенное множество $P_n \subset]0, 1[$ с $\mu(P_n) > 1 - \varepsilon_n$ такое, что $f \in C(P_n)$ (т. е. f непрерывна на P_n). Пусть

$$\sup_{x \in P_n} |(f x)| = M_n < +\infty. \quad (3.3)$$

Обозначим $\{]a_{nl}, b_{nl}[\}_{l=1}^{+\infty}$ — смежные интервалы к P_n на $[0, 1]$ и $\varepsilon(\lambda)$ — непрерывная, монотонно убывающая на $[0, +\infty[$ функция такая, что $\varepsilon(0) = 1$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varepsilon(\lambda) = 0$. Тогда функция $\omega(\lambda) \cdot \varepsilon(\lambda)$ будет непрерывной монотонно убывающей и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \omega(\lambda) \cdot \varepsilon(\lambda) = +\infty$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \omega(\lambda) \cdot \varepsilon(\lambda) = 0$.^{*} В

силу леммы 1 на каждом сегменте $[a_{nk}, b_{nk}]$, $k = \overline{1, +\infty}$, можно построить непрерывную функцию ψ_n такую, что $\psi_n(a_{nk}) = f(a_{nk})$, $\psi_n(b_{nk}) = f(b_{nk})$ и

$$\mu(\{x \in [a_{nk}, b_{nk}]; |\psi_n(x)| > \lambda\}) \leq \frac{\omega(\lambda) \cdot \varepsilon(\lambda)}{2^k}, \quad (3.4)$$

где $k = 1, 2, \dots$. Пусть

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in P_n \\ \psi_n(x), & x \in \bigcup_{k=1}^{+\infty}]a_{nk}, b_{nk}[\end{cases}$$

$n = 1, 2, \dots$, тогда $\Psi_n(x)$ будет непрерывной на $[0, 1]$ и

$$|\Psi_n(x)| \leq M_n, \quad x \in [0, 1], \quad (3.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi_n(x) = f(x) \text{ почти всюду на } [0, 1]. \quad (3.6)$$

Из (3.5) имеем, что $\Psi_n \in D_\omega$, $n = \overline{1, +\infty}$. Заметим также, что $\|\Psi_n\|_\omega$ равномерно ограничена. Действительно, из предложения 1 и неравенства (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \mu(E(\Psi_n, \lambda \|f\|_\omega)) &\leq \mu(\{x \in P_n; |\Psi_n(x)| > \lambda \|f\|_\omega\}) + \\ &+ \mu\left(\left\{x \in \bigcup_{k=1}^{+\infty}]a_{nk}, b_{nk}[; |\Psi_n(x)| > \lambda \|f\|_\omega\right\}\right) \leq \mu(\{x; |f(x)| > \lambda \|f\|_\omega\}) + \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(\{x \in]a_{nk}, b_{nk}[; |\Psi_n(x)| > \lambda \|f\|_\omega\}) \leq \|f\|_\omega \cdot \omega(\lambda) + \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} \omega(\lambda \|f\|_\omega) \varepsilon(\lambda \|f\|_\omega) = [\varepsilon(\lambda \|f\|_\omega) + \|f\|_\omega \omega(\lambda \|f\|_\omega)] \leq C \cdot \omega(\lambda) \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались условием (в) определения функции ω). Отсюда и из определения функции $J_\omega(f, \nu)$ следует, что

$$J_\omega(\Psi_n, \|f\|_\omega) \leq C < +\infty, \quad (3.7)$$

$n = \overline{1, +\infty}$. Из (3.7) и монотонности функции J_ω выводим, что

$$\|\Psi_n\|_\omega \leq \max\{C, \|f\|_\omega\}. \quad (3.8)$$

Предположим теперь, что выполняется неравенство $\|f - \Psi_n\|_\omega > \alpha > 0$, $n = \overline{1, +\infty}$. Тогда в силу предложения 1 для каждого n существует $\lambda_n > 0$ такая, что

$$\alpha < \frac{\mu(E(f - \Psi_n, \lambda_n \alpha))}{\omega(\lambda)}$$

Рассмотрим случаи:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$. Тогда в силу свойств функции $\omega(\lambda)$ имеем

$$0 < \alpha \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E(f - \Psi_n, \lambda_n \alpha))}{\omega(\lambda_n)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega(\lambda_n)} = 0,$$

что невозможно.

2. $0 < \alpha < \lambda_n < b < +\infty$. Тогда, в силу свойств функции ω и (3.6), имеем

$$0 < \alpha \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E(f - \Psi_n, \lambda_n \alpha))}{\omega(\lambda_n)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E(f - \Psi_n, \alpha))}{\omega(b)} = 0,$$

а это невозможно.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$. Тогда применяя лемму 1 и условие (в) определения функции ω , получим

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < \frac{\mu(E(f - \Psi_n, \lambda_n \alpha))}{\omega(\lambda_n)} &\leq \frac{\mu(E(f, \frac{\lambda_n \alpha}{2}))}{\omega(\lambda_n)} + \frac{\mu(E(\Psi_n, \frac{\lambda_n \alpha}{2}))}{\omega(\lambda_n)} \leq \\ &\leq \frac{\mu(E(f, \frac{\lambda_n \alpha}{2}))}{\omega(\lambda_n)} + \frac{\mu(\{x \in P_n; |f(x)| > \frac{\lambda_n \alpha}{2}\})}{\omega(\lambda_n)} + \\ &+ \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{x \in]a_{nk}, b_{nk}[; |\Psi_n(x)| > \frac{\lambda_n \alpha}{2}\})}{\omega(\lambda_n)} \leq 2 \frac{\mu(E(f, \frac{\lambda_n \alpha}{2}))}{\omega(\frac{\lambda_n \alpha}{2})} \times \\ &\times \frac{\omega(\frac{\lambda_n \alpha}{2})}{\omega(\lambda_n)} + \frac{\omega(\frac{\lambda_n \alpha}{2}) \cdot \varepsilon(\frac{\lambda_n \alpha}{2})}{\omega(\lambda_n)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq C_{\frac{\alpha}{2}} \left[2 \frac{\mu(E(f, \frac{\lambda_n \alpha}{2}))}{\omega(\frac{\lambda_n \alpha}{2})} + \right. \\ &\left. + \varepsilon\left(\frac{\lambda_n \alpha}{2}\right) \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow +\infty$ и получим противоречие.

Следовательно, существует подпоследовательность Ψ_{n_k} такая, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f - \Psi_{n_k}\|_{\omega} = 0.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция Ψ такая, что $\Psi \in D_{\omega}$ и

$$\|f - \Psi\|_{\omega} < \varepsilon. \quad (3.9)$$

С другой стороны, в силу условия теоремы, для $1/n$ существует $\tau_n \in P$ так, что

$$|\Psi(x) - \tau_n(x)| < \frac{1}{n}, \quad x \in [0, 1].$$

Предположим теперь, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Psi - \tau_n\|_\omega > \alpha > 0$, тогда существует подпоследовательность τ_{n_k} , которую мы перенумеруем τ_n , такая, что

$$0 < \alpha < \sup_{\lambda > 0} \frac{\mu(E(\Psi - \tau_n; \lambda \|\Psi - \tau_n\|_\omega))}{\omega(\lambda)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\omega\left(\frac{1}{n \|\Psi - \tau_n\|_\omega}\right)}, & \text{если } \lambda \|\Psi - \tau_n\|_\omega < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

или

$$\alpha \leq \frac{1}{\omega\left(\frac{1}{n\alpha}\right)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

что невозможно. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Psi - \tau_n\|_\omega = 0. \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) получим

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \tau_n\|_\omega \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} [\|f - \Psi\|_\omega + \|\Psi - \tau_n\|_\omega] \leq \varepsilon + \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Psi - \tau_n\|_\omega = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \tau_n\|_\omega = 0$$

и теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает

Следствие 2. Пусть P является одним из классов:

(а) множество всех алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами,

(б) множество всех тригонометрических полиномов с рациональными коэффициентами,

(в) множество всех полиномов с рациональными коэффициентами по системе Хаара,

(г) множество всех полиномов с рациональными коэффициентами по системе Фабера—Шаудера.

Тогда класс P обладает свойством W относительно L_ω .

§ 4. Об изображении измеримой конечной почти всюду функции тригонометрическим рядом

Настоящий параграф в основном посвящен вопросам сходимости тригонометрических рядов в смысле метрики пространства D_ω .

В 1915 г. Н. Н. Лузиным (см. [4], стр. 190) была сформулирована следующая проблема. Пусть f — произвольная измеримая функция, определенная на $[0, 2\pi]$. Существует ли тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (4.1)$$

который сходится или суммируется тем или иным методом к функции f почти всюду на $[0, 2\pi]$?

Н. Н. Лузин доказал [4], что если $f(x)$ почти всюду конечная измеримая функция, то существует тригонометрический ряд (3.1), который почти всюду суммируется к $f(x)$ как методом Абеля—Пуассона, так и методом Римана. В 1947 г. Д. Е. Меньшов [5] получил следующий основополагающий результат: для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[0, 2\pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, можно определить тригонометрический ряд (4.1), который сходится по мере на $[0, 2\pi]$ к функции $f(x)$. Следующий принципиальный шаг был сделан А. А. Талаляном [6], который доказал, что эта теорема Д. Е. Меньшова сохраняет силу для любых ортонормированных полных систем и даже для любых базисов в пространстве $L_p [0, 1]$ с $p > 1$. К указанному кругу вопросов относится ряд других работ А. А. Талаляна и его учеников (см. обзорную статью А. А. Талаляна [7]). Ряд важных результатов о суммируемости ряда (4.1) тем или иным методом получены в работах [4]—[10], [11]—[16] и др.

Перейдем теперь к изложению вопроса сходимости в метрике пространства D_ω тригонометрических рядов. Пусть $\Omega = [-\pi, \pi]$ и F — борелевская система множеств, μ — нормированная мера Лебега. Как известно, для измеримой почти всюду конечной функции $f(x)$, то есть $f \in S(\Omega, F)$, существует (см. [5], [12]) непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и результат почленного дифференцирования ряда Фурье функции $F(x)$ есть тригонометрический ряд, сходящийся почти всюду к $f(x)$. То есть, если $S_n(F, x)$ — частные суммы ряда Фурье от $F(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(F, x) = f(x) \quad (4.2)$$

для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$. Рассмотрим теперь выражение

$$M_n(\lambda) = \mu(E(S_n(F, \cdot), \lambda)) \quad (4.3)$$

и

$$M(\lambda) = \sup_{n \geq 1} M_n(\lambda). \quad (4.4)$$

Очевидно, что $0 \leq M(\lambda) \leq 1$ для $\lambda \geq 0$. Предположим, что

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} M(\lambda) = \alpha > 0. \quad (4.5)$$

Таким образом, существует последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\lambda_k \uparrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, такая, что $\lim_{k \rightarrow +\infty} M(\lambda_k) = \alpha > 0$. Тогда для каждого $\varepsilon \in \left] 0, \frac{\alpha}{8} \right[$ существует номер N такой, что при $k > N$ будем иметь $M(\lambda_k) > \alpha - \varepsilon$. В силу (4.4) для каждого натурального k , $k > N$, существует натуральное число n_k такое, что

$$M_{n_k}(\lambda_k) > \alpha - \varepsilon. \quad (4.6)$$

Возможны два случая:

1. Последовательность $\{n_k\}$, $k=\overline{1, +\infty}$, ограничена, то есть $n_k < C$, $k=\overline{1, \infty}$. Положим $S = \max_{\substack{h=\overline{1, \infty} \\ x \in [-\pi, \pi]}} S_{n_k}(F, x)$. Отсюда и из (4.6)

имеем

$$\alpha - \varepsilon < M_{n_k}(\lambda_k) \leq \mu(\{x; S > \lambda_k\}) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty,$$

что в силу произвольности ε дает противоречие с (4.5).

2. $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$, тогда для $k > N$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha - \varepsilon < M_{n_k}(\lambda_k) &\leq \mu\left(\left\{x; |S'_{n_k}(F, x) - f(x)| > \frac{\lambda_k}{2}\right\}\right) + \\ &+ \mu\left(\left\{x; |f(x)| > \frac{\lambda_k}{2}\right\}\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Так как $f(x)$ почти всюду конечная функция, то существует число K такое, что при $k > K$

$$\mu\left(\left\{x; |f(x)| > \frac{\lambda_k}{2}\right\}\right) < \varepsilon.$$

Отсюда и из (4.7) получаем

$$\mu\left(\left\{x; |S'_{n_k}(F, x) - f(x)| > \frac{\lambda_k}{2}\right\}\right) > \alpha - 2\varepsilon. \quad (4.8)$$

Пользуясь теперь (4.2) и произвольностью $\varepsilon \in \left[0, \frac{\alpha}{8}\right]$ в (4.8) получаем противоречие с (4.5), то есть

$$0 < \alpha - 2\varepsilon < \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{x; |S'_{n_k}(F, x) - f(x)| > \frac{\lambda_k}{2}\right\}\right) = 0.$$

Таким образом, наше допущение (4.5) не верно, то есть

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M(\lambda) = 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M_1(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \mu(\{x; |S'_n(F, x) - f(x)| > \lambda\}) = 0.$$

В силу теоремы 1 существует функция $\omega \in I$ такая, что

$$\omega(\lambda) \geq \max\{M(\lambda), M_1(\lambda)\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$J_\omega(S'_n(F, \cdot), 1) \leq 1, \quad J_n(S'_n(-F, \cdot) - f, 1) \leq 1, \quad (4.9)$$

где $n = 1, 2, \dots$. Из (4.9) и предложения 1 имеем

$$\|S'_n(F, \cdot)\|_\omega \leq 1, \quad \|S'_n(F, \cdot) - f\|_\omega \leq 1, \quad \|f\|_\omega \leq 2. \quad (4.10)$$

Далее рассмотрим предельное равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\sqrt{\omega(\lambda)}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\omega(\lambda)} \sqrt{\omega(\lambda)} \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\mu\left(E\left(f, \frac{\lambda}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\omega(\lambda)} \omega\left(\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

В силу предложения 1, (4.10) и свойств функции ω имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E(f, \lambda))}{\sqrt{\omega(\lambda)}} = 0,$$

то есть $f \in D_{V\omega}$. Аналогично получаем, что $S_n^*(F, x) \in D_{V\omega}$. Предположим теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n^*(F, \cdot) - f\|_{V\omega} > \beta, \quad k=1, \overline{+\infty}, \quad (4.11)$$

то есть существует подпоследовательность $n_k, k = \overline{1, \infty}$ такая, что

$$\|S_{n_k}^*(F, \cdot) - f\|_{V\omega} > \beta, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Тогда в силу определения $\|\cdot\|_{V\omega}$ имеем для каждого k , что существует $\lambda_k > 0$ так, что

$$0 < \beta < \frac{\mu(E(S_{n_k}^*(F, \cdot) - f, \lambda_k))}{\sqrt{\omega\left(\frac{\lambda_k}{\beta}\right)}}.$$

Возможны три случая:

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = 0$. Тогда в силу определения ω имеем

$$0 < \beta < \frac{\mu(E(S_{n_k}^*(F, \cdot) - f, \lambda_k))}{\sqrt{\omega\left(\frac{\lambda_k}{\beta}\right)}} < \frac{1}{\sqrt{\omega\left(\frac{\lambda_k}{\beta}\right)}} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow +\infty$, что невозможно.

2. $0 < a \leq \lambda_k \leq b < +\infty, k = \overline{1, \infty}$. Тогда

$$0 < \beta < \frac{\mu(E(S_{n_k}^*(F, \cdot) - f, a))}{\sqrt{\omega\left(\frac{b}{\beta}\right)}}.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$ и пользуясь предельным равенством (3.2), получаем противоречие.

3. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty$. Тогда имеем

$$0 < \beta < \frac{\mu(E(S_{n_k}(f, \cdot) - f, \lambda_k))}{V^{\omega(\lambda_k)}} \sqrt{\frac{\omega(\lambda_k)}{\omega\left(\frac{\lambda_k}{\beta}\right)}} \leq \\ \leq C_1 \frac{\mu(E(S_{n_k}(f, \cdot) - f, \lambda_k))}{\omega(\lambda_k)} V^{\omega(\lambda_k)}, k = 1, \infty. \quad (4.12)$$

Далее из предложения 1, (4.10), (4.12) и свойств функции ω имеем

$$0 < \beta \leq C_1 \lim_{k \rightarrow +\infty} \omega(\lambda_k) = 0,$$

что невозможно. Следовательно, наше предположение (4.11) не верно, то есть

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S'_n(F, \cdot) - f\|_{V^{\omega}} = 0.$$

Таким образом, установлена следующая

Теорема 5. Для любой измеримой и конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$ функции f существуют тригонометрический ряд (4.1) и функция $\omega \in I$ такие, что $f \in D_{\omega}$ и указанный ряд будет сходиться к функции f в метрике пространства D_{ω} .

Предложение 5. Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность измеримых функций сходится μ -почти всюду к функции $f(x)$. Если существует измеримая неотрицательная функция g такая, что $g \in D_{\omega}(\Omega, F, \omega)$ и $|f_n(x)| < g(x)$ μ -п.в. на Ω , $n=1, \infty$, то $f_n, f \in D_{\omega}$ и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\omega} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\omega} = \|f\|_{\omega}.$$

Доказательство. Так как последовательность $\{f_n\}$ μ -п.в. сходится к функции f , то из следующего неравенства (см. [17], стр. 44)

$$\mu(E(f, \lambda)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E(f_n, \lambda)) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \mu(E(f_n, \lambda)) < \mu(E(g, \lambda))$$

следует, что f_n и f принадлежат D_{ω} .

Допустим теперь, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\omega} > \delta > 0$, тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ такая, что

$$\|f_{n_k} - f\|_{\omega} > \delta, k=1, +\infty. \quad (4.13)$$

Далее в силу определения $\|\cdot\|_{\omega}$ и предложения 1 для каждого k существует $\lambda_k > 0$ такое, что

$$\delta < \frac{\mu(E(f_{n_k} - f, \lambda_k \delta))}{\omega(\lambda_k)}.$$

Возможны три случая:

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$, тогда

$$0 < \delta < \frac{\mu(E(f_{n_k} - f, \lambda_k \delta))}{\omega(\lambda_k)} \leq \frac{1}{\omega(\lambda_k)} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow +\infty$, что невозможно.

2. $0 < a < \lambda_k < b < +\infty$, тогда

$$0 < \delta < \frac{\mu(E(f_{n_k} - f, a\delta))}{\omega(b)},$$

а так как f_{n_k} μ -п.в. на Ω сходится к f , то имеем

$$0 < \delta \omega(b) < \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(E(f_{n_k} - f, a\delta)) = 0,$$

что невозможно.

3. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty$, тогда имеем

$$0 < \delta < \frac{\mu(E(f_{n_k} - f, \lambda_k \delta))}{\omega(\lambda_k)} \leq \frac{2\mu\left(E\left(g, \frac{\lambda_k \delta}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda_k \delta}{2}\right)} \frac{\omega\left(\frac{\lambda_k \delta}{2}\right)}{\omega(\lambda_k)}.$$

Так как $g \in D_\omega$, то в силу свойств функции ω получаем

$$0 < \delta < 2 C_\delta \lim_{\frac{\lambda_k \delta}{2} \rightarrow +\infty} \frac{\mu\left(E\left(g, \frac{\lambda_k \delta}{2}\right)\right)}{\omega\left(\frac{\lambda_k \delta}{2}\right)} = 0,$$

что опять невозможно. Следовательно, наше допущение не верно, а потому $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\omega = 0$, и отсюда непосредственно следует $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\omega = \|f\|_\omega$ и предложение доказано.

Институт вычислительной математики
АН Грузинской ССР

Поступила 25. I. 1984

ბ. ა. ჯვარშეიშვილი. ფაქტის ირական ჰონიკგზანსის ში თარածიქვანს მათის (ამჟამად)

ესი სტატიის გაქმნის ზამარქა ამხნორსი ქვერავდო ჰონიკგზანსის რადიოქიონი რადიონი და გაქმნის ირქი, სხვარარსი D_ω თარածიქვანსის, ω თარածიქვანსის გაქმნის რადიონის მხე ავანგონიქვანს და ქვერავდო სთასქიონსაქვანს ჯარქოქ ჰონიკგზანსის სხვარავანს ქვერავდოქ სხვარავანს.

I. A. JVARSHESHVILI. On a space of real measured function (summary)

The set of almost everywhere finite Lebesgue measurable functions is divided into metrical, complete, separable spaces. The theorem of Weirstrass and representation of function by trigonometric series are proved in the metrics of those spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Джваршейшвили. Об одном свойстве монотонных функций. Труды ГПИ, № 3 (285), 1985, 19—26.
2. И. А. Джваршейшвили. Об аналитических функциях в единичном круге. Сообщения АН ГССР, 111, № 1, 1983, 25—27.
3. П. А. Ульянов. Представление функций рядами и классы $\mathcal{M}(L)$, УМН, 27:2, 1972, 1—52.

4. Н. Н. Лузин. Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1951.
5. Д. Е. Меньшов. О сходимости по мере тригонометрических рядов. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 32, 1950, 1—98.
6. А. А. Талалян. Представление измеримых функций рядами, УМН, 15:5, 1960, 77—141.
7. А. А. Талалян. Вопросы представления и сходимости в теории ортогональных рядов, Сборник «Математический анализ», 1971, 5—64.
8. П. А. Ульянов. Безусловная суммируемость к ∞ , Научн. докл. высш. шк., 1, 1959, 71—80.
9. П. А. Ульянов. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19:1, 1964, 3—69.
10. Н. А. Виноградова, В. А. Скворцов. Обобщенные интегралы и ряды Фурье, Сборник «Математический анализ», 1971, 65—100.
11. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, М., т. 1, 2, 1965.
12. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды, М., 1961.
13. А. В. Жижиншвили. Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тбилиси, 1969.
14. L. Carleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., 116, 1—2, 1966, 135—157.
15. R. Hunt. On the convergence of Fourier series, Proc. Conf. Orthog. Exp. and their Cont. Arol, Carbondale Press.
16. C. Goffman, D. Waterman. Some aspects of Fourier series, Math. Mon., 77, № 2, 1970, 63—72.
17. П. Халмош. Теория меры, М., 1953.