

УДК 517.984.54

Т. Н. АРУТЮНЯН

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
ДИРАКА С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

§ 1. Введение и формулировка результатов

Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений Дирака на полуоси $0 < r < \infty$

$$ly = \left\{ \alpha_1 \frac{1}{i} \frac{d}{dr} + \alpha_2 p(r) + \alpha_3 q(r) \right\} y = \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а p и q — действительные, локально интегрируемые функции на полуоси. Известно [1], что при этих условиях операторы, порожденные в пространстве вектор-функций $L_2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$ краевыми задачами

$$ly = \lambda y, \quad y_1(0) \cos \alpha + y_2(0) \sin \alpha = 0, \quad (1.2)$$

существенно самосопряжены при любом действительном α . Предположим также, что p и q удовлетворяют условиям, обеспечивающим дискретность спектров задач* (1.2). Пусть $\{\lambda_n(\alpha)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ есть спектры соответственно задачи (1.2) и задачи

$$ly = \lambda y, \quad y_2(0) = 0, \quad (1.3)$$

т. е. мы выделили, как отдельный, случай $\alpha = \frac{\pi}{2}$. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Через $\varphi(r, \lambda)$ и $\theta(r, \lambda)$ обозначим решения системы (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -\cos \alpha; \quad (1.4)$$

$$\theta_1(0, \lambda) = 1, \quad \theta_2(0, \lambda) = 0. \quad (1.4')$$

Очевидно, что $\varphi(r, \lambda_n(\alpha))$ и $\theta(r, \mu_n)$ есть собственные функции задач (1.2) и (1.3) соответственно. Заметим, что компоненты φ и θ можно считать действительными. Квадраты норм этих собственных функций

$$a_n(\alpha) = \|\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha))\|^2 = \int_0^\infty \{\varphi_1^2(r, \lambda_n(\alpha)) + \varphi_2^2(r, \lambda_n(\alpha))\} dr,$$

* Достаточные условия дискретности спектров задач (1.2) приведены в [1], гл. 4. Заметим, что эти условия не зависят от числа α , входящего в краевое условие.

$$b_n = \| \theta(\cdot, \mu_n) \|^2,$$

обычно называют нормировочными постоянными. Монотонно возрастающие функции

$$\rho_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \sum_{\lambda_n(\alpha) < \lambda} a_n^{-1}(\alpha), & \lambda > 0 \\ -\sum_{\lambda < \lambda_n(\alpha) < \eta} a_n^{-1}(\alpha), & \lambda < 0, \end{cases} \quad \sigma(\lambda) = \begin{cases} \sum_{0 < \mu_n < \lambda} b_n^{-1}, & \lambda > 0 \\ -\sum_{\lambda < \mu_n < 0} b_n^{-1}, & \lambda < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

называются спектральными функциями задач (1.2) и (1.3) соответственно. В работе [2] доказано, что по спектральной функции $\rho_0(\lambda)$ (т. е. при $\alpha = 0$) можно однозначно и конструктивно восстановить «потенциал»

$$Q(r) = \begin{pmatrix} p(r) & q(r) \\ q(r) & -p(r) \end{pmatrix} = \alpha_2 p(r) + \alpha_3 q(r)$$

канонической системы Дирака. Из [2] следует также, что $Q(r)$ можно восстановить и по спектральной функции $\rho_\alpha(\lambda)$, если α заранее известно.

В дальнейшем всегда будем предполагать, что p и q монотонно возрастающие функции, точнее

$$0 < p(0) \leq p(r) \leq p(r_1), \quad 0 \leq q(0) \leq q(r) \leq q(r_1) \quad \text{при } r < r_1. \quad (1.6)$$

Собственные значения пронумерованы в порядке возрастания, т. е. $\lambda_n(\alpha) \geq \lambda_k(\alpha)$ при $n > k$, причем $\lambda_n(\alpha) > 0$ при $n > 0$ и $\lambda_n(\alpha) < 0$ при $n < 0$.

При этих условиях основными результатами нашей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. Нормировочные постоянные $a_n(\alpha)$ определяются при помощи двух спектров $\{\lambda_n(\alpha)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\lambda_n(\beta)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ($0 < \beta - \alpha < \pi$) по формулам:

$$a_n(\alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)} \cdot \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{i_0(\beta) - \lambda_n(\alpha)} \cdot c \cdot \prod_{k=0, k \neq n}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot p_k, \quad n \neq 0, \quad (1.7)$$

где

$$p_k = \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)} \quad \text{при } k \neq n \text{ и } p_n = 1;$$

$$a_0(\alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{i_0(\alpha) - i_0(\beta)} \cdot c \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_0(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - i_0(\alpha)}, \quad (1.8)$$

где положительная постоянная c определяется из соотношения

$$c \cdot \lim_{\mu \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{\mu} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{|\lambda_k(\alpha) - i\mu|}{|\lambda_k(\beta) - i\mu|} = 1, \quad (1.9)$$

т. е. $\rho_\alpha(\lambda)$, а следовательно и потенциал $Q(r)$, определяются однозначно по двум спектрам.

Замечание. Как будет видно из доказательств, условия (1.6) на p и q , ограничивающие класс восстанавливаемых потенциалов, использу-

ются в технике определения постоянной c по формуле (1.9), но не при выводе формул (1.7) и (1.8). Нижеприведенные условия (1.10) и (1.11) позволяют в формуле (1.9) перейти к пределу под знаком бесконечного произведения и в результате упростить выражения для $a_n(\alpha)$.

Теорема 1'. При условиях: $Q(r)$ непрерывна в нуле и удовлетворяет в нуле условию Дини

$$\int_0^{\delta} \frac{|Q(s) - Q(0)|}{s} ds < \infty, \quad \delta > 0, \quad (1.10)$$

$$\lambda_{-n}(\alpha) = -\lambda_n(\alpha) [1 + o(1)] \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1.11)$$

нормировочные постоянные определяются по формуле ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$a_n(\alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)} \cdot \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)}. \quad (1.12)$$

Аналогичный результат для задачи Штурма—Лиувилля на полуоси получен в [3], где подробно освещена история вопроса о восстановлении по двум спектрам и приведена библиография. Для канонической системы Дирака на $[0, \pi]$ обратная задача по двум спектрам решена в [4].

Теорема 2. При $q(r) \equiv 0$ и при выполнении условия (1.10) нормировочные постоянные определяются по формуле $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{4}\right)$

$$a_n(\alpha) = \frac{|\cos 2\alpha|}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-n}(\alpha)} \cdot \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-k}(\alpha)}, \quad (1.13)$$

т. е. $\rho_n(\lambda)$, а следовательно и $Q(r)$, восстанавливаются однозначно по одному спектру.

Введем обозначение $J_\alpha(\lambda)$ для интеграла Стильтьеса

$$J_\alpha(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_\alpha(\mu)}{\mu - \lambda}.$$

Теорема 3. При условиях (1.10) и (1.11), а также $\lambda_0(\alpha) \neq 0$, имеет место равенство $\left(\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$J_\beta(\lambda) = \frac{J_\alpha(\lambda) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{J_\alpha(\lambda) \sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta)}. \quad (1.14)$$

Из теоремы 3, в частности, следует, что зная спектральную функцию $\rho_\alpha(\lambda)$ при каком-либо α , $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, мы можем, обратив интеграл Стильтьеса, однозначно определить спектральную функцию $\rho_\beta(\lambda)$ при любом $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, так как асимптотика $\rho_\beta(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \pm \infty$ известна для любого действительного β (см. [5]). В частности, можно

однозначно восстановить $\rho_0(r)$, по которой, согласно методу Б. М. Левитана и М. Г. Гасимова [2], однозначно восстанавливается $Q(r)$.

Отметим также

Следствие 1. Спектральная функция $\rho_a(\lambda)$, а следовательно и потенциал $Q(r)$, однозначно восстанавливаются по спектру $\{u_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ и значениям $\{|u_n(0)|^2\}_{n=1}^{\infty}$ нормированных собственных функций $u_n(r)$ задачи (1.2) в нуле при любом действительном α .

Это следствие, которое является простой перефразировкой теоремы о восстановлении $Q(r)$ по $\rho_a(\lambda)$ и доказательство которого заключается в установлении очевидного равенства $|u_n(0)|^2 = \frac{1}{a_n(\alpha)}$, представляет интерес,

возможно потому, что значения «волновых функций» (т. е. нормированных собственных функций) в нуле, как и спектр, есть «наблюдаемые» физические величины (см., например, [6], [7], [8]).

§ 2. Представления для функции $R_a(\lambda)$

Обозначим через

$$u(r, \lambda) = c_1(\alpha) \varphi(r, \lambda) + c_2(\lambda) \theta(r, \lambda) \quad (2.1)$$

решение системы (1.1), принадлежащее $L_2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$ при $\text{Im } \lambda \neq 0$. Известно ([1], стр. 232), что такое решение существует, причем оно единственно с точностью до умножения на постоянную $s(\lambda)$.

Рассмотрим функцию

$$R_a(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda) \cos \alpha + u_2(0, \lambda) \sin \alpha}{u_2(0, \lambda)} = \frac{u_1(0, \lambda)}{u_2(0, \lambda)} \cos \alpha + \sin \alpha. \quad (2.2)$$

Так как $u_1(0, \lambda) = c_1(\lambda) \sin \alpha + c_2(\lambda)$, $u_2(0, \lambda) = -c_1(\lambda) \cos \alpha$, то определение $R_a(\lambda)$ можно записать также в виде

$$R_a(\lambda) = -\frac{c_2(\lambda)}{c_1(\lambda)}. \quad (1.2')$$

Поскольку $u(r, \lambda)$ единственно с точностью до умножения на постоянную $s(\lambda)$, то функция $R_a(\lambda)$ решением $u(\cdot, \lambda)$ определяется единственным образом. Так как задачи (1.2) и (1.3) самосопряженные и имеют чисто дискретные спектры, то легко видеть, что $R_a(\lambda)$ — мероморфная функция, причем нули ее образуют спектр $\{\lambda_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1.2), а полюсы — спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1.3). В этом параграфе мы докажем равенство

$$\text{Im } R_a(\lambda) = \text{Im } \lambda \cdot \frac{\int_0^\infty |u(r, \lambda)|^2 dr}{|u_2(0, \lambda)|^2} \cdot \cos \alpha, \quad (2.3)$$

откуда будет следовать, что $R_a(\lambda)$ есть «вещественная» мероморфная функция (т. е. $\text{Im } R_a(\lambda) = 0$ при $\text{Im } \lambda = 0$), переводящая верхнюю полу-

плоскость в верхнюю и, следовательно, для нее имеет место известное представление в виде бесконечного произведения*

$$R_{\alpha}(\lambda) = c \cdot \frac{\lambda - \lambda_0(a)}{\lambda - \mu_0} \cdot \prod'_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k(a)}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right)^{-1}, \quad (2.4)$$

где $c > 0$, а штрих при бесконечном произведении означает, что пропускается множитель с номером $k = 0$. Кроме того, нули и полюсы $R_{\alpha}(\lambda)$ все простые и перемежаются, причем

$$\mu_k < \lambda_k(a) < \mu_{k+1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \lambda_{-1}(a) < 0 < \mu_1,$$

т. е., в частности, нули лежат правее полюсов ([9], стр. 398, теорема М. Г. Крейна).

Из простоты нулей и полюсов и (2.2'), в частности, следует: $c_1(\mu_k) = 0$, $c'_1(\mu_k) \neq 0$, $c_2(\lambda_k(a)) = 0$, $c'_2(\lambda_k(a)) \neq 0$;

$$u(r, \lambda_k(a)) = c_1(\lambda_k(a)) \cdot \varphi(r, \lambda_k(a)), \quad (2.5)$$

$$u(r, \mu_k) = c_2(\mu_k) \cdot \theta(r, \mu_k). \quad (2.6)$$

Итак, докажем равенство (2.3). Для этого запишем тождество $lu = \lambda u$ в виде

$$u'_2 + p(r) u_1 + q(r) u_2 = \lambda u_1,$$

$$-u'_1 + q(r) u_1 - p(r) u_2 = \lambda u_2.$$

Умножим первое равенство на $\bar{u}_1$, а второе — на $\bar{u}_2$

$$u'_2 \bar{u}_1 + p(r) |u_1|^2 + q(r) u_2 \bar{u}_1 = \lambda \cdot |u_1|^2. \quad (2.7)$$

$$-u'_1 \bar{u}_2 + q(r) u_1 \bar{u}_2 - p(r) |u_2|^2 = \lambda \cdot |u_2|^2, \quad (2.8)$$

и добавим к ним комплексно-сопряженные равенства

$$\bar{u}'_2 u_1 + p(r) |u_1|^2 + q(r) \bar{u}_2 u_1 = \bar{\lambda} \cdot |u_1|^2, \quad (2.9)$$

$$-\bar{u}'_1 u_2 + q(r) \bar{u}_1 u_2 - p(r) |u_2|^2 = \bar{\lambda} |u_2|^2. \quad (2.10)$$

Сложив первые два и отняв последние два равенства, получим

$$\frac{d}{dr} (u_2 \bar{u}_1 - u_1 \bar{u}_2) = 2i \operatorname{Im} \lambda \cdot (|u_1|^2 + |u_2|^2) = 2i \operatorname{Im} \lambda \cdot |u|^2. \quad (2.11)$$

Так как u_1 и $u_2 \in L_2(0, \infty)$, то существуют последовательности $\{r_n\}_1^{\infty}$ и $\{r'_n\}_1^{\infty}$, стремящиеся к ∞ , такие, что $u_1(r_n, \lambda) \rightarrow 0$ и $u_2(r'_n, \lambda) \rightarrow 0$ при

* Отметим, что здесь, и всюду в дальнейшем, бесконечные произведения вида $\prod_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ и ряды $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ надо понимать в смысле главного значения, т. е.

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=-n}^n a_k, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n a_k.$$

$n \rightarrow \infty$. Поэтому, интегрируя равенство (2.11) от 0 до r_n (или до r'_n) и устремляя $n \rightarrow \infty$, получаем

$$u_1(0, \lambda) \bar{u}_2(0, \lambda) - u_2(0, \lambda) \cdot \bar{u}_1(0, \lambda) = 2i \operatorname{Im} \lambda \int_0^\infty |u(r, \lambda)|^2 dr. \quad (2.12)$$

С другой стороны, из определения (2.2)

$$2i \operatorname{Im} R_\alpha(\lambda) = R_\alpha(\lambda) - \overline{R_\alpha(\lambda)} = \frac{u_1(0, \lambda) \bar{u}_2(0, \lambda) - u_2(0, \lambda) \bar{u}_1(0, \lambda)}{|u_2(0, \lambda)|^2} \cos \alpha. \quad (2.13)$$

Из равенств (2.12) и (2.13) следует (2.3).

Для действительной части функции $R_\alpha(\lambda)$ из (2.2) имеем

$$2 \operatorname{Re} R_\alpha(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda) \bar{u}_2(0, \lambda) + u_2(0, \lambda) \cdot \overline{u_1(0, \lambda)}}{|u_2(0, \lambda)|^2} \cos \alpha + 2 \sin \alpha. \quad (2.14)$$

С другой стороны, сложив (2.7) и (2.9) и отняв (2.8) и (2.10), получим

$$\frac{d}{dr} [u_1 \bar{u}_2 + u_2 \bar{u}_1] = 2 \operatorname{Re} \lambda \cdot (|u_1|^2 - |u_2|^2) - 2p(r) |u|^2.$$

Проинтегрировав последнее равенство от 0 до ∞ , из (2.14) получим представление для $\operatorname{Re} R_\alpha(\lambda)$

$$\operatorname{Re} R_\alpha(\lambda) = \frac{1}{|u_2(0, \lambda)|^2} \left(\int_0^\infty p(r) |u|^2 dr - \operatorname{Re} \lambda \cdot \int_0^\infty (|u_1|^2 - |u_2|^2) dr \right) \cos \alpha + \sin \alpha.$$

В частности, при $\lambda = i\mu$, имеем представления

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} R_\alpha(i\mu) &= \frac{\cos \alpha}{|u_2(0, i\mu)|^2} \int_0^\infty p(r) \cdot |u(r, i\mu)|^2 dr + \sin \alpha, \\ R_\alpha(i\mu) &= \frac{\cos \alpha}{|u_2(0, \lambda)|^2} \int_0^\infty [p(r) + i\mu] \cdot |u(r, i\mu)|^2 dr + \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для вещественной мероморфной функции, переводящей верхнюю полуплоскость в верхнюю, имеет место также следующее представление ([9], стр. 400, теорема Н. Г. Чеботарёва):

$$R_\alpha(i) = a\lambda + b + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{\mu_k - \lambda} - \frac{1}{\mu_k} \right), \quad (2.16)$$

где $a > 0$, $\operatorname{Im} b = 0$, $A_k > 0$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k^2} < \infty$.

Поскольку $-(R_\alpha(\lambda))^{-1}$ также переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю, то

$$-\frac{1}{R_a(\lambda)} = a'\lambda + b' + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_k \left(\frac{1}{\lambda_k(a) - \lambda} - \frac{1}{\lambda_k(a)} \right), \quad (2.17)$$

где

$$a' \geq 0, \operatorname{Im} b' = 0, A'_k \geq 0, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A'_k}{\lambda_k^2(a)} < \infty.$$

Чтобы вычислить постоянные A_k и A'_k , заметим, что это взятые с обратным знаком вычеты функций $R_a(\lambda)$ и $-(R_a(\lambda))^{-1}$, т. е., в частности,

$$A'_k = -\operatorname{Res} \left(-\frac{1}{R_a(\lambda)} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_k(a)} = \left(\frac{d}{d\lambda} R_a(\lambda) \right)^{-1} \Big|_{\lambda=\lambda_k(a)}.$$

Исходя из определения (2.2) и действуя как и при выводе равенства (2.12), получим

$$\frac{d}{d\lambda} R_a(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_k(a)} = \frac{\cos \alpha}{u_1^2(0, \lambda_k(a))} \cdot \int_0^\infty [u_1^2(r, \lambda_k(a)) + u_2^2(r, \lambda_k(a))] dr.$$

Учитывая (2.5) и начальные условия (1.4), имеем

$$\frac{d}{d\lambda} R_a(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_k(a)} = \frac{a_k(x)}{\cos \alpha}. \quad (2.18)$$

Действуя аналогичным образом в случае с A_k , получаем формулы

$$A'_k = \frac{\cos \alpha}{a_k(a)}, \quad A_k = \frac{\cos \alpha}{b_k}. \quad (2.19)$$

§ 3. Две леммы

Этот параграф посвящен доказательству двух лемм, вторая из которых играет весьма существенную роль в нашей работе.

Лемма 3.1. *Решение $u(r, \lambda)$ системы (1.1), принадлежащее $L_2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$ при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, удовлетворяет двусторонней оценке (при $\lambda = i\mu$)*

$$\begin{aligned} \exp \{-2[p(r) + q(r) + \mu]r\} &\leq \frac{|u(r, i\mu)|^2}{|u(0, i\mu)|^2} \leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{\int_0^r [p^2(s) + q^2(s) + \mu^2] ds}{p(b) + q(b) + \mu} \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{где } b > r + \frac{1}{2p(0)}.$$

Лемма 3.2. *Имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \operatorname{Re} R_a(i\mu) = \sin \alpha, \quad (3.1)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \operatorname{Im} R_{\mu}(i\mu) = \cos \alpha, \quad (3.2)$$

в частности

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} |R_{\mu}(i\mu)| = 1. \quad (3.3)$$

Для доказательства леммы 3.1 запишем систему (1.1) при $\lambda = i\mu$

$$u_2 + p(r) u_1 + q(r) u_2 = i\mu u_1, \quad (3.4)$$

$$-u_1 + q(r) u_1 - p(r) u_2 = i\mu u_2, \quad (3.5)$$

а также сопряженные равенства

$$\bar{u}_2 + p(r) \bar{u}_1 + q(r) \bar{u}_2 = -i\mu \bar{u}_1, \quad (3.6)$$

$$-\bar{u}_1 + q(r) \bar{u}_1 - p(r) \bar{u}_2 = -i\mu \bar{u}_2. \quad (3.7)$$

Умножая (3.4) на $\bar{u}_2$, (3.5) — на $-\bar{u}_1$, (3.6) — на u_2 , (3.7) — на $-u_1$ и складывая все четыре равенства, получим

$$-\frac{d}{dr}|u|^2 = 4p(r) \operatorname{Re}(u_1 \bar{u}_2) + 2q(r)(|u_2|^2 - |u_1|^2) + 4\mu \operatorname{Im}(u_1 \bar{u}_2), \quad (3.8)$$

откуда, учитывая неравенства

$$2 \operatorname{Re}(u_1 \bar{u}_2) \leq |u|^2, \quad 2 \operatorname{Im}(u_1 \bar{u}_2) \leq |u_1|^2, \quad |u_2|^2 - |u_1|^2 \leq |u|^2,$$

имеем

$$-\frac{\frac{d}{dr}|u|^2}{|u|^2} = -\frac{d}{dr} \ln |u|^2 \leq 2[p(r) + q(r) + \mu]. \quad (3.9)$$

Умножим (3.5) на $-\bar{u}_2$, (3.6) — на u_1 и сложим, получим

$$u_1 \cdot \bar{u}_2 + u_1 \cdot \bar{u}_2 = \frac{d}{dr}(u_1 \cdot \bar{u}_2) = -p(r)|u|^2 - i\mu |u|^2.$$

Интегрируя последнее равенство от r до ∞ , имеем

$$-u_1(r, i\mu) \cdot \bar{u}_2(r, i\mu) = -\int_r^{\infty} p(s) |u(s, i\mu)|^2 ds - i\mu \int_r^{\infty} |u(s, i\mu)|^2 ds,$$

т. е.

$$\operatorname{Re}(u_1(r, i\mu) \cdot \bar{u}_2(r, i\mu)) = \int_r^{\infty} p(s) |u(s, i\mu)|^2 ds, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{Im}(u_1(r, i\mu) \cdot \bar{u}_2(r, i\mu)) = \mu \int_r^{\infty} |u(s, i\mu)|^2 ds. \quad (3.11)$$

Аналогичным образом, умножая (3.4) на $\bar{u}_2$, (3.5) — на $-\bar{u}_1$, (3.6) — на u_2 , (3.7) — на u_1 и складывая, получим

$$\frac{d}{dr} (|u_2|^2 - |u_1|^2) = -2q(r) \cdot |u|^2.$$

Интегрируя от r до ∞ , имеем

$$|u_2(r, i\mu)|^2 - |u_1(r, i\mu)|^2 = 2 \int_r^\infty q(s) |u(s, i\mu)|^2 ds. \quad (3.12)$$

Из (3.8) и (3.10)—(3.12) следует равенство

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dr} |u(r, i\mu)|^2 &= 4p(r) \int_r^\infty p(s) |u(s, i\mu)|^2 ds + 4q(r) \int_r^\infty q(s) |u(s, i\mu)|^2 ds + \\ &+ 4\mu^2 \int_r^\infty |u(s, i\mu)|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Так как p и q — неотрицательные монотонно растущие функции, из (3.13) получаем неравенство

$$-\frac{d}{dr} |u(r, i\mu)|^2 \geq 4[p^2(r) + q^2(r) + \mu^2] \int_r^\infty |u(s, i\mu)|^2 ds. \quad (3.14)$$

Из (3.9) и (3.14) получаем двустороннюю оценку логарифмической производной от $|u|^2$

$$\begin{aligned} -2[p(r) + q(r) + \mu] &\leq \frac{d}{dr} \ln |u(r, i\mu)|^2 \leq -4[p^2(r) + q^2(r) + \mu^2] \times \\ &\times \frac{\int_r^\infty |u(s, i\mu)|^2 ds}{|u(r, i\mu)|^2}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$m(r, i\mu) = \frac{\int_r^\infty |u(s, i\mu)|^2 ds}{|u(r, i\mu)|^2},$$

перепишем последнее неравенство в виде

$$-2[p(r) + q(r) + \mu] \leq \frac{d}{dr} \ln |u|^2 \leq -4[p^2(r) + q^2(r) + \mu^2] \cdot m(r, i\mu). \quad (3.15)$$

Интегрируя (3.15) от r_1 до r_2 и потенцируя, имеем

$$\exp \left\{ -2 \int_{r_1}^{r_2} [p(s) + q(s) + \mu] ds \right\} \leq \frac{|u(r_2, i\mu)|^2}{|u(r_1, i\mu)|^2} \leq$$

$$\leq \exp \left\{ -4 \int_{r_1}^{r_2} [p^2(s) + q^2(s) + \mu^2] \cdot m(s, i\mu) ds \right\}. \quad (3.16)$$

Чтобы уточнить (т. е. выразить через p и q) оценку в правой части последнего неравенства, получим двустороннюю оценку для функции $m(r, i\mu)$. Во-первых, из (3.15) имеем оценку сверху

$$m(r, i\mu) \leq \frac{p(r) + q(r) + \mu}{2[p^2(r) + q^2(r) + \mu^2]}. \quad (3.17)$$

Чтобы получить оценку $m(r, i\mu)$ снизу, проинтегрируем левую часть неравенства (3.16) по r_2 от r_1 до ∞

$$\begin{aligned} \frac{\int_{r_1}^{\infty} |u(r_2, i\mu)|^2 dr_2}{|u(r_1, i\mu)|^2} &= m(r_1, i\mu) \geq \int_{r_1}^{\infty} e^{-2 \int_{r_1}^{r_2} [p(s) + q(s) + \mu] ds} dr_2 \geq \\ &\geq \int_{r_1}^{\infty} e^{-2[p(r_2) + q(r_2) + \mu](r_2 - r_1)} dr_2 > \int_{r_1}^b e^{-2[p(r_2) + q(r_2) + \mu](r_2 - r_1)} dr_1 > \\ &> \int_{r_1}^b e^{-2[p(b) + q(b) + \mu](r_2 - r_1)} dr_2 = \frac{1 - e^{-2[p(b) + q(b) + \mu](b - r_1)}}{2[p(b) + q(b) + \mu]}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где b — произвольное конечное число, большее r_1 . Таким образом, для $m(r, i\mu)$ имеем двустороннюю оценку

$$\frac{1 - e^{-2[p(b) + q(b) + \mu](b - r)}}{2[p(b) + q(b) + \mu]} \leq m(r, i\mu) \leq \frac{p(r) + q(r) + \mu}{2[p^2(r) + q^2(r) + \mu^2]}, \quad (3.19)$$

где $b > r$. Если в (3.18) взять $b > r_1 + \frac{1}{2p(0)}$, то поскольку $2[p(b) + q(b) + \mu](b - r_1) \geq 1$ и $e^{-2[p(b) + q(b) + \mu](b - r_1)} \leq e^{-1} < \frac{1}{2}$, получим

$$m(s, i\mu) \geq \frac{1}{4[p(b) + q(b) + \mu]} \quad \text{при } b \geq s + \frac{1}{2p(0)}.$$

Теперь уже правую часть (3.16) можно оценить так:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -4 \int_{r_1}^{r_2} [p^2(s) + q^2(s) + \mu^2] \cdot m(s, i\mu) ds \right\} &\leq \\ &\leq \exp \left\{ - \int_{r_1}^{r_2} \frac{p^2(s) + q^2(s) + \mu^2}{p(b) + q(b) + \mu} ds \right\}, \end{aligned}$$

где $b \geq r_2 + \frac{1}{2p(0)}$. Отсюда следуют неравенства

$$\exp \left\{ -2 [p(r_2) + q(r_2) + \mu](r_2 - r_1) \right\} \leq \frac{|u(r_2, i\mu)|^2}{|u(r_1, i\mu)|^2} \leq \\ \leq \exp \left\{ -\frac{1}{p(b) + q(b) + \mu} \cdot \int_{r_1}^b [p^2(s) + q^2(s) + \mu^2] ds \right\}$$

и, в частности, неравенство, фигурирующее в формулировке леммы 3.1. Лемма 3.1 доказана.

Перейдем к доказательству леммы 3.2. Согласно определению (2.2) и представлению (2.15) функции $R_a(i\mu)$ имеем

$$k(i\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_a(i\mu) - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{u_1(0, i\mu)}{u_2(0, i\mu)} = \\ = \left(1 + \frac{|u_1(0, i\mu)|^2}{|u_2(0, i\mu)|^2} \right) \cdot \int_0^\infty (p(r) + i\mu) \cdot \frac{|u(r, i\mu)|^2}{|u(0, i\mu)|^2} dr = \\ = (1 + |k(i\mu)|^2) \cdot \left(\int_0^\infty p(r) \cdot \frac{|u(r, i\mu)|^2}{|u(0, i\mu)|^2} dr + i\mu \int_0^\infty \frac{|u(r, i\mu)|^2}{|u(0, i\mu)|^2} dr \right) = \\ = (1 + |k(i\mu)|^2) (c(i\mu) + i\mu m(0, i\mu)), \quad (3.20)$$

откуда

$$\frac{|k(i\mu)|}{1 + |k(i\mu)|^2} = [|c(i\mu)|^2 + \mu^2 \cdot m^2(0, i\mu)]^{1/2}. \quad (3.21)$$

Так как

$$c(i\mu) = \int_0^\infty p(r) \frac{|u(r, i\mu)|^2}{|u(0, i\mu)|^2} dr \geq p(0) \int_0^\infty \frac{|u(r, i\mu)|^2}{|u(0, i\mu)|^2} dr = p(0) \cdot m(0, i\mu),$$

и $|c(i\mu)|^2 \geq p^2(0) \cdot m^2(0, i\mu)$, то (3.21) перепишем в виде (учитывая неравенство (3.18))

$$\frac{1}{2} \geq \frac{|k(i\mu)|}{1 + |k(i\mu)|^2} \geq [p^2(0) + \mu^2]^{1/2} \cdot m(0, i\mu) \geq \\ \geq \frac{[p^2(0) + \mu^2]^{1/2} \cdot (1 - e^{-2[p(b) + q(b) + \mu] \cdot b})}{2[p(b) + q(b) + \mu]} \stackrel{\text{def}}{=} f(\mu),$$

где b — произвольное конечное число $\geq \frac{1}{2p(0)}$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{2} \geq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{|k(i\mu)|}{1 + |k(i\mu)|^2} \geq \lim_{\mu \rightarrow \infty} f(\mu) = \frac{1}{2},$$

что возможно только при

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} |k(i\mu)| = 1. \quad (3.22)$$

С другой стороны, из (3.20) имеем

$$\operatorname{Im} k(i\mu) = \frac{\operatorname{Im} R_\alpha(i\mu)}{\cos \alpha} = (1 + |k(i\mu)|^2) \cdot \mu \cdot m(0, i\mu). \quad (3.23)$$

Из двусторонней оценки (3.19), для $m(0, i\mu)$ следует, что $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu \times \times m(0, i\mu) = \frac{1}{2}$. Учитывая это, из (3.23) получаем

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \operatorname{Im} k(i\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} R_\alpha(i\mu)}{\cos \alpha} = 1,$$

т. е. $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \operatorname{Im} R_\alpha(i\mu) = \cos \alpha$ и, учитывая (3.22),

$$0 = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \operatorname{Re} k(i\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re} R_\alpha(i\mu) - \sin \alpha}{\cos \alpha},$$

т. е. $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \operatorname{Re} R_\alpha(i\mu) = \sin \alpha$ и лемма 3.2 доказана. Из определения (2.2) и доказанной леммы следует

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{u_1(0, i\mu)}{u_2(0, i\mu)} = i. \quad (3.24)$$

§ 4. Выражение нормировочных постоянных через два спектра (доказательство теоремы 1)

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} R(\lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_\alpha(\lambda)}{R_\beta(\lambda)} = \frac{u_1(0, \lambda) \cos \alpha + u_2(0, \lambda) \sin \alpha}{u_1(0, \lambda) \cos \beta + u_2(0, \lambda) \sin \beta} = \\ &= \frac{\frac{u_1(0, \lambda)}{u_2(0, \lambda)} \cos \alpha + \sin \alpha}{\frac{u_1(0, \lambda)}{u_2(0, \lambda)} \cos \beta + \sin \beta}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Аналогично тому, как это делалось в § 2 для функции $R_\alpha(\lambda)$, получаем, что

$$\operatorname{Im} R(\lambda) = \operatorname{Im} \lambda \cdot \frac{\int_0^\infty |u(r, \lambda)|^2 dr}{|u_1(0, \lambda) \cos \beta + u_2(0, \lambda) \sin \beta|^2} \sin(\beta - \alpha),$$

т. е. $R(\lambda)$ есть вещественная мероморфная функция, переводящая верхнюю полуплоскость в верхнюю и, следовательно, согласно упомянутой выше теореме М. Г. Крейна, ее нули $\{\lambda_n(\alpha)\}_{n=1}^\infty$ и полюса $\{\lambda_n(\beta)\}_{n=1}^\infty$ все простые и перемежаются; для нее имеет место представление

$$R(\lambda) = c \frac{\lambda - \lambda_0(\alpha)}{\lambda - \lambda_0(\beta)} \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{\lambda_k(\alpha)}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k(\beta)}\right)^{-1}, \quad (4.2)$$

где $c > 0$ и (учитывая нумерацию собственных значений, указанную в § 1) нули лежат правее полюсов, т. е.

$$\lambda_n(\beta) < \lambda_n(\alpha) < \lambda_{n+1}(\beta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Из леммы 3.2 следует

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R(i\mu) = \frac{\sin \alpha + i \cos \alpha}{\sin \beta + i \cos \beta} = e^{i(\beta - \alpha)},$$

в частности

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} |R(i\mu)| = 1, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \arg R(i\mu) = \beta - \alpha. \quad (4.3)$$

Используя эти предельные соотношения, докажем две леммы.

Лемма 4.1. Постоянная $c > 0$, входящая в представление (4.2), определяется через два спектра (без $\lambda_0(\alpha)$ и $\lambda_0(\beta)$) равенством

$$c \cdot \lim_{\mu \rightarrow \infty} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| = 1. \quad (4.4)$$

Лемма 4.2.

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \arg \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} = \beta - \alpha. \quad (4.5)$$

Для доказательства этих лемм запишем (4.2) при $\lambda = i\mu$

$$R(i\mu) = c \frac{\lambda_0(\alpha) - i\mu}{\lambda_0(\beta) - i\mu} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu},$$

и возьмем логарифм (главное значение логарифма) от обеих сторон

$$\begin{aligned} \ln R(i\mu) &\stackrel{\text{def}}{=} \ln |R(i\mu)| + i \arg R(i\mu) = \ln \left| c \frac{\lambda_0(\alpha) - i\mu}{\lambda_0(\beta) - i\mu} \right| + \\ &+ i \arg \left(c \frac{\lambda_0(\alpha) - i\mu}{\lambda_0(\beta) - i\mu} \right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \ln \left| \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| + \right. \\ &\quad \left. + i \arg \left(\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поскольку $c > 0$ и $\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} > 0$ при $k \neq 0$, то эти сомножители под знаками аргумента можно отбросить. Заметим также, что

$$\arg \left(\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right) = \arg \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu}$$

равен углу, под которым виден отрезок действительной оси $[\lambda_k(\beta), \lambda_k(\alpha)]$ из точки $i\mu$. Поэтому последовательность $\varphi_n(\mu) = \sum_{-n}^n \arg \times \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu}$ представляет собой положительную, монотонно возраста-

стающую и ограниченную (равномерно по $\mu > 0$, $\varphi_n(\mu) < \pi$) последовательность, т. е. она сходится. Учитывая все это и отделяя действительные и мнимые части в (4.6), получаем два равенства

$$\ln |R(i\mu)| = \ln \left\{ c \left| \frac{i_0(z) - i\mu}{i_0(\beta) - i\mu} \right| \right\} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left\{ \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{|\lambda_k(\alpha) - i\mu|}{|\lambda_k(\beta) - i\mu|} \right\},$$

$$\arg R(i\mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \arg \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu}.$$

Исходя из равенств (4.3) и переходя к пределу при $\mu \rightarrow \infty$, получаем

$$0 = \ln c + \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left\{ \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{|\lambda_k(\alpha) - i\mu|}{|\lambda_k(\beta) - i\mu|} \right\} \quad (4.7)$$

и равенство (4.5). Очевидно, что (4.7) можно переписать в виде (4.4). Таким образом, леммы 4.1 и 4.2 доказаны.

Перейдем теперь к определению нормировочных постоянных $a_n(\alpha)$ через два спектра. Для этого, во-первых, докажем, что

$$\frac{dR(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n(\alpha)} = \frac{a_n(\alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}. \quad (4.8)$$

В самом деле, так как $R_\alpha(\lambda_n(\alpha)) = 0$ и $R'_\alpha(\lambda_n(\alpha)) = \frac{a_n(\alpha)}{\cos \alpha}$ (см. (2.18)), то из (4.1) имеем

$$\frac{dR(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n(\alpha)} = \frac{R'_\alpha(\lambda_n(\alpha))}{R_\beta(\lambda_n(\alpha))} = \frac{a_n(\alpha)}{R_\beta(\lambda_n(\alpha)) \cdot \cos \alpha}. \quad (4.9)$$

Исходя из определения (2.2), используя (2.5) и начальные условия (1.4), получаем $R_\beta(\lambda_n(\alpha)) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha}$, что в сочетании с (4.9) дает (4.8).

С другой стороны, вычислим ту же производную $R'(\lambda_n(\alpha))$, исходя из представления (4.2). Записав $R(\lambda)$ в виде

$$R(\lambda) = c \frac{\lambda - \lambda_0(\alpha)}{\lambda - \lambda_0(\beta)} \prod_{0 < |k| < n} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda}{\lambda_k(\beta) - \lambda} \cdot \prod_{|k| > n} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda}{\lambda_k(\beta) - \lambda},$$

заметим, что в конечном произведении $\prod_{0 < |k| < n}$ множители можно переставлять, поэтому, выделив множитель $\frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda}{\lambda_n(\beta) - \lambda}$ и переписав $R(\lambda)$ в виде $\frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda}{\lambda_n(\beta) - \lambda} \Pi(\lambda)$, продифференцируем по λ :

$$\frac{dR(\lambda)}{d\lambda} = \left(\frac{d}{d\lambda} \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda}{\lambda_n(\beta) - \lambda} \right) \cdot \Pi(\lambda) + \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda}{\lambda_n(\beta) - \lambda} \cdot \frac{d}{d\lambda} \Pi(\lambda).$$

При $\lambda = \lambda_n(\alpha)$ второе слагаемое обращается в нуль, и мы имеем ($n \neq 0$),

$$\frac{dR(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n(\alpha)} = \frac{1}{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)} \Pi(\lambda_n(\alpha)) = \frac{1}{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)} \times$$

$$\times \frac{\lambda_0(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_0(\beta) - \lambda_n(\alpha)} \cdot \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} p_k, \quad (4.10)$$

где $p_k = \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)}$ при $k \neq n$, а $p_n = 1$. Из (4.8) и (4.10) следует формула (1.7). При $n=0$ соответствующий множитель уже выделен в представлении (4.2), поэтому, аналогично выводу (4.10), получается формула (1.8). Теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство теорем 1' и 2

Лемма 5.1. При условиях (1.10) и (1.11) бесконечное произведение

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \quad (5.1)$$

сходится, и бесконечное произведение

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| \quad (5.2)$$

сходится равномерно по $\mu \geq 1$.

Для сходимости бесконечного произведения (5.1) достаточно одновременной сходимости рядов (см., например, [10])

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} \quad (5.3)$$

и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\lambda_k(\beta) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} \right]^2. \quad (5.4)$$

Изучим сначала вопрос сходимости ряда (5.3). Как уже отмечалось, ряды эти надо понимать в смысле главного значения, т. е. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n$. Для сходимости ряда (5.3) необходимо и достаточно, чтобы «остаток»

$$R_{n,p} = \sum_{k=-(n+p)}^{-n} \frac{\lambda_k(\beta) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)} + \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\lambda_k(\beta) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)}$$

стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$ для любого натурального p .

Введем монотонно возрастающие функции

$$A_{\alpha}^{+}(\lambda) = \sum_{0 < \lambda_k(\alpha) < \lambda} [\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)], \quad \lambda > 0,$$

$$A_{\alpha}^{-}(\lambda) = - \sum_{\lambda < \lambda_k(\alpha) < 0} [\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)], \quad \lambda < 0,$$

и запишем $R_{n,p}$ в виде

$$R_{n,p} = - \int_{\lambda_{-(n+p)}^{(2)}}^{\lambda_{-n}^{(2)}} \frac{dA_{\alpha}^{-}(\lambda)}{\lambda} - \int_{\lambda_n^{(2)}}^{\lambda_{n+p}^{(2)}} \frac{dA_{\alpha}^{+}(\lambda)}{\lambda} = \frac{A_{\alpha}^{-}(\lambda_{-(n+p)}^{(2)})}{\lambda_{-(n+p)}^{(2)}} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{A_{\alpha}^{-}(\lambda_{-n}(\alpha))}{\lambda_{-n}(\alpha)} + \frac{A_{\alpha}^{+}(\lambda_n(\alpha))}{\lambda_n(\alpha)} - \frac{A_{\alpha}^{+}(\lambda_{n+p}(\alpha))}{\lambda_{n+p}(\alpha)} - \\
& - \int_{\lambda_{-(n+p)}(\alpha)}^{\lambda_{-n}(\alpha)} \frac{A_{\alpha}^{-}(\lambda) d\lambda}{\lambda^2} - \int_{\lambda_n(\alpha)}^{\lambda_{n+p}(\alpha)} \frac{A_{\alpha}^{+}(\lambda) d\lambda}{\lambda^2}.
\end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь нам будет полезна следующая

Лемма 5.2. При условии (1.10) имеют место следующие асимптотические формулы:

$$A_{\alpha}^{+}(\lambda) = \frac{\beta - \alpha}{\pi} \lambda + C(\alpha, \beta) \ln \lambda + o(1), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (5.6)$$

$$A_{\alpha}^{-}(\lambda) = \frac{\beta - \alpha}{\pi} \lambda + C(\alpha, \beta) \ln |\lambda| + D(\alpha, \beta) + o(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty, \quad (5.7)$$

где постоянные $C(\alpha, \beta)$ и $D(\alpha, \beta)$ определяются равенствами

$$C(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} [p(0)(\sin 2\beta - \sin 2\alpha) + q(0)(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)],$$

$$D(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [p(0)(\cos 2\beta - \cos 2\alpha) + q(0)(\sin 2\beta - \sin 2\alpha)].$$

Для доказательства леммы 5.2 нам понадобятся, в свою очередь, следующие леммы.

Лемма 5.3. При всех $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{a_n(\gamma)} d\gamma. \quad (5.8)$$

Лемма 5.4.

$$\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \pm \infty. \quad (5.9)$$

Для доказательства леммы 5.3 введем обозначения

$$B = \frac{1}{i} a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(r, \lambda_n(\alpha)) = \varphi_n(\alpha),$$

и умножив скалярно (в $L_2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$) тождества

$$l \varphi_n(\alpha) = B \varphi_n(\alpha) + Q(r) \varphi_n(\alpha) = \lambda_n(\alpha) \varphi_n(\alpha),$$

$$l \varphi_n(\beta) = B \varphi_n(\beta) + Q(r) \varphi_n(\beta) = \lambda_n(\beta) \varphi_n(\beta),$$

соответственно, на $\varphi_n(\beta)$ и $\varphi_n(\alpha)$. Учитывая самосопряженность матрицы $Q(r)$ и вычитая из первого полученного тождества второе, получим

$$(B \varphi_n'(\alpha), \varphi_n(\beta)) - (B \varphi_n'(\beta), \varphi_n(\beta)) = [\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)](\varphi_n(\alpha), \varphi_n(\beta)).$$

Вычисляя левую часть последнего равенства, с учетом начальных условий (1.4), имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dr} [\varphi_{2,n}(\alpha) \cdot \varphi_{1,n}(\beta) - \varphi_{1,n}(\alpha) \cdot \varphi_{2,n}(\beta)] dr = \sin(\beta - \alpha),$$

т. е. имеет место тождество

$$[\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)] \cdot (\varphi_n(\alpha), \varphi_n(\beta)) = \sin(\beta - \alpha).$$

Учитывая, что $(\varphi_n(\alpha), \varphi_n(\beta)) \rightarrow \|\varphi_n(\alpha)\|^2 = a_n(\alpha)$, деля обе стороны на $\alpha - \beta$ и устремляя $\beta \rightarrow \alpha$, получаем тождество $\frac{d}{d\alpha} \lambda_n(\alpha) = -\frac{1}{a_n(\alpha)}$. Интегрируя последнее от α до β , имеем

$$\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{a_n(\gamma)} d\gamma,$$

т. е. лемма 5.3 доказана. Отсюда, в частности, следует, что при $\beta > \alpha$ $\lambda_n(\alpha) > \lambda_n(\beta)$. т. е. при возрастании α в краевом условии, собственные значения движутся влево.

Перейдем к доказательству леммы 5.4. Известно, [5], что если матрица $Q(r)$ удовлетворяет условию (1.10), то для спектральной функции $\sigma(\lambda) = \rho_{\pi/2}(\lambda)$ задачи (1.3) имеет место асимптотика

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \lambda + \frac{1}{\pi} p(0) \ln \lambda + o(1), & \lambda \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{\pi} \lambda + \frac{1}{\pi} p(0) \ln |\lambda| + q(0) + o(1), & \lambda \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.10)$$

Унитарным преобразованием

$$z = \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} y$$

задача (1.2) сводится к задаче

$$l_1 z = B \frac{dz}{dr} + Q_1(r) z = \lambda z, \quad (5.11),$$

$$z_2(0) = 0,$$

где

$$Q_1(r) = \begin{pmatrix} -[p(r) \cos 2\alpha + q(r) \sin 2\alpha] & p(r) \sin 2\alpha - q(r) \cos 2\alpha \\ p(r) \sin 2\alpha - q(r) \cos 2\alpha & p(r) \cos 2\alpha + q(r) \sin 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Так как спектральные функции задач (1.2) и (5.11) совпадают, а спектральная функция задачи (5.11) имеет асимптотику вида (5.10), то $\rho_\alpha(\lambda)$ имеет асимптотику

$$\rho_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \lambda - \frac{1}{\pi} [p(0) \cos 2\alpha + q(0) \sin 2\alpha] \ln \lambda + o(1), & \lambda \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{\pi} \lambda - \frac{1}{\pi} [p(0) \cos 2\alpha + q(0) \sin 2\alpha] \ln |\lambda| + p(0) \sin 2\alpha - \\ - q(0) \cos 2\alpha + o(1), & \lambda \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.12)$$

$$- q(0) \cos 2\alpha + o(1), \lambda \rightarrow -\infty. \quad (5.13).$$

Отсюда легко видеть, что при $n \rightarrow \pm \infty$

$$\frac{1}{a_n(\alpha)} \leq \rho_\alpha(\lambda_n(\alpha) + \varepsilon) - \rho_\alpha(\lambda_n(\alpha) - \varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi} [p(0) \cos 2x + q(0) \sin 2x] \ln \frac{\lambda_n(x) + \varepsilon}{\lambda_n(x) - \varepsilon} + o(1) = o(1)$$

и, тем самым, лемма 5.4 доказана.

Перейдем к доказательству леммы 5.2. Используя формулу (5.8), получаем

$$\begin{aligned} A_{\alpha}^{+}(\lambda) &= \sum_{0 < \lambda_k(\alpha) < \lambda} [\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)] = \int_0^{\lambda} \sum_{0 < \lambda_k(\gamma) < \lambda} \frac{1}{\alpha_k(\gamma)} d\gamma = \\ &= \int_0^{\lambda} \sum_{0 < \lambda_k(\gamma) < \lambda} \frac{1}{\alpha_k(\gamma)} d\gamma + o(1) = \int_0^{\lambda} \rho_{\gamma}(\lambda) d\gamma + o(1), \end{aligned} \quad (5.14)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$. Здесь мы использовали тот факт, что

$$\sum_{0 < \lambda_k(\alpha) < \lambda} \frac{1}{\alpha_k(\gamma)} - \sum_{0 < \lambda_k(\gamma) < \lambda} \frac{1}{\alpha_k(\gamma)} = \begin{cases} 0, & \text{или} \\ \frac{1}{\alpha_{n_0}(\gamma)}, & n_0 \rightarrow \infty \text{ при } \lambda \rightarrow \infty, \end{cases}$$

ибо число собственных значений $\lambda_n(\alpha)$ и $\lambda_n(\gamma)$ в промежутке $(0, \lambda]$ может отличаться не более чем на одно, вследствие их перемежаемости. Воспользовавшись теперь асимптотикой (5.12) спектральной функции, из (5.14) получаем асимптотическую формулу (5.6) для $A_{\alpha}^{+}(\lambda)$. Совершенно аналогично, из (5.13) и аналога (5.14) для $A_{\alpha}^{-}(\lambda)$, получаем асимптотику (5.7) функции $A_{\alpha}^{-}(\lambda)$.

Исходя из полученных асимптотик для $A_{\alpha}^{+}(\lambda)$ и $A_{\alpha}^{-}(\lambda)$, вернемся к оценке величины $R_{n,p}$. Легко видеть, что формула (5.5) при больших n принимает вид

$$\begin{aligned} R_{n,p} &= o(1) - \frac{\beta - \alpha}{\pi} \int_{\lambda_{-(n+p)(\alpha)}}^{\lambda_{-n}(\alpha)} \frac{1}{\lambda} d\lambda - \frac{\beta - \alpha}{\pi} \int_{\lambda_{n(\beta)}}^{\lambda_{n+p}(\beta)} \frac{1}{\lambda} d\lambda = \\ &= -\frac{\beta - \alpha}{\pi} \cdot \ln \frac{\lambda_{-n}(\alpha) \cdot \lambda_{n+p}(\beta)}{\lambda_n(\alpha) \cdot \lambda_{-(n+p)(\alpha)}} + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Отсюда видно, что условие (1.11) обеспечивает сходимость ряда (5.3).

Перейдем к вопросу о сходимости ряда (5.4). Поскольку $0 < \lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta) \rightarrow 0$, то $[\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)]^2 < \lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)$ при достаточно больших k . Поэтому

$$\begin{aligned} 0 < R_{n,p} &= \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{[\lambda_k(\beta) - \lambda_k(\alpha)]^2}{\lambda_k^2(\alpha)} + \sum_n^{n+p} \frac{[\lambda_k(\beta) - \lambda_k(\alpha)]^2}{\lambda_k^2(\alpha)} < \\ &< \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)}{\lambda_k^2(\alpha)} + \sum_n^{n+p} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)}{\lambda_k^2(\alpha)} = \\ &= \int_{\lambda_{-(n+p)(\alpha)}}^{\lambda_{-n}(\alpha)} \frac{dA_{\alpha}^{-}(\lambda)}{\lambda^2} + \int_{\lambda_{n(\alpha)}}^{\lambda_{n+p}(\beta)} \frac{dA_{\alpha}^{+}(\lambda)}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Из асимптотических формул (5.6) и (5.7) легко видеть, что в этом случае каждый из последних интегралов есть $o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, при условиях (1.10) и (1.11) бесконечное произведение (5.1) сходится.

Равномерная сходимость бесконечного произведения (5.2)

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| = e^{-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right|} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2}}$$

эквивалентна равномерной сходимости ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2}$, для которой, в свою очередь, достаточна равномерная сходимость рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2} - 1 \right) \text{ и } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2} - 1 \right)^2. \quad (5.16)$$

Для первого из этих рядов составим «остаток»

$$R_{n,p}(\mu) = \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta)}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2} + \sum_n^{n+p} \frac{\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta)}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2}.$$

Согласно лемме 5.4, $\lambda_k(\alpha) = \lambda_k(\beta) + o(1)$. Поэтому, записав $\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta) = [\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)] \cdot [2\lambda_k(\beta) + o(1)]$, перепишем выражение для $R_{n,p}(\mu)$ в виде

$$R_{n,p}(\mu) = \int_{\lambda_{-(n+p)}(\beta)}^{\lambda_{-n}(\beta)} \frac{[2\lambda + o(1)] dA_{\beta}^{-}(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2} - \int_{\lambda_n(\beta)}^{\lambda_{n+p}(\beta)} \frac{[2\lambda + o(1)] dA_{\beta}^{+}(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2},$$

где $A_{\beta}^{\pm}(\lambda)$ отличается от $A_{\alpha}^{\pm}(\lambda)$ только тем, что суммирование производится по собственным значениям $\lambda_k(\beta)$. Из доказательства леммы 5.2 видно, что для $A_{\beta}^{\pm}(\lambda)$ имеют место те же асимптотические формулы (5.6) и (5.7), что и для $A_{\alpha}^{\pm}(\lambda)$. Аналогично тому, как получалось равенство (5.15), в этом случае имеем

$$R_{n,p}(\mu) = \frac{\beta - \alpha}{\pi} \ln \frac{(\lambda_{-n}^2(\beta) + \mu^2) \cdot (\lambda_{n+p}^2(\beta) + \mu^2)}{(\lambda_{-(n+p)}^2(\beta) + \mu^2) \cdot (\lambda_n^2(\beta) + \mu^2)} + o(1),$$

откуда при условии (1.11), следует, что $R_{n,p}(\mu) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по μ , т. е. равномерная сходимость первого из рядов (5.16). Для второго ряда, составленного из квадратов, используя соотношения $[\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)]^2 < \lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)$ и $\lambda_k(\alpha) + \lambda_k(\beta) = 2\lambda_k(\beta) + o(1)$, верные при больших k , и следующее из этих соотношений неравенство

$$\begin{aligned} \frac{[\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta)]^2}{[\lambda_k^2(\beta) + \mu^2]^2} &= \frac{[\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)]^2 \cdot [2\lambda_k(\beta) + o(1)]^2}{[\lambda_k^2(\beta) + \mu^2]^2} \leq \\ &\leq C \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2}, \quad C > 0, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} 0 < R_{n,p}(\mu) &= \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{[\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta)]^2}{[\lambda_k^2(\beta) + \mu^2]^3} + \sum_n^{n+p} \frac{[\lambda_k^2(\alpha) - \lambda_k^2(\beta)]^2}{[\lambda_k^2(\beta) + \mu^2]^2} < \\ &\leq C \sum_{-(n+p)}^{-n} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2} + C \sum_n^{n+p} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\beta)}{\lambda_k^2(\beta) + \mu^2} = \\ &= C \int_{\lambda_{-(n+p)(\beta)}}^{\lambda_{-n(\beta)}} \frac{dA_{\beta}^{-}(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2} + C \int_{\lambda_n(\beta)}^{\lambda_{n+p(\beta)}} \frac{dA_{\beta}^{+}(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2}. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущим оценкам получаем, что этот остаток $R_{n,p}(\mu) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\mu \geq 1$.

Таким образом, доказана равномерная сходимость бесконечного произведения (5.2), т. е. завершено доказательство леммы 5.1.

Из леммы 5.1 следует, что соотношение (4.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} c \lim_{\mu \rightarrow \infty} \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| &= c \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \lim_{\mu \rightarrow \infty} \prod_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k(\alpha) - i\mu}{\lambda_k(\beta) - i\mu} \right| = \\ &= c \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} = 1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Перейдем к доказательству теоремы 1'. Обращаясь к равенству (1.7) и заметив, что бесконечное произведение

$$\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)}$$

сходится при любом фиксированном n (это доказывается так же, как сходимость бесконечного произведения (5.1)), перепишем равенство (1.7) в виде

$$a_n(\alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)} c \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)},$$

откуда, учитывая (5.17), получаем утверждение теоремы 1'.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $q(r) \equiv 0$. Тогда легко видеть, что $\lambda_n(\alpha) = -\lambda_{-n} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$. В самом деле, пусть $u_k(r)$ есть собственная функция задачи (1.2), соответствующая собственному значению $\lambda_k(\alpha)$, т. е. $u_k(r)$ удовлетворяет краевому условию (1.2) и

$$lu_k = \left\{ a_1 \frac{1}{i} \frac{d}{dr} + a_2 p(r) \right\} u_k = \lambda_k(\alpha) u_k,$$

где $u_k = (u_{k1}, u_{k2})$. Взяв $v_{-k} = a_2 u_k = (u_{k2}, u_{k1})$ и заметив, что матрицы a_k антикоммутируют, т. е. $a_k \cdot a_j = -a_j \cdot a_k$ при $k \neq j$, получим

$$lv_{-k} = \left\{ a_1 \frac{1}{i} \frac{d}{dr} + a_2 p(r) \right\} a_3 u_k = -a_3 l u_k = -a_3 \lambda_k(\alpha) u_k = \\ = -\lambda_k(\alpha) v_{-k},$$

причем, поскольку u_k удовлетворяет условию (1.2), то v_{-k} удовлетворяет краевому условию $v_{-k1}(0) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + v_{-k2}(0) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Таким образом, $v_{-k}(r)$ есть собственная функция задачи

$$ly = \lambda y, y_1(0) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + y_2(0) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0, \quad (5.18)$$

соответствующая собственному значению $-\lambda_k(\alpha)$, т. е. $\lambda_{-k}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\lambda_k(\alpha)$. Иными словами, спектр задачи (5.18) есть зеркальное отображение спектра задачи (1.2) относительно мнимой оси и, таким образом, знание одного спектра равнозначно знанию двух спектров.

Согласно лемме 5.4 $\lambda_{-k}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \lambda_{-k}(\alpha) + o(1)$, т. е. $\lambda_{-k}(\alpha) = -\lambda_k(\alpha) + o(1)$. Таким образом, при $q(r) \equiv 0$, заведомо выполняется условие (1.11) и поэтому нормировочные постоянные определяются формулой (1.12) (условие (1.10) предполагаем выполненным). Взяв теперь в качестве α и β в (1.12) величины $\frac{\pi}{2} - \alpha$ и α , для $a_n(\alpha)$ получаем формулу

$$a_n(\alpha) = \frac{|\cos 2\alpha|}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-n}(\alpha)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_k(\alpha) + \lambda_{-k}(\alpha)}.$$

Здесь мы учли то обстоятельство, что при $\frac{\pi}{2} - \alpha > \alpha$ надо брать $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и тогда $\sin(\beta - \alpha) = \cos 2\alpha > 0$, а при $\alpha > \frac{\pi}{2} - \alpha$ надо брать наоборот (так как в качестве β в формуле (1.12) всегда берется больший из двух), и тогда $\sin(\beta - \alpha) = -\cos 2\alpha > 0$. Заметим также, что при восстановлении по одному спектру $\{\lambda_n(\alpha)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, α должно быть отличным от $\frac{\pi}{4}$, так как в этом случае $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha$ и нарушается условие $\beta \neq \alpha$, которым мы существенно пользовались. Теорема 2 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 (т. е. равенства (1.14)) достаточно установить равенство

$$\sin \alpha - J_\alpha(\lambda) \cos \alpha = (\sin \alpha + J_{\pi/2}(\lambda) \cos \alpha)^{-1}, \quad (6.1)$$

ибо, записав (6.1) с β вместо α и исключив из полученной системы $J_{\pi/2}(\lambda)$, мы придем к равенству (1.14).

Для доказательства (6.1) запишем представления (2.16) и (2.17) при $\lambda = i\mu$, отделив действительные и мнимые части

$$\operatorname{Re} R_{\alpha}(i\mu) = b + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \left(\frac{\mu_k}{\mu_k^2 + \mu^2} - \frac{1}{\mu_k} \right), \quad (6.2)$$

$$\operatorname{Im} R_{\alpha}(i\mu) = a\mu + \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k^2 + \mu^2}, \quad (6.3)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{R_{\alpha}(i\mu)} \right\} = b' + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_k \left\{ \frac{\lambda_k(\alpha)}{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2} - \frac{1}{\lambda_k(\alpha)} \right\}, \quad (6.4)$$

$$\operatorname{Im} \left\{ -\frac{1}{R_{\alpha}(i\mu)} \right\} = a'\mu + \mu \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A'_k}{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}. \quad (6.5)$$

Докажем, что при условиях теоремы 3 ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k}$ сходится. Учитывая значения $A_k = \frac{\cos \alpha}{b_k}$ (см. (2.19)) и определение (1.5), имеем

$$\frac{1}{\cos \alpha} R_{n,p} = \sum_{k=-(n+p)}^{-n} \frac{1}{b_k \mu_k} + \sum_n^{n+p} \frac{1}{b_k \mu_k} = \int_{\mu=-(n+p)}^{\mu=-n} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda} + \int_{\mu_n}^{\mu_{n+p}} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda}.$$

Учитывая асимптотику (5.10), аналогично тому, как это делалось в § 5, получаем

$$\frac{1}{\cos \alpha} R_{n,p} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\mu_{-n} \cdot \mu_{n+p}}{\mu_{-(n+p)} \mu_n} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Условие (1.11) теперь обеспечивает равенство $R_{n,p} = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ и тем самым сходимость ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k}$.

Для доказательства равномерной сходимости ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k \mu_k}{\mu_k^2 + \mu^2}$ аналогичным образом, получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} R_{n,p}(\mu) &= \sum_{k=-(n+p)}^{-n} \frac{\mu_k}{b_k (\mu_k^2 + \mu^2)} + \sum_n^{n+p} \frac{\mu_k}{b_k (\mu_k^2 + \mu^2)} = \int_{\mu=-(n+p)}^{\mu=-n} \frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2} + \\ &+ \int_{\mu_n}^{\mu_{n+p}} \frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(\mu_{-n}^2 + \mu^2) \cdot (\mu_{n+p}^2 + \mu^2)}{(\mu_{-(n+p)}^2 + \mu^2) \cdot (\mu_n^2 + \mu^2)} + o(1) = o(1), \end{aligned}$$

равномерное по μ при условии (1.11).

Совершенно аналогично доказываются сходимость ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A'_k}{\lambda_k(\alpha)}$ и равномерная сходимость ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_k \frac{\lambda_k(\alpha)}{\lambda_k^2(\alpha) + \mu^2}$. При этом используется асимптотика (5.12), (5.13) спектральной функции $\rho_{\alpha}(\lambda)$.

Согласно лемме 3.2 в равенствах (6.2)–(6.5) можно перейти к пределу при $\mu \rightarrow \infty$, причем, согласно вышесказанному, в правых частях—

под знаком суммы. Совершая эти предельные переходы, из (6.2) и (6.4) получаем

$$b = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k} + \sin \alpha, \quad b' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda_k(z)} - \sin \alpha,$$

а из (6.3) и (6.5), так как $\alpha \geq 0$, $A_k > 0$, $\alpha' > 0$, $A'_k > 0$,

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \mu \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k^2 + \mu^2} = \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \mu \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda_k^2(z) + \mu^2} = \cos \alpha.$$

Подставляя выражения для постоянных a , b , A_k ; α' , b' , A'_k в представления (2.16) и (2.17), получаем

$$R_\alpha(\lambda) = \cos \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\mu)}{\mu - \lambda} + \sin \alpha, \quad -R_\alpha(\lambda) = \cos \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_0(\mu)}{\mu - \lambda} - \sin \alpha.$$

Отсюда следует равенство (6.1). Теорема 3 доказана.

Замечание. Всюду на протяжении этой статьи мы предполагали, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что в случае $\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta \leq \frac{3}{2}\pi$,

а тем самым и при любых действительных α , все теоремы доказываются совершенно аналогично. В частности, в определении (2.2) функцию $R_\alpha(\lambda)$ надо взять со знаком минус, чтобы она переводила верхнюю полуплоскость в верхнюю.

Ереванский государственный
университет

Поступила 10. III. 1982
и 14. III. 1985

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ Հակադարձ խնդրի դիսկրետ սպեկտր ունեցող Դիրակի կանոնիկ համակարգի համար (ամփոփում)

Դիրակի կանոնի, ինքնահամարված սփռաւորի համար, որը ծնված է $L^2(0, \infty; C^1)$ տա-
րածափյունում

$$Ly = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dr} + \begin{pmatrix} p(r) & q(r) \\ \bar{q}(r) & -p(r) \end{pmatrix} \right\} y = \left\{ B \frac{d}{dr} + Q(r) \right\} y = \lambda y,$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

հավասարումների համակարգով ու

$$y_1(0, \lambda) \cos \alpha + y_2(0, \lambda) \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

և որային պայմանով և որն ունի $\{\lambda_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ մարտր դիսկրետ սպեկտր, ապացուցված է, որ p և q ֆունկցիաների վրա դրված որոշ պայմանների դեպքում $Q(r)$ պոտենցիալը կարելի է վերականգնել՝

ցիալը կարելի է վերականգնել՝

1) $p_\alpha(\lambda)$ սպեկտրալ ֆունկցիայի միջոցով կամայական իրական α -ի դեպքում,

2) $\{\lambda_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ և $\{\lambda_n(\beta)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ($\alpha \neq \beta$) երկու սպեկտրների միջոցով,

3) միայն $\{\lambda_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ սպեկտրով $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{4} \right)$, եթե $q(r) \equiv 0$,

4) $\{\lambda_n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ սպեկտրով և $u_n(r)$ նորմալիզացված սեփական վեկտոր-ֆունկցիաների $\{|u_n(0)|^2\}_{n=-\infty}^{\infty}$ արժեքների յիշատակ:

T. N. HARUTIUNIAN. *The inverse problem for canonic Dirac system with a discrete spectrum (summary)*

We consider canonic, selfadjoint Dirac operator in $L^2(0, \infty; C^2)$ given by the system

$$ly = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dr} + \begin{pmatrix} p(r) & q(r) \\ q(r) & -p(r) \end{pmatrix} \right\} y = \left\{ B \frac{d}{dr} + Q(r) \right\} y = \lambda y, \\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

and the boundary condition

$$y_1(0, \lambda) \cos \alpha + y_2(0, \lambda) \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

which has a purely discrete spectrum $\{\lambda_n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Under certain conditions on function p and q it is proved, that the potential $Q(r)$ can be reconstructed from either of the following:

1. the spectral function $\rho_\alpha(\lambda)$ for any real α ;
2. two spectral $\{\lambda_n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ and $\{\lambda_n(\beta)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\alpha \neq \beta$;
3. only one spectrum $\{\lambda_n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ under the condition $q(r) \equiv 0$;
4. one spectrum $\{\lambda_n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ and the values $\{|u_n(0)|^2\}_{n=-\infty}^{\infty}$ of the normalized eigenfunctions u_n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. Введение в спектральную теорию, «Наука», М., 1970.
2. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов. Обратная задача для системы Дирака, ДАН СССР, 167, № 5, 1966, 967—970.
3. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам, УМН, XIX, вып. 2, 1964, 3—63.
4. М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев. Решение обратной задачи по двум спектрам для уравнения Дирака на конечном отрезке, ДАН Азерб.ССР, 22, № 7, 1966, 3—6.
5. В. А. Яврян. Об асимптотике спектральной матрицы-функции канонической системы дифференциальных уравнений, ДАН Арм.ССР, 56, 3, 1973, 129—134.
6. C. Quigg, J. L. Rosner. Semiclassical sum rules, Fermilab PUB-77 105-T-1Y, November, 1977.
7. C. Quigg, J. L. Rosner, H. B. Thacker. Inverse scattering problem for quarkonium systems, I and II, Phys. Rev., D 18, № 1, 1978, 274—295.
8. H. Grosse, A. Martin. Theory of the inverse problem for confining potentials, Nuclear Phys., B 148, 1979, 413—432.
9. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, «Гостехиздат», 1956.
10. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2, М., 1966.